

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

理论力学

洪嘉振　杨长俊　编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

理论力学

洪嘉振　杨长俊　编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/洪嘉振,杨长俊编著.—北京:高等教育出版社,1999

面向 21 世纪课程教材

ISBN 7-04-007473-7

Ⅰ.理… Ⅱ.①洪… ②杨… Ⅲ.理论力学-高等学校-教材 Ⅳ.031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 68090 号

理论力学

洪嘉振 杨长俊 编著

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009

电 话 010-64054588 传 真 010-64014048

网 址 http://www.hep.edu.cn

经 销 新华书店北京发行所

排 版 高等教育出版社照排中心

印 刷 中国科学院印刷厂

纸张供应 山东高唐纸业集团总公司

开 本 787×960 1/16 版 次 1999 年 12 月第 1 版

印 张 22.25 印 次 1999 年 12 月第 1 次印刷

字 数 410 000 总 定 价 34.40 元

(附光盘)



面向21世纪课程教材



上海普通高校“九五”重点教材

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教育内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部工科力学"九五"规划教材。作者力图通过本书对已有大学物理力学基础的学生，培养他们具备对复杂工程对象正确建立力学模型的能力；具备对这些力学模型进行静力学、运动学与动力学瞬时或过程分析的能力，具备利用理论力学的基本概念判断分析结果正确与否的能力。为此，教材中对传统理论力学的内容进行了精选，增加了利用计算机程式化处理工程对象力学性态的基本原理与方法。本书是一本全新构思的教材，对传统的理论力学体系与教学内容作了较大的改进。

教材中许多概念采用了矢量与矩阵并重的表达方式，不仅物理意义明确，而且便于计算机数值计算。运动学从刚体运动学出发，用矢量几何与矢量代数两种方法处理点和刚体的运动学关系。矢量动力学与分析力学重点介绍动力学的基本定理、建立动力学模型的方法与动力学性态的瞬时分析技术。静力学按动力学的特殊情况处理。教材中专门安排两章介绍先进的复杂机械系统运动学、动力学与静力学程式化建模的基本原理与处理问题的方法，并且可利用配套的计算机辅助教学软件《理论力学问题求解器》培养利用软件解决工程实际问题的能力。

本书可作为高等院校工科机械类各专业学生学习理论力学的教科书，也可作为从事机械工程、航空航天工程与车辆工程等领域工程技术人员知识更新的参考书。

序

很难预见在未来的21世纪对大型工程设计与优化将有怎样的需求，但总是要充分利用计算技术不断提高工程设计的效率、加快产品的更新、提高产品的性能与减小投资风险。近年来提出的虚拟设计的思想，是达到上述目标的探索。实现此目的将涉及多门学科，而对工程对象运动与控制性态的分析及优化是虚拟设计的基础。理论力学作为一门技术基础课程，面对工程复杂机械系统运动学、动力学与静力学性态的分析与优化的需求，传统的教学内容与课程体系必须进行改革。著者试图在这方面作些探索。

我们认为理论力学作为一门技术基础课，它的基本任务应该是在原来学生已有的力学基础上，培养学生具备对复杂(包括简单)工程对象正确建立力学模型的能力，具备对这些力学模型进行静力学、运动学与动力学(包括瞬时与过程)分析的能力，具备利用理论力学的基本概念判断分析结果正确与否的能力。为了达到上述目标，面对传统的理论力学的体系与教学内容，首先要做减法，减去与物理重复的教学内容，减去与理论力学问题瞬时与过程分析无用的一些概念；然后是如何叙述传统理论力学中保留的内容和增加哪些面向21世纪的内容，以及如何将两者贯通成为一个体系。我们认为传统的理论力学中的大部分基本概念与基本方法必须按照三个能力的培养目标予以取舍，部分内容改写的目的是与面向21世纪新内容接轨。具体表现在以下几个方面：

1. 引入矩阵工具，通过矢量代数与矩阵运算的结合，不仅使理论力学基本概念的数学描述变得简洁，而且便于数值分析的实现；

2. 以刚体与刚体系为课程的主要研究对象，教学内容以运动学与动力学为主，静力学作为动力学的特殊情况处理；

3. 精选矢量力学与分析力学的内容，使学生掌握运动学与动力学瞬时分析的基本概念与方法，培养他们判断与分析运动学与动力学现象的能力；

4. 强化运动学与动力学过程分析的程式化数学模型的建立，运动学以约束方程为主线，动力学以第一类拉格朗日方程为主线，实现运动学、动力学与静力学的贯通，理解当前国际先进的计算机辅助分析软件的基本原理；

5. 培养学生正确合理地将工程对象定义为刚体系力学模型的能力，并且能利用软件进行运动学、动力学与静力学分析问题。为了实现上述目标，本书附有电子出版物：计算机辅助教学软件《理论力学问题求解器》，在使用的方法上与大

型工程应用软件接轨。

本书共分7章。第1章为数学基础，其内容是介绍矢量代数与矩阵的最基本的概念，统一在书中将要使用的符号。重点使学生建立矢量基（坐标系）相互关系。第2章是运动学，由于运动学的切入点不是点，而是刚体，故与传统理论力学中的运动学相比有较大变动。这样介绍的优点可用较少的学时完成传统教材中相关的内容，同时为后续内容打下基础。第4章的矢量动力学基础与第6章的分析力学基础，包括了传统理论力学中动力学与分析力学中的大部分内容。通过学习使学生掌握动力学的基本概念与方法，掌握动力学瞬时分析的能力。与传统的教材不同的是力的概念在第4章中引入，是作为动力学中两个重要的概念（即力与惯量）之一进行介绍。笔者将静力学的力系平衡概念压缩在第4章中作为一节处理，因为这些概念学生已经建立，在理论力学中不再赘述。而静力学的平衡概念安排在第6章虚位移原理中作详细介绍。目录中的第3章与第7章是为面向21世纪增加的新内容。使学生掌握复杂机械系统运动学、动力学与静力学分析程式化建模与处理问题的基本原理与方法。

上述做法的设想早在两年前曾与北京航空航天大学王琪教授、清华大学的李俊峰教授与哈尔滨工业大学的赵经文教授共同讨论，得到理论力学界前辈谢传锋教授与梅凤翔教授的鼓励，教育部基础力学课程指导小组组长范钦珊教授给予了有力的支持。本书在撰写的过程中引用了刘延柱教授与吴镇教授编写的理论力学教材中的例题与习题。梅凤翔教授、刘延柱教授与王琪教授还对全书进行审阅，提出了许多宝贵的意见。在本书正式出版之际，著者要感谢上述各位的关心与帮助。

理论力学教学内容与体系改革是一项长期与艰巨的工程，需要有志于理论力学教学改革的同仁共同奋斗。本书作为教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"中"力学系列课程教学内容和体系改革的研究与实践"项目的研究成果之一奉献给读者，只是著者的一种努力。至于这种改革的方案是否符合实际还需在今后的教学实践中不断地完善。

全书各章由洪嘉振教授执笔，杨长俊副教授在全书的内容安排、筛选上提出了重要的意见，并且设计与安排了绝大部分习题。研究生韩兴华、杨辉与朱国强为完成《理论力学问题求解器》作了大量的工作。本书初稿完成后曾在上海交通大学机械工程专业本科生中试用，根据试用结果对初稿进行了修改，形成了本书稿。

由于著者的水平有限，书中的错误和疏漏之处在所难免，恳望读者指教。

洪嘉振　杨长俊

1999年6月于上海交通大学

主要符号表

说明:

1. 本书中的数学与物理量涉及到标量、矢量、标量矩阵与矢量矩阵等 4 种。在实施国家标准《量和单位》(GB 3100～3102—93)的过程中发现,如果上述各种量出现在同一表达式中将无法区分。为此,在保证执行国家标准的前提下作如下约定:标量用白斜体字母表示,例如 d,D;标量矩阵用黑斜体表示,例如 $\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{D}$;矢量用白斜体字母上加一箭头表示,例如 $\vec{d}$;矢量矩阵在国标中没有规定,根据上述约定,黑斜体字母上加一箭头表示矢量矩阵,例如 $\vec{\boldsymbol{d}}$。

2. 一矢量与它的模,以及在某一坐标系下坐标阵和坐标方阵在本书中经常同时出现,为了便于理解与表达,约定一矢量与它的模、坐标阵和坐标方阵用相同的斜体字母表达,区别是矢量用白斜体字母上加一箭头表示,例如 $\vec{d}$;该矢量的模用该字母的白斜体表示,即 d;该矢量的坐标阵用该字母的黑斜体表示,即 $\boldsymbol{d}$;该矢量的坐标方阵用该字母的黑斜体上加波浪号表示,即 $\tilde{\boldsymbol{d}}$。

$\vec{0}$	零矢量
$\mathbf{0}$	零矩阵
$\mathbf{1}_n$	元素为 1 的 n 阶列阵
$\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$,方向余弦阵
$(\boldsymbol{A}_{ij})_{m\times n}$	$m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A}^{ij}$	基 i 相对于基 j 的方向余弦阵
$\boldsymbol{A}^{i}$	基 i 相对于公共基的方向余弦阵
$\vec{a}$	加速度矢量,连体基基点或刚体质心的加速度矢量
$\vec{a}_P$	点 P 的绝对加速度矢量
$\vec{a}_P^{C}$	点 P 的科氏(科里奥利)加速度矢量
$\vec{a}_P^{r}$	点 P 的相对加速度矢量
$\vec{a}_P^{e}$	点 P 的牵连加速度矢量
$\vec{a}_{\alpha P}$	点 P 的转动牵连切向加速度矢量
$\vec{a}_{\omega P}$	点 P 的转动牵连法向加速度矢量
B_i	刚体 i,物体 i

c	粘性摩擦因数
C_i	刚体 i 的质心
$\mathrm{d}\boldsymbol{q}$	实位移(列阵)
$\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*$	可能位移(列阵)
$\mathrm{d}W_k$	力 $\vec{F}_k$ 所作的元功
e	恢复因数
$\vec{\boldsymbol{e}}$	矢量基(简称基),矢量列阵
$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$	矢量基的 3 个基矢量
$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$	矢量基 r,参考基
$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$	矢量基 b,连体基
f_{s}	静摩擦因数
f	动摩擦因数
$\vec{F}$	力,外力
$\vec{F}^{\mathrm{a}}$	主动力
$\vec{F}^{\mathrm{n}}$	理想约束力,理想约束力的主矢
$\vec{F}^{\mathrm{I}}$	惯性力
$\vec{F}^{\mathrm{e}}$	牵连惯性力
$\vec{F}^{\mathrm{C}}$	科氏(科里奥利)力
$\vec{F}^*$	(达朗贝尔)惯性力,惯性力主矢
$\vec{F}_{\mathrm{N}}$	法向约束力
$\vec{F}_{\mathrm{f}}$	摩擦力
$\vec{F}_{\mathrm{R}}$	力系的主矢
$\vec{F}_{\mathrm{T}}$	系绳的拉力
$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}$	增广主动力阵
$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}}$	增广理想约束力阵
$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{I}}$	增广惯性力阵
$\vec{g}$	重力加速度矢量
$\vec{G}$	重力
$\boldsymbol{H}$	影响系数矩阵
H_i	铰 i
$\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}_n$	单位阵,n 阶单位阵
$\vec{I}$	碰撞冲量
J_{Ox},J_{Oy},J_{Oz}	质点系(刚体)关于 Ox,Oy,Oz 轴的转动惯量

$J_{Oxy}(J_{Oyx}), J_{Oyz}(J_{Ozy}), J_{Oxz}(J_{Ozx})$

质点系(刚体)关于 Oxy, Oyz, Oxz 平面的惯性积

k　线弹簧刚度系数

L　拉格朗日函数

$\vec{L}_C$　质点系相对 C 点的绝对动量矩

$\vec{L}'_C$　质点系相对 C 点的相对动量矩

m　质量

$\vec{M}_O(\vec{F})$　力 $\vec{F}$ 对点 O 的矩

$\vec{M}$　力矩,力偶矩

$\vec{M}_C$　外力系对于点 C 的主矩

$\vec{M}_C^{a}$　主动力系对于点 C 的主矩

$\vec{M}_C^{n}$　理想约束力系对于点 C 的主矩

$\vec{M}_C^{I}$　质点系对于质心 C 的惯性力主矩

$\vec{M}_C^{*}$　(达朗贝尔)惯性力对于点 C 的主矩

$\vec{M}_f$　滚动阻力偶矩

P_k　点 k,质点 k

$\vec{p}$　动量

$\boldsymbol{q}$　坐标(列)阵,刚体的位形坐标(列)阵

$\dot{\boldsymbol{q}}$　实速度(列阵)

$\dot{\boldsymbol{q}}^*$　可能速度(列阵)

Q_j　主动力关于广义坐标 w_j 的广义力

$\vec{r}_P$　点 P 的矢径

T　动能

$\boldsymbol{u}$　非独立坐标(列)阵

U　势函数,势

$\vec{v}$　速度矢量,连体基基点或刚体质心的速度矢量

$\vec{v}_P^{r}$　点 P 的相对速度矢量

$\vec{v}_P^{e}$　点 P 的牵连速度矢量

$\vec{v}_{\omega P}$　点 P 的转动牵连速度矢量

V　势能函数,势能

$\boldsymbol{w}$　独立坐标(列)阵,广义坐标阵

W　力所作的功

$\boldsymbol{Z}$　刚体的增广质量阵

$\vec{\alpha}$　角加速度矢量

δ	自由度数,滚阻系数
δP	虚功率
$\delta \boldsymbol{q}$	虚位移(列阵)
$\Delta \boldsymbol{q}$	速度变更(列阵)
φ	刚体或连体基的姿态角
φ_m	摩擦角
$\boldsymbol{\Phi}$	约束方程组(列阵)
$\boldsymbol{\Phi}^K$	主约束方程组(列阵)
$\boldsymbol{\Phi}^D$	驱动约束方程组(列阵)
$\boldsymbol{\Phi}_q$	约束方程雅可比(矩阵),列阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 对坐标阵,$\boldsymbol{q}$ 的偏导数
$\boldsymbol{\Phi}_u$	约束方程关于非独立坐标 $\boldsymbol{u}$ 的雅可比(矩阵)
$\boldsymbol{\Phi}_w$	约束方程关于独立坐标 $\boldsymbol{w}$ 的雅可比(矩阵)
$\boldsymbol{\Phi}_t$	速度约束方程的右项(列阵),列阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 对时间 t 的偏导数
$\boldsymbol{\gamma}$	加速度约束方程的右项(列阵)
$\boldsymbol{\lambda}$	拉格朗日乘子(列阵)
ρ_x, ρ_y, ρ_z	质点系(刚体)对于 Ox, Oy, Oz 轴的回转半径
$\vec{\rho}_P, \boldsymbol{\rho}'_P$	点 P 在连体基上的矢径,该矢径在该连体基上的坐标阵
$\vec{\rho}_i^P, \boldsymbol{\rho}_i'^P$	点 P 在刚体 i 连体基上的矢径,该矢径在该连体基上的坐标阵
$\vec{\omega}$	角速度矢量

责任编辑 黄 毅
封面设计 张 楠
责任绘图 朱 静
版式设计 马静如
责任校对 马桂兰
责任印制 宋克学

目　录

绪　论

现代哲学指出，**运动**是物质存在的形式，是物质固有的属性。它包括物质世界中发生的一切的变化与过程。物质的运动形式是多种多样的，如物体的发光、物质的热传导、电磁场的变化等。物体的机械运动也是物质运动形式之一。所谓**机械运动**是指物体的位置随时间的变动，如物体在空间的位置与姿态的改变、物体的变形以及液体与气体的流动。

力学是研究物体机械运动的科学。由于机械运动不仅存在于我们的周围以及包括人类本身，而且在其他的运动形式中也会伴随着物质的机械运动，因此机械运动是物质运动最基本、最简单的一种。据此，力学不仅可用来解释与分析物体机械运动，而且也是研究物质其他运动形式的基础。这就决定了力学在自然科学中的地位。

众所周知，许多工程技术学科与物体的机械运动密切相关。如机械、车辆、机器人与航空航天器等领域工程对象的主要运动形式就是机械运动，面临大量的力学问题。因此，力学又是这些工程技术学科的基础。

20 世纪以前的很长一段历史时期，人类对机械运动的研究只限于以宏观物体为对象，运动速度远小于光速。这个研究范围的力学称为**经典力学**。它是以 17 世纪牛顿(I. Newton)提出的基本定律为基础，故有时也称为**牛顿力学**。当物体运动速度接近于光速时，牛顿力学将不适用，物体运动的规律需要用**相对论**才能解释，这是爱因斯坦(A. Einstein)的贡献。然而，工程中绝大多数的研究对象属牛顿力学的研究范围，故相对论的出现，没有改变经典力学在工程对象机械运动分析中的重要地位。

在研究自然界与工程对象的机械运动时必须对复杂的实际的物理对象进行简化，根据研究的目的定义这些物理对象的**力学模型**。对于不同形态机械运动的研究产生了不同的力学分支。由于研究的目的不同，在这些分支中的力学模型也各不相同。当物体运动的范围远远大于其本身的大小，或它的形状对其运动的影响可以忽略不计时，那么可将该物体简化为有质量而无几何尺寸的点，这种力学模型称为**质点**。例如在研究天体或卫星在空间的运行轨道时，可将它们定义为质点。如果物体的运动与其尺寸有关，则可将物体定义为由多个质点组成的系统，称这类力学模型为**质点系**。如果在研究物体的运动时，物体的变形可忽略不计，那么该物体力学模型为一种特殊的质点系，即物体内任意两质点的距

离保持不变，称这类质点系为**刚体**。多个刚体组成的系统称为**刚体系**。例如在对大量的机械、车辆等对象进行运动分析时，当构成工程对象各部件的变形对其运动性态影响可不予考虑时，各部件的力学模型可定义为刚体，整个对象为刚体系。质点、质点系、刚体与刚体系通称为**离散系统**，它是理论力学的研究对象。在分析研究物体变形或流体流动的性态时，必须建立另一类力学模型，即物质在空间连续分布的**连续介质**。它是固体力学、流体力学等后续力学课程的研究对象。应该指出，由于连续介质也可视为一种质点系，理论力学中涉及质点系的一些力学普遍规律也适用于连续介质，故理论力学是后续力学课程的研究的基础。

考虑到理论力学不仅要建立力学基本概念与理论，而且要介绍解决实际工程对象的力学问题的方法，故理论力学尽管起源于物理学的一个独立的分支，但在内容上已经大大超出了物理学中的内容。这些内容将包括对复杂（包括简单）工程对象正确力学模型的建立；介绍对这些力学模型进行静力学、运动学与动力学（包括瞬时与过程）分析的方法，以及利用理论力学的基本概念对分析结果的正确性的判断。

理论力学研究的内容包括**静力学**、**运动学**与**动力学**三部分。静力学研究物体在力系作用下平衡的规律。运动学是从几何学的观点研究物体运动规律。动力学是研究物体的运动与作用于物体上的力之间的关系。考虑到静止是运动的特殊情况，故可将静力学与动力学贯通。因此本书将静力学的内容安排在动力学中进行介绍。

第1章　数学基础

理论力学中的许多概念与表达式涉及到**几何矢量**及其运算。**矢量**的代数描述及其运算将利用**矩阵**这个工具。在许多科技著作中并不区分矢量与矩阵的概念。然而，在理论力学中这两种数学量必须加以区分。为此本章简要介绍本书将要涉及到的有关内容，并统一符号。

1.1　矩阵

1.1.1　矩阵的定义与运算

由于运动学与动力学方程的矩阵表达式远比其他形式的表达式来得简洁，矩阵运算的规范性更适用于计算机编程，本书中的许多关系式将采用矩阵形式表达，为此现将有关矩阵的一些概念作简要的介绍，对一些符号进行约定。

将 $m\times n$ 个标量 A_{ij} 排列成如下的 m 行，n 列的表，将其定义为 $m\times n$ 阶（维）矩阵，用一黑斜体的大写字母来表示，即

$$\boldsymbol{A} \overset{\text{def}}{=} (A_{ij})_{m\times n} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1-1}$$

式中，A_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的第 i 行、第 j 列元素。将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行变为第 i 列，这样得到的 $n\times m$ 阶新矩阵，称其为原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。例如一 3×5 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{1.1-2}$$

这矩阵的转置矩阵为 5×3 阶矩阵，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{1.1-2'}$$

行与列的个数均为 n 的矩阵称为 n 阶**方阵**，除对角元素（至少有一为非零）外所有元素均为零的方阵称为**对角阵**，n 阶对角阵可写成

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{diag}(A_{11}\ A_{22}\cdots\ A_{nn}) \qquad (1.1-3)$$

对角元素的和称为该矩阵的**迹**，记为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$。对角元素为1的 n 阶对角阵称为 n 阶**单位阵**，记为 $\boldsymbol{I}_n$ 或简写为 $\boldsymbol{I}$。所有元素为零的矩阵称为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{0}$。如果对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，其元素满足 $A_{ij}=A_{ji}(i,j=1,\cdots,n)$，即有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \qquad (1.1-4)$$

则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为**对称阵**。如果 $A_{ij}=-A_{ji}(i,j=1,\cdots,n)$，即有

$$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \qquad (1.1-5)$$

则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**。显然，对于反对称矩阵，有

$$A_{ii}=0 \quad (i=1,\cdots,n) \qquad (1.1-6)$$

将矩阵的定义(1.1-1)加以推广，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素可以不是标量 A_{ij} 而是矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij}$，即

$$\boldsymbol{A}\overset{\text{def}}{=}(\boldsymbol{A}_{ij})_{m\times n}\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1-7)$$

式中：第 i 行 $(i=1,\cdots,m)$ 各矩阵元素 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{in}$ 的行阶相等；第 j 列 $(j=1,\cdots,n)$ 各矩阵元素 $\boldsymbol{A}_{1j},\boldsymbol{A}_{2j},\cdots,\boldsymbol{A}_{nj}(j=1,\cdots,n)$ 的列阶相等。称矩阵元素 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**分块阵**。例如式(1.1-2)所示的矩阵 $\boldsymbol{A}$，可由如下4个**分块矩阵**按式(1.1-7)表示，

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{21}=(4\quad 1),\ \boldsymbol{A}_{22}=(4\quad 2\quad 6) \qquad (1.1-8)$$

注意：第1行的块矩阵元素 $\boldsymbol{A}_{11}$、$\boldsymbol{A}_{12}$ 行阶均为2，第2行的块矩阵元素 $\boldsymbol{A}_{21}$，$\boldsymbol{A}_{22}$ 行阶均为1；第1列的块矩阵元素 $\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{21}$ 列阶均为2，第2列的块矩阵元素 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{22}$ 列阶均为3。

读者不难验证对于**分块阵**如下等式成立：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mn}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{m1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{m2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1n}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2n}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mn}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\qquad(1.1-9)$$

例如式(1.1－2)所示的矩阵的转置为式(1.1－2′),考虑到分块阵式(1.1－8),确有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 6 & 2\\ 5 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\\ 5 & 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4\\ 2\\ 6\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

如果有矩阵 $\boldsymbol{B}_i(i=1,\cdots,n)$ 分布在矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的如下对角位置上,则称 $\boldsymbol{D}$ 为**准对角阵**,记为

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{B}_n\end{pmatrix}\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{diag}(\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\cdots\ \boldsymbol{B}_n)\qquad(1.1-10)$$

只有一列的矩阵称为 m 阶**列阵**,用一黑斜体的小写字母来表示,即

$$\boldsymbol{a}\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_m)\qquad(1.1-11)$$

m 阶列阵 $\boldsymbol{a}$ 的转置 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 为 $1\times m$ 阶矩阵,称为 m 阶**行阵**。如果将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 式(1.1－1)的每一列的元素定义为列阵

$$\boldsymbol{a}_j=(A_{1j}\quad A_{2j}\quad\cdots\quad A_{mj})^{\mathrm{T}}\qquad(j=1,\cdots,n)$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有如下的分块表示:

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{a}_n)\qquad(1.1-12)$$

同样,如果将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 式(1.1－1)的每一行的元素定义为列阵

$$\boldsymbol{b}_i=(A_{i1}\quad A_{i2}\quad\cdots\quad A_{in})^{\mathrm{T}}\qquad(i=1,\cdots,m)$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为如下分块阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1\quad\boldsymbol{b}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{b}_m)^{\mathrm{T}}\qquad(1.1-13)$$

例如式(1.1-2)所示的矩阵 $\boldsymbol{A}$,可由如下5个3阶列阵按式(1.1-12)表示:

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_5=\begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix}$$

或由如下3个5阶列阵按式(1.1-13)表示:

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\3\\6\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}4\\1\\4\\2\\6\end{pmatrix}$$

下面考虑矩阵间常见的运算。

两个同阶的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 中如果所有的下标为 i 与 j 的元素相等,即有 $A_{ij}=B_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$,则称这两矩阵相等,记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \tag{1.1-14}$$

一个标量 α 与一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积为一同阶的新矩阵 $\boldsymbol{C}$,记为

$$\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{A} \tag{1.1-15}$$

其中,各元素的关系为

$$C_{ij}=\alpha A_{ij}\qquad(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$$

同阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为一同阶的新矩阵 $\boldsymbol{C}$,记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$

其中,各元素的关系为

$$C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}\qquad(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n) \tag{1.1-16}$$

不难验证,同阶的矩阵的和运算遵循结合律与交换律,即有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \tag{1.1-17}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1.1-18}$$

且有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{1.1-19}$$

令 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 阶矩阵,按式(1.1-13)与(1.1-12),它们分别可表达为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1\quad\boldsymbol{b}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{b}_n)$$

其中:$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}(i=1,\cdots,m)$ 为 s 阶行阵;$\boldsymbol{b}_j(j=1,\cdots,n)$ 为 s 阶列阵。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

的乘积定义为一 $m\times n$ 阶新矩阵 $\boldsymbol{C}$,记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB} \tag{1.1-20}$$

或

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} \tag{1.1-20′}$$

其中,各元素的关系为

$$c_{ij}=\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_j=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\qquad(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n) \tag{1.1-21}$$

注意,矩阵的乘积要求第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数。一般来说,矩阵乘积不遵循交换律,即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$。但遵循分配律与结合律,即有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC} \tag{1.1-22}$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{ABC} \tag{1.1-23}$$

且有

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{1.1-24}$$

1.1.2 矩阵的线性相关性、秩

对于 n 个 m 阶列阵 $\boldsymbol{a}_j=(A_{1j}\quad A_{2j}\quad\cdots\quad A_{mj})^{\mathrm{T}}\quad(j=1,\cdots,n)$,如果存在 n 个不同时为零的常数 $\alpha_j\,(j=1,\cdots,n)$,使得下式成立,则称这 n 个列阵**线性相关**:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\boldsymbol{a}_j=\alpha_1\begin{bmatrix}A_{11}\\A_{21}\\\vdots\\A_{m1}\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}A_{12}\\A_{22}\\\vdots\\A_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+\alpha_n\begin{bmatrix}A_{1n}\\A_{2n}\\\vdots\\A_{mn}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{1.1-25}$$

否则,当且仅当 $\alpha_j=0(j=1,\cdots,n)$时,上式才成立,则称这 n 个列阵**线性无关**。将上述定义加以推广。考虑 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,将其表为式(1.1-11),如果存在一常值列阵 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,使得下式成立,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各列阵线性相关:

$$\boldsymbol{A\alpha}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{0} \tag{1.1-26}$$

否则,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时,上式才成立,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各列阵线性无关。

同样,如果对于 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,将其表为式(1.1-12),如果存在一常值列阵 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_m)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,使得下式成立,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行阵线性相

关：

$$A^{T}\beta=0 \tag{1.1-27}$$

否则，当且仅当 $\beta=0$ 时，上式才成立，则称矩阵 A 的各行阵线性无关。

[例1.1-1] 讨论如下方阵的线性相关性：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

解： 令 $\alpha=(-2\quad 1\quad 1)^{T}\neq 0$，有

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

故矩阵 A 的列阵 $a_1=(1\quad 1\quad 0)^{T}$，$a_2=(1\quad 0\quad 1)^{T}$ 与 $a_3=(1\quad 2\quad -1)^{T}$ 线性相关。

若令 $\beta=(1\quad -1\quad -1)^{T}\neq 0$，有

$$A^{T}\beta=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

故矩阵 A 的行阵 $b_1=(1\quad 1\quad 1)^{T}$，$b_2=(1\quad 0\quad 2)^{T}$ 与 $b_3=(0\quad 1\quad -1)^{T}$ 线性相关。

一矩阵的最大的线性无关的列(行)阵的个数定义为该矩阵的**列(行)秩**。可以证明任何矩阵的行秩与列秩相等，故行秩或列秩又称为该矩阵的**秩**。通常秩小于或等于该矩阵的行阶与列阶中的小者。对于秩与行(或列)阶相等的情况，称该矩阵为**行(或列)满秩**。对于矩阵的各行(列)阵线性无关的方阵称为**满秩方阵**。不满秩的方阵又称为**奇异阵**。

对于非奇异阵存在一个**逆矩阵**，记为 A^{-1}，使得

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I \tag{1.1-28}$$

可证明以下等式成立

$$(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1} \tag{1.1-29}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \tag{1.1-30}$$

满足如下等式的非奇异阵 A 称为**正交阵**：

$$A^{-1}=A^{T} \tag{1.1-31}$$

代入式(1.1-28)，对于正交阵有

$$AA^{T}=A^{T}A=I \tag{1.1-32}$$

1.1.3 矩阵的导数

1. 矩阵对时间的导数

矩阵的元素如果为时间 t 的函数，记为 $A_{ij}(t)$，该矩阵记为 $\boldsymbol{A}(t)$。它对时间的导数为一同阶矩阵，其各元素为原矩阵的元素 $A_{ij}(t)$对时间的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\mathrm{d}A_{ij}}{\mathrm{d}t}\right)_{m\times n} \tag{1.1-33}$$

为了书写简洁，标量对时间的导数，用该标量的字母上加一点表示[①]，即上式可简写为

$$\dot{\boldsymbol{A}} = (\dot{A}_{ij})_{m\times n} \tag{1.1-33'}$$

根据此定义与微分的基本性质，可得到如下关系式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\boldsymbol{A}) = \dot{\alpha}\boldsymbol{A} + \alpha\dot{\boldsymbol{A}} \tag{1.1-34}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \dot{\boldsymbol{A}} + \dot{\boldsymbol{B}} \tag{1.1-35}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{B}} \tag{1.1-36}$$

式中：α 为时间函数的一标量；$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为时间函数的矩阵，它们满足矩阵运算的条件。

2. 矩阵对变量的偏导数

在运动学与动力学的分析中将遇到多个变量的微分方程组或代数方程组。如果这组变量为 n 个，通常引入一 n 阶列矩阵表示这组变量，例

$$\boldsymbol{q} = (q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n)^{\mathrm{T}} \tag{1.1-37}$$

考虑以这组变量为自变量的一标量函数 $a = a(q_1, q_2, \cdots, q_n)$，现简写为 $a(\boldsymbol{q})$。将函数 $a(\boldsymbol{q})$对变量阵 $\boldsymbol{q}$ 的偏导数定义为一 n 阶行阵，其元素分别为该标量函数对各自变量 q_j 的偏导数。现将函数 $a(\boldsymbol{q})$对变量阵 $\boldsymbol{q}$ 的偏导数记为$\dfrac{\partial a}{\partial \boldsymbol{q}}$，或简写为 $\boldsymbol{a}_q$，有

$$\boldsymbol{a}_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{q}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} \quad \frac{\partial a}{\partial q_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial a}{\partial q_n}\right) = \left(\frac{\partial a}{\partial q_j}\right)_{1\times n} \tag{1.1-38}$$

请注意，它与通常定义 $\boldsymbol{a}$ 为列阵的符号式(1.1-11)不一致。

又令 m 阶列阵 $\boldsymbol{\Phi}$，其元素 $\Phi_i(i=1,\cdots,m)$为变量阵 $\boldsymbol{q}$ 的函数，即有

$$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1(\boldsymbol{q}) \ \Phi_2(\boldsymbol{q}) \ \cdots \ \Phi_m(\boldsymbol{q}))^{\mathrm{T}}$$

---

① 全书均作这样的约定。

列阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 对变量阵 $\boldsymbol{q}$ 的偏导数记为$\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{q}}$,或简写为 $\boldsymbol{\Phi}_q$。用 i 表示行下标,用 j 表示列下标,定义该偏导数 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 为 $m \times n$ 阶矩阵,且:

$$\boldsymbol{\Phi}_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{q}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}\right)_{m\times n} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \tag{1.1-39}$$

[例 1.1-2] 定义由两个变量 θ_1 与 θ_2 构成的变量阵 $\boldsymbol{q}=(\theta_1 \quad \theta_2)^{\mathrm{T}}$。有一标量函数 $a=\sin\theta_1\cos 2\theta_2$ 与一三阶列阵

$$\boldsymbol{\Phi}=(\sin(\theta_1+2\theta_2) \quad \cos(2\theta_1-\theta_2) \quad \cos(2\theta_1-2\theta_2))^{\mathrm{T}}$$

分别为该变量阵的函数。求它们对变量阵 $\boldsymbol{q}$ 的偏导数。

解: 由式(1.1-38)的定义,标量函数 a 对 $\boldsymbol{q}$ 的偏导数为 1×2 行阵,有

$$\boldsymbol{a}_q = \left(\frac{\partial a}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial a}{\partial \theta_2}\right) = (\cos\theta_1\cos 2\theta_2 \qquad -2\sin\theta_1\sin 2\theta_2)$$

由式(1.1-39)的定义,列阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 对 $\boldsymbol{q}$ 的偏导数为 3×2 阶矩阵,有

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+2\theta_2) & 2\cos(\theta_1+2\theta_2) \\ -2\sin(2\theta_1-\theta_2) & \sin(2\theta_1-\theta_2) \\ -2\sin(2\theta_1-2\theta_2) & 2\sin(2\theta_1-2\theta_2) \end{bmatrix}$$

1.2 矢量

1.2.1 矢量、矢量基与基矢量

矢量 $\vec{a}$[①] 是一个具有方向与大小的量。它的大小称为**模**,记为 $|\vec{a}|$,或简写为 a。模为 1 的矢量称为**单位矢量**。模为 0 的矢量称为**零矢量**,记为 $\vec{0}$。矢量在几何上可用一个带箭头的线段来描述,线段的长度表示它的模,箭头在某一空间的指向为它的方向。利用这种方式描述的矢量又称为**几何矢量**。通过几何学的关系可定义如下的矢量的运算。

① 在国家标准 GB 3102.11 中,要求矢量以黑体字母表示,这将与矩阵的表达混淆,为此本书凡矢量均用上面加一箭头的白斜体字母表示。

模相等、方向一致的两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 称为两矢量相等，记为

$$\vec{a} = \vec{b} \tag{1.2-1}$$

标量 α 与矢量 $\vec{a}$ 的积为一个矢量，记为 $\vec{c}$，其方向与矢量 $\vec{a}$ 一致，模是它的 α 倍，即

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} \tag{1.2-2}$$

两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和为一个矢量，记为 $\vec{c}$，即

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \tag{1.2-3}$$

它与两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的关系遵循如图 1-1a 的平行四边形法则。矢量的和运算遵循结合律与交换律，即有

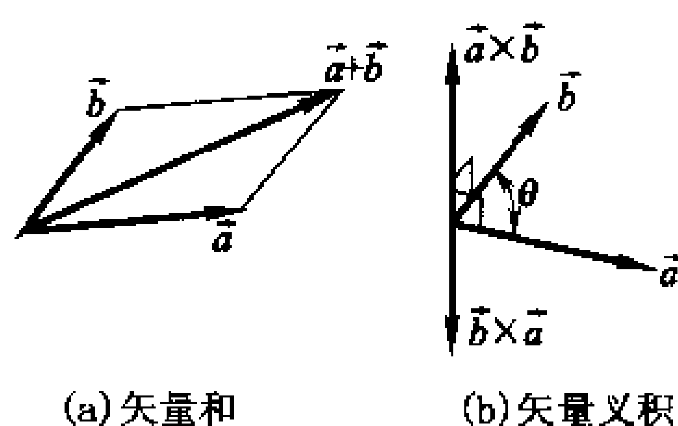
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{1.2-4}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1.2-5}$$

两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**点积**(或称为**标积**)为一个标量，记为 α，它的大小为

$$\alpha = \vec{a} \cdot \vec{b} \overset{\text{def}}{=} ab\cos\theta \tag{1.2-6}$$

式中，θ 为两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。特殊情况，$\vec{a} = \vec{b}$，此时 $\theta = 0$，有 $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$，即矢量自身的点积为其模的平方。$\vec{a} \cdot \vec{a}$ 有时也简写为 $\vec{a}^2$。



(a) 矢量和　　(b) 矢量叉积

图 1-1　几何矢量运算

由式(1.2-6)可知，矢量的点积有交换律，即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{1.2-7}$$

两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**叉积**(或称为**矢积**)为一个矢量，记为 $\vec{c}$，即

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{1.2-8}$$

它的方向垂直于两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 构成的平面，且三矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的正向依次遵循右手法则(见图 1-1b)。矢量 $\vec{c}$ 的模为

$$c = ab\sin\theta \tag{1.2-9}$$

式中，θ 为两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。由定义知(见图 1-1b)，矢量的叉积无交换律，但有

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{1.2-10}$$

矢量的点积与叉积有分配律，即

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c}) \tag{1.2-11}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) \tag{1.2-12}$$

由上述的基本运算可以得到如下常用的较复杂的运算关系式：

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} \tag{1.2-13}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) \tag{1.2-14}$$

式(1.2－13)左边称为三矢量的**两重叉积**，式(1.2－14)左边称为三矢量的**混合积**。

矢量的几何描述很难处理复杂运算的问题。通常采用比较多的是矢量的代数表达方法。为此首先用三个正交的单位矢量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 依次按右手法则构成一个参考空间(见图 1－2)，称为**矢量基**(简称**基**)或**坐标系**。这三个正交的单位矢量称为这个基的**基矢量**。根据三个基矢量的正交性，有如下的关系式：

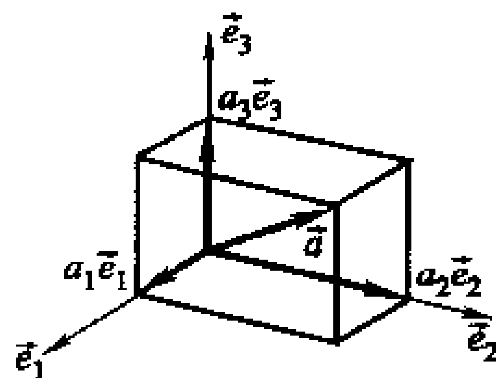


图 1－2 矢量基与矢量坐标

$$\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta=\delta_{\alpha\beta} \tag{1.2-15}$$

$$\vec{e}_\alpha\times\vec{e}_\beta=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\vec{e}_\gamma \tag{1.2-16}$$

式中，$\delta_{\alpha\beta}$称为克罗内克(L. Kronecker)符号，即

$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1 & 当\ \alpha=\beta\\ 0 & 当\ \alpha\neq\beta\end{cases}\qquad(\alpha,\beta=1,2,3) \tag{1.2-17}$$

而 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$称为李奇(Ricci)符号，即

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=\begin{cases}1 & 当\ \alpha,\beta,\gamma\ 依次循环\\ -1 & 其余\end{cases}\qquad(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3;\ \alpha\neq\beta\neq\gamma) \tag{1.2-18}$$

将基矢量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 构成一个矢量列阵①，即

$$\vec{\boldsymbol{e}}=(\vec{e}_1\quad\vec{e}_2\quad\vec{e}_3)^{\mathrm{T}} \tag{1.2-19}$$

用它来表示这个矢量基。对于不同的基，在 $\vec{\boldsymbol{e}}$ 上加上标进行区分。例，基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}$ 与基 $\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}$ 分别表示基 b 与基 r，即

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{b}}=(\vec{e}_1^{\mathrm{b}}\quad\vec{e}_2^{\mathrm{b}}\quad\vec{e}_3^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}\quad,\quad\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}=(\vec{e}_1^{\mathrm{r}}\quad\vec{e}_2^{\mathrm{r}}\quad\vec{e}_3^{\mathrm{r}})^{\mathrm{T}}$$

矢量列阵是标量列阵式(1.1－9)的拓展。矢量阵运算的定义在形式上与一般的矩阵运算定义一致。例如有矢量阵式(1.2－19)与矢量 $\vec{a}$，以下算式成立：

$$\vec{a}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}=\vec{a}\cdot\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{e}_1\\ \vec{a}\cdot\vec{e}_2\\ \vec{a}\cdot\vec{e}_3\end{pmatrix},\quad\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}\vec{e}_1\cdot\vec{a}\\ \vec{e}_2\cdot\vec{a}\\ \vec{e}_3\cdot\vec{a}\end{pmatrix} \tag{1.2-20}$$

---

① 本书凡矢量阵用上面加一箭头的黑斜体字母表示，以区别于标量矩阵。

$$\vec{a}\times\dot{e}=\vec{a}\times\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\times\vec{e}_1\\\vec{a}\times\vec{e}_2\\\vec{a}\times\vec{e}_3\end{pmatrix}\tag{1.2-21}$$

$$\dot{e}\cdot\dot{e}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{pmatrix}\cdot(\vec{e}_1\quad\vec{e}_2\quad\vec{e}_3)=\begin{pmatrix}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3\\\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\\\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{pmatrix}\tag{1.2-22}$$

$$\dot{e}\times\dot{e}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{pmatrix}\times(\vec{e}_1\quad\vec{e}_2\quad\vec{e}_3)=\begin{pmatrix}\vec{e}_1\times\vec{e}_1&\vec{e}_1\times\vec{e}_2&\vec{e}_1\times\vec{e}_3\\\vec{e}_2\times\vec{e}_1&\vec{e}_2\times\vec{e}_2&\vec{e}_2\times\vec{e}_3\\\vec{e}_3\times\vec{e}_1&\vec{e}_3\times\vec{e}_2&\vec{e}_3\times\vec{e}_3\end{pmatrix}\tag{1.2-23}$$

不难看出，式(1.2－20)与(1.2－21)是式(1.1－15)的拓展，在运算中，对于式(1.2－20)与(1.2－21)中的矢量阵$\dot{e}$，矢量$\vec{a}$相当于式(1.1－15)上的标量a的地位。式(1.2－22)与(1.2－23)是式(1.1－20)的拓展。注意以上的算式中点积与叉积的运算符不能遗漏，对于叉积运算的次序不能交换。

考虑到式(1.2－17)与(1.2－18)，式(1.2－22)与(1.2－23)分别可化简为

$$\dot{e}\cdot\dot{e}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_3\tag{1.2-24}$$

$$\dot{e}\times\dot{e}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\vec{0}&\vec{e}_3&-\vec{e}_2\\-\vec{e}_3&\vec{0}&\vec{e}_1\\\vec{e}_2&-\vec{e}_1&\vec{0}\end{pmatrix}\tag{1.2-25}$$

1.2.2 矢量的坐标阵

在某个矢量基$\dot{e}$上，根据矢量和的定义，任意矢量$\vec{a}$可通过如图1－2所示矢量和表示，其矢量运算表达式为

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3\tag{1.2-26}$$

式中，$a_1\vec{e}_1$，$a_2\vec{e}_2$与$a_3\vec{e}_3$分别为与基矢量方向一致的三个矢量，称它们为矢量$\vec{a}$在相应基矢量上的三个**分矢量**，或简称为**分量**。三个标量系数a_1，a_2，a_3分别称为矢量$\vec{a}$在三个基矢量上的**坐标**。这三个坐标构成一个标量列阵称为矢量$\vec{a}$在该矢量基上的**坐标阵**，记为

$$\boldsymbol{a}=(a_1\quad a_2\quad a_3)^{\mathrm{T}}\tag{1.2-27}$$

特殊情况，基矢量$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$与$\vec{e}_3$在该基下的坐标阵分别为

$$\boldsymbol{e}_1=(1\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0\quad 1\quad 0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$$

利用矩阵乘运算的形式，表达式(1.2－26)可写成矢量$\vec{a}$的坐标阵与基$\dot{e}$的矩阵积，即

$$\vec{a} = \vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\vec{e} \qquad (1.2-28)$$

考虑到式(1.2-26)与(1.2-15),不难验证矢量 $\vec{a}$ 的坐标阵式(1.2-27)有如下的表达式:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{e}_1 \\ \vec{a}\cdot\vec{e}_2 \\ \vec{a}\cdot\vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{a} \\ \vec{e}_2\cdot\vec{a} \\ \vec{e}_3\cdot\vec{a} \end{pmatrix} \qquad (1.2-29)$$

故考虑到式(1.2-20),上式可简写为

$$\boldsymbol{a} = \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{e} = \vec{e}\cdot\vec{\boldsymbol{a}} \qquad (1.2-29')$$

三个坐标还可写成一个反对称方阵,记为

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.2-30)$$

称此方阵为矢量 $\vec{a}$ 在该矢量基上的**坐标方阵**。由式(1.1-5)知,

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}} = -\tilde{\boldsymbol{a}} \qquad (1.2-31)$$

应该指出,根据定义,矢量在几何上是一客观存在的量,与矢量基的选取无关。而矢量的坐标阵与矢量基有关。例如,有两个不同的矢量基 $\vec{e}^{\mathrm{r}}$ 与 $\vec{e}^{\mathrm{b}}$。矢量 $\vec{a}$ 在这两个基上的坐标阵分别记为 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{r}}$ 与 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{b}}$(见图1-3)。由式(1.2-28)有

$$\vec{a} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{rT}}\vec{e}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{bT}}\vec{e}^{\mathrm{b}} \qquad (1.2-32)$$

或

$$\vec{a} = \vec{e}^{\mathrm{rT}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{r}} = \vec{e}^{\mathrm{bT}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{b}} \qquad (1.2-32')$$

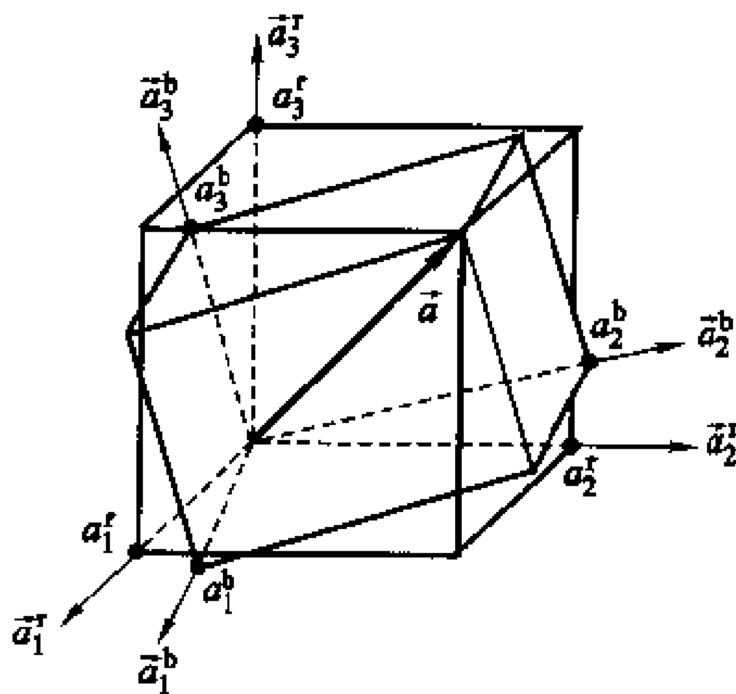


图1-3 同一个矢量在不同基上的坐标阵

下面讨论矢量的运算与在同一个基下的坐标阵运算间的关系。

首先令矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 在基 $\vec{e}$ 下的坐标阵分别记为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$。由式(1.2-28),有

$$\vec{a} = \vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} \tag{1.2-33}$$

$$\vec{b} = \vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{1.2-34}$$

$$\vec{c} = \vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} \tag{1.2-35}$$

将式(1.2-33)与(1.2-34)代入式(1.2-1),比较两边可得结论:相等的两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的在同一个基上的坐标阵相等,即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;反之亦然。

将式(1.2-33)与(1.2-34)代入式(1.2-2),(1.2-3),(1.2-6)与(1.2-8),它们的右边分别为

$$\alpha\vec{a} = \alpha\vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \vec{e}^{\mathrm{T}}\alpha\boldsymbol{a},$$

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+\vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \vec{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\vec{e}\cdot\vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\vec{e}\times\vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e}_3 = \vec{e}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$

上面的第三式应用了式(1.2-24),第四式应用了式(1.2-25)与(1.2-30)。将这些式子与式(1.2-35)比较,可得到矢量的基本运算在同一基下对应的坐标运算式,现列于表1.2-1中。根据表1.2-1读者可很容易写出较复杂的矢量运算对应的坐标阵运算式。

表1.2-1　矢量运算与同一基下坐标阵运算的关系

矢量运算式	坐标阵运算式
$\vec{a}=\vec{b}$	$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$
$\vec{c}=\alpha\vec{a}$	$\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}$
$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$	$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$
$\alpha=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	$\alpha=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$
$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$	$\boldsymbol{c}=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=-\tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$

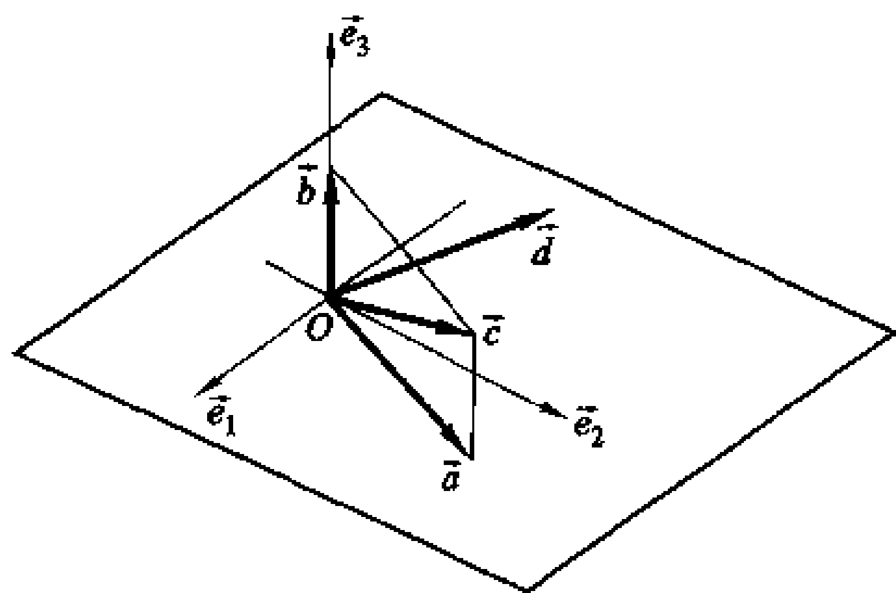
[例1.2-1]　已知矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 在基 $\vec{e}$ 下的坐标阵分别为 $\boldsymbol{a}=(1\quad 2\quad 0)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{b}=(0\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$,求矢量 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ 在该基下的坐标阵。

解: 由表1.2-1矢量 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 的坐标运算式为

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

考虑到式(1.2-30),由表1.2-1,矢量 $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ 的坐标运算式为

$$\boldsymbol{d} = \tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 0 & -1\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$



例 1.2－1 图

读者不难由图示的矢量的几何关系验证上述坐标阵运算式的结果。

［例 1.2－2］ 写出两重叉积 $\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{d})$ 与混合积 $\alpha=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{d})$ 对应的坐标运算式。

解：引入矢量 $\vec{f}=\vec{b}\times\vec{d}$，由表 1.2－1 知，该矢量的坐标运算式为 $\boldsymbol{f}=\tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{d}$。利用该矢量，题中的两重叉积与混合积可表为 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{f}$ 与 $\alpha=\vec{a}\cdot\vec{f}$。因而由表 1.2－1 有

$$\boldsymbol{c}=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}=\tilde{\boldsymbol{a}}\tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{d},\quad \alpha=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{d}$$

［例 1.2－3］ 试证明如下有关坐标方阵的一些有用的等式：

$$\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\widetilde{(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})}=\tilde{\boldsymbol{a}}\pm\tilde{\boldsymbol{b}} \tag{3}$$

证明：由矢量叉积的定义（1.2－8）与（1.2－9）知，矢量式 $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$，按表 1.2－1 直接写出对应的坐标式，即为式（1）。

引入任意矢量 $\vec{c}$，有 $(\vec{a}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=\vec{0}$，按表 1.2－1，且考虑到（1.2－31），可得矩阵运算式

$$(\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

由于上式对于任意矩阵 $\boldsymbol{c}$ 均成立，故有式（2）。

考虑到矢量叉积具有分配律，有 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$，按表 1.2－1 分别可推得矢量式的坐标式

$$\widetilde{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}\boldsymbol{c}=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}+\tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}=(\tilde{\boldsymbol{a}}+\tilde{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{c}$$

由于矢量式矢量 $\vec{c}$ 是任意的，由此直接可得式(3)。

1.2.3 矢量对时间的导数

上节已经提到，矢量是一与参考基无关的数学量，故它随时间的变化也与参考基无关。如图 1-4 所示，在时刻 t，该矢量的大小与方向为 $\vec{a}(t)$，到时刻 $t+\Delta t$，该矢量的大小与方向为 $\vec{a}(t+\Delta t)$，定义矢量在时刻 t 对时间的导数是另一个矢量，记为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}$，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t} \tag{1.2-36}$$

这种从几何上考察或进行矢量导数的运算是极不方便的。为了考察矢量的大小与方向的变化，通常得在一个参考基下进行。显然，在不同的参考基上考察同一个矢量的变化结果将不同。因此在定义矢量对时间的导数时需表明引入考察的参考基。现在某一参考基 $\vec{e}^r$ 上考察一个矢量 $\vec{a}$。定义 $\frac{{}^r\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a})$ 为矢量 $\vec{a}$ 在参考基 $\vec{e}^r$ 上对时间的导数。

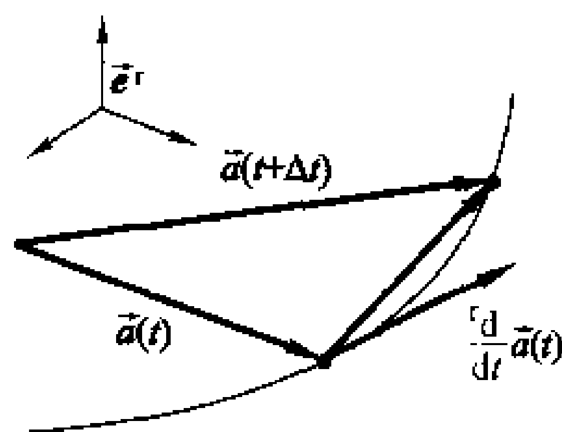


图 1-4　矢量对时间的导数

在基 $\vec{e}^r$ 上考察它自身的三个基矢量 $\vec{e}_i^r (i=1,2,3)$，显然在该基上它们不随时间变化，有

$$\frac{{}^r\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_i^r=\vec{0}\qquad (i=1,2,3)$$

将矩阵对时间导数的表达式(1.1-33)推广到矢量阵，故上式可简写为如下矩阵表达式：

$$\frac{{}^r\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\vec{e}}^r=\boldsymbol{\vec{0}},\quad \frac{{}^r\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\vec{e}}^{r\mathrm{T}}=\boldsymbol{\vec{0}}^{\mathrm{T}} \tag{1.2-37}$$

由式(1.2-32)与(1.1-36)，且考虑到上式有

$$\frac{{}^r\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}=\boldsymbol{a}^{r\mathrm{T}}\left(\frac{{}^r\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\vec{e}}^r\right)+\left(\frac{{}^r\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}^{r\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\vec{e}}^r=\dot{\boldsymbol{a}}^{r\mathrm{T}}\boldsymbol{\vec{e}}^r \tag{1.2-38}$$

同理，由式(1.2-32′)有

$$\frac{{}^r\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}=\boldsymbol{\vec{e}}^{r\mathrm{T}}\left(\frac{{}^r\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}^r\right)=\boldsymbol{\vec{e}}^{r\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{a}}^r \tag{1.2-38′}$$

由此可得到如下结论：矢量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}^r$ 上对时间的导数为一矢量，它在该基的坐标阵等于矢量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}^r$ 的坐标阵对时间的导数。

显然,对于标量 α,对时间求导的左上标 r 无意义,即 $\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha = \dot{\alpha}$。对于矢量求导,如果所定义的参考基 $\vec{e}^{\mathrm{r}}$ 为公认或在约定的情况下,为了书写方便有时矢量求导的表达式也作如下的简写,即 $\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \dot{\vec{a}}$。读者应该注意识别。

由矢量对时间导数的定义与矩阵对时间导数的公式,不难得到表 1.2-2 所列的对照关系式。例如,对于表 1.2-2 第一行的左列,考虑到式(1.2-38′),其左边可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\vec{a}) = \vec{e}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\boldsymbol{a})$$

考虑到式(1.2-32′)与(1.2-38′),其右边为

$$\dot{\alpha}\vec{a} + \alpha\dot{\vec{a}} = \dot{\alpha}\vec{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} + \alpha\vec{e}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{a}} = \vec{e}^{\mathrm{T}}(\dot{\alpha}\boldsymbol{a} + \alpha\dot{\boldsymbol{a}})$$

将以上两式代入表 1.2-2 第一行的左列,考虑到同一基下坐标阵相等,可得到相应的矩阵式如表 1.2-2 第一行的右列。读者不难类似推导表中后 3 行的对应关系。表中最后一行的推导,用到了如下关系式:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{a}}} = \tilde{\dot{\boldsymbol{a}}} \tag{1.2-39}$$

读者不难对其进行证明。

表 1.2-2 矢量对时间导数运算与同一基下坐标阵运算的关系

矢量运算式	坐标阵运算式
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\vec{a}) = \dot{\alpha}\vec{a} - \alpha\dot{\vec{a}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\boldsymbol{a}) = \dot{\alpha}\boldsymbol{a} + \alpha\dot{\boldsymbol{a}}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a} + \vec{b}) = \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - \dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{b}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}}\vec{b} + \vec{a}\dot{\vec{b}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}) = \dot{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}) = \dot{\tilde{\boldsymbol{a}}}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{b}}$

[例 1.2-4] 求如下矢量在基 $\vec{e}^{\mathrm{r}}$ 上对时间的导数:

$$\vec{a} = (\sin t)\vec{e}_1^{\mathrm{r}} + (\cos 2t)\vec{e}_2^{\mathrm{r}} + (3t)\vec{e}_3^{\mathrm{r}}$$

解: 矢量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}^{\mathrm{r}}$ 的坐标阵为

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{r}} = (\sin t \quad \cos 2t \quad 3t)^{\mathrm{T}}$$

由式(1.2-38′),该矢量在基 $\vec{e}^{\mathrm{r}}$ 上对时间的导数为

$$\frac{{}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = \dot{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{rT}}\vec{e}^{\mathrm{r}} = (\cos t \quad -2\sin 2t \quad 3)\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\mathrm{r}} \\ \vec{e}_2^{\mathrm{r}} \\ \vec{e}_3^{\mathrm{r}}\end{pmatrix} = (\cos t)\vec{e}_1^{\mathrm{r}} - (2\sin 2t)\vec{e}_2^{\mathrm{r}} + 3\vec{e}_3^{\mathrm{r}}$$

或直接对矢量求导,考虑到式(1.2-37),有

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}=\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\sin t)\vec{e}_1^{\,r}]+\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\cos 2t)\vec{e}_2^{\,r}]+\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(3t)\vec{e}_3^{\,r}]$$
$$=(\cos t)\vec{e}_1^{\,r}-(2\sin 2t)\vec{e}_2^{\,r}+3\vec{e}_3^{\,r}$$

1.3 方向余弦阵

如前所述，矢量的坐标阵与矢量基有关。对于两个不同的矢量基 $\vec{e}^{r}$ 与 $\vec{e}^{b}$，同一个矢量 $\vec{a}$ 分别有两个坐标阵 $\boldsymbol{a}^{r}$ 与 $\boldsymbol{a}^{b}$[见式(1.2－32)]，它们之间应存在一定的关系。在讨论此关系前，需先引入方向余弦阵的概念。

对于两个不同的矢量基 $\vec{e}^{r}$ 与 $\vec{e}^{b}$，即

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{r}=(\vec{e}_1^{\,r}\quad \vec{e}_2^{\,r}\quad \vec{e}_3^{\,r})^{\mathrm{T}},\quad \vec{\boldsymbol{e}}^{b}=(\vec{e}_1^{\,b}\quad \vec{e}_2^{\,b}\quad \vec{e}_3^{\,b})^{\mathrm{T}} \tag{1.3-1}$$

定义以下 3×3 方阵为基 $\vec{e}^{b}$ 相对于基 $\vec{e}^{r}$ 的**方向余弦阵**：

$$\boldsymbol{A}^{rb}=\vec{\boldsymbol{e}}^{r}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}^{b\mathrm{T}} \tag{1.3-2}$$

如果所定义的参考基 $\vec{e}^{r}$ 为公认或在约定的情况下，方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{rb}$ 有时可简写为 $\boldsymbol{A}^{b}$ 或 $\boldsymbol{A}$。展开式(1.3－2)有

$$\boldsymbol{A}^{rb}\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,r}\cdot\vec{e}_1^{\,b} & \vec{e}_1^{\,r}\cdot\vec{e}_2^{\,b} & \vec{e}_1^{\,r}\cdot\vec{e}_3^{\,b}\\ \vec{e}_2^{\,r}\cdot\vec{e}_1^{\,b} & \vec{e}_2^{\,r}\cdot\vec{e}_2^{\,b} & \vec{e}_2^{\,r}\cdot\vec{e}_3^{\,b}\\ \vec{e}_3^{\,r}\cdot\vec{e}_1^{\,b} & \vec{e}_3^{\,r}\cdot\vec{e}_2^{\,b} & \vec{e}_3^{\,r}\cdot\vec{e}_3^{\,b}\end{bmatrix} \tag{1.3-3}$$

可见方向余弦阵的元素为两个基的基矢量的点积，又由式(1.2－6)，这些点积为单位矢量夹角的余弦，这也就是将矩阵 $\boldsymbol{A}^{rb}$ 称为方向余弦阵的原因。此外，根据式(1.2－29)，由式(1.3－3)不难看出，方向余弦阵的三列 $\boldsymbol{A}_j=(A_{1j}\quad A_{2j}\quad A_{3j})^{\mathrm{T}}(j=1,2,3)$ 依次为基 $\vec{e}^{b}$ 的基矢量 $\vec{e}_j^{\,b}(j=1,2,3)$ 在 $\vec{e}^{r}$ 上的坐标阵。其三行构成的列阵 $\boldsymbol{A}_i=(A_{i1}\quad A_{i2}\quad A_{i3})^{\mathrm{T}}(i=1,2,3)$ 依次为基 $\vec{e}^{r}$ 的基矢量 $\vec{e}_i^{\,r}(i=1,2,3)$ 在 $\vec{e}^{b}$ 的坐标阵。对照式(1.2－26)，上述关系可用如下矩阵式表示：

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,r}\\ \vec{e}_2^{\,r}\\ \vec{e}_3^{\,r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,b}\\ \vec{e}_2^{\,b}\\ \vec{e}_3^{\,b}\end{bmatrix} \tag{1.3-4}$$

对照方向余弦阵的定义式(1.3－3)，上式可简写为

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{r}=\boldsymbol{A}^{rb}\vec{\boldsymbol{e}}^{b} \tag{1.3-4'}$$

同理，有

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{b}=(\boldsymbol{A}^{rb})^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}}^{r} \tag{1.3-5}$$

据此，在已知某基的基矢量在另一基的坐标阵的情况下，可直接写出两基的方向余弦阵。例如，已知基 $\vec{e}^{b}$ 的基矢量 $\vec{e}_1^{\,b},\vec{e}_2^{\,b},\vec{e}_3^{\,b}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 的坐标阵分别为

$$\vec{e}_1^{\,b}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}^{r}=(0.338\quad 0.429\quad 0.838)^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{e}_2^{\,b}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}=(-0.191\quad 0.902\quad -0.387)^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{e}_3^{\,b}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{r}}=(-0.922\quad -0.293\quad 0.387)^{\mathrm{T}}$$

则基 $\vec{e}^{\,b}$关于基 $\vec{e}^{\,r}$的方向余弦阵为

$$\boldsymbol{A}^{rb}=\begin{pmatrix}0.338 & -0.191 & -0.922\\ 0.429 & 0.902 & -0.293\\ 0.838 & -0.387 & 0.387\end{pmatrix}$$

既然 $\boldsymbol{A}_j=(A_{1j},A_{2j},A_{3j})^{\mathrm{T}}(j=1,2,3)$为基矢量 $\vec{e}_j^{\,b}$ 在$\vec{e}^{\,r}$上的坐标阵,由式(1.2-19)与(1.2-20)可得到如下 9 个关系式:

$$\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_j=A_{1j}^2+A_{2j}^2+A_{3j}^2=1\qquad(j=1,2,3)\tag{1.3-6a}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2&=A_{11}A_{12}+A_{21}A_{22}+A_{31}A_{32}=0\\ \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_3&=A_{12}A_{13}+A_{22}A_{23}+A_{32}A_{33}=0\\ \boldsymbol{A}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1&=A_{13}A_{11}+A_{23}A_{21}+A_{33}A_{31}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.3-6b}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}A_{21}A_{32}-A_{31}A_{22}\\ A_{31}A_{12}-A_{11}A_{32}\\ A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_3\tag{1.3-6c}$$

由于式(1.3-6b)描述三个基矢量正交,式(1.3-6c)表示三个基矢量依次右旋正交,这 6 个式子只有 3 个独立,加上式(1.3-6a)的 3 个式子,这样方向余弦阵中的 9 个量有 6 个独立的关系式,由此可知,9 个方向余弦矩阵的元素中只有 3 个是独立的。

方向余弦阵有如下一些性质:

(1) 基 $\vec{e}^{\,b}$关于基 $\vec{e}^{\,r}$的方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{rb}$和基 $\vec{e}^{\,r}$关于基 $\vec{e}^{\,b}$的方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{br}$互为转置。

事实上,将式(1.3-2)两边转置,考虑到定义式(1.3-2),即可得到本性质,其表达式为

$$(\boldsymbol{A}^{rb})^{\mathrm{T}}=\vec{\boldsymbol{e}}^{\,b}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}^{\,r\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{br}\tag{1.3-7}$$

(2) 当两个基的基矢量的两两方向一致,则它们的方向余弦阵为三阶单位阵。

事实上,由式(1.3-2)与(1.2-24)不难得到本性质的表达式为

$$\boldsymbol{A}^{rr}=\boldsymbol{I}_3\tag{1.3-8}$$

(3) 若有三个基 $\vec{e}^{\,r}$,$\vec{e}^{\,b}$与 $\vec{e}^{\,s}$,其中 $\vec{e}^{\,s}$相对于 $\vec{e}^{\,r}$和 $\vec{e}^{\,b}$相对于 $\vec{e}^{\,s}$的方向余弦阵分别为 $\boldsymbol{A}^{rs}$与 $\boldsymbol{A}^{sb}$,有

$$\boldsymbol{A}^{rb}=\boldsymbol{A}^{rs}\boldsymbol{A}^{sb}\tag{1.3-9}$$

事实上,由式(1.3-4),有

$$\vec{\boldsymbol{e}}^{\,r}=\boldsymbol{A}^{rs}\vec{\boldsymbol{e}}^{\,s}=\boldsymbol{A}^{rs}\boldsymbol{A}^{sb}\vec{\boldsymbol{e}}^{\,b}$$

与式(1.3-4)比较可得式(1.3-9)。读者可根据上标的排列记住上述关系。此关系可推广到有限个基的方向余弦阵转换。

(4) 方向余弦阵是一正交阵。

事实上,作为式(1.3-9)特殊情况,考虑到式(1.3-7)与(1.3-8),有

$$\boldsymbol{A}^{rr} = \boldsymbol{A}^{rb}\boldsymbol{A}^{br} = \boldsymbol{A}^{rb}(\boldsymbol{A}^{rb})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_3$$

故有本性质,即

$$(\boldsymbol{A}^{rb})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{rb})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{br} \tag{1.3-10}$$

(5) 不同基下矢量坐标阵间的关系式为

$$\boldsymbol{a}^{r} = \boldsymbol{A}^{rb}\boldsymbol{a}^{b} \tag{1.3-11}$$

事实上,对于矢量 $\boldsymbol{a}$,由式(1.2-29)与(1.2-28)有

$$\boldsymbol{a}^{r} = \vec{\boldsymbol{e}}^{r}\cdot\vec{a} = \vec{\boldsymbol{e}}^{r}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}^{b\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{b}$$

根据定义式(1.3-2)即可得式(1.3-11)。

(6) 不同基下矢量坐标方阵间的关系式为

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{r} = \boldsymbol{A}^{rb}\tilde{\boldsymbol{a}}^{b}\boldsymbol{A}^{br} \tag{1.3-12}$$

请读者注意坐标阵与坐标方阵变换式(1.3-11)与(1.3-12)的差别。事实上,如果引入任意矢量 $\vec{b}$,考虑到表 1.2-1 与上式,矢量式 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 在基$\vec{\boldsymbol{e}}^{b}$与$\vec{\boldsymbol{e}}^{r}$下的坐标式分别可表为

$$\boldsymbol{c}^{b} = \tilde{\boldsymbol{a}}^{b}\tilde{\boldsymbol{b}}^{b} = \tilde{\boldsymbol{a}}^{b}\boldsymbol{A}^{br}\boldsymbol{b}^{r},\ \boldsymbol{c}^{r} = \tilde{\boldsymbol{a}}^{r}\boldsymbol{b}^{r}$$

由式(1.3-11)有,$c^{b}=A^{br}c^{r}$,将以上两式代入,经整理有

$$\boldsymbol{A}^{br}\tilde{\boldsymbol{a}}^{r}\boldsymbol{b}^{r} = \tilde{\boldsymbol{a}}^{b}\boldsymbol{A}^{br}\boldsymbol{b}^{r}$$

考虑到矢量 $\vec{b}$ 的任意性,两边乘 $\boldsymbol{A}^{rb}$,考虑到性质(4)即可得式(1.3-12)。

(7) 方向余弦阵的行列式等于1,即

$$\det \boldsymbol{A}^{rb} = 1 \tag{1.3-13}$$

事实上,考虑到 $\boldsymbol{A}_j=(A_{1j}\quad A_{2j}\quad A_{3j})^{\mathrm{T}}$ $(j=1,2,3)$为基矢量 $\vec{e}_j^{b}$ 在$\vec{\boldsymbol{e}}^{r}$上的坐标阵,由行列式定义与表 1.2-1,不难验证,

$$\det \boldsymbol{A}^{rb} = A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{32} \\ A_{23} & A_{33}\end{vmatrix} + A_{21}\begin{vmatrix} A_{32} & A_{12} \\ A_{33} & A_{13}\end{vmatrix} + A_{31}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23}\end{vmatrix}$$

考虑到

$$\vec{e}_1^{b} = A_{11}\vec{e}_1^{r} + A_{21}\vec{e}_2^{r} + A_{31}\vec{e}_3^{r}$$

$$\vec{e}_2^{b}\times\vec{e}_3^{b} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{32} \\ A_{23} & A_{33}\end{vmatrix}\vec{e}_1^{r} + \begin{vmatrix} A_{32} & A_{12} \\ A_{33} & A_{13}\end{vmatrix}\vec{e}_2^{r} + \begin{vmatrix} A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23}\end{vmatrix}\vec{e}_3^{r}$$

上式可表示为

$$\det \boldsymbol{A}^{rb} = \vec{e}_1^{b}\cdot(\vec{e}_2^{b}\times\vec{e}_3^{b})$$

又考虑到 $\vec{e}_1^{b}=\vec{e}_2^{b}\times\vec{e}_3^{b}$,代入上式可得式(1.3-13)。

(8) 对于如下方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{rb}$ 的本征根方程，至少存在一个 $\lambda=1$ 的根为

$$|\boldsymbol{A}^{rb}-\lambda\boldsymbol{I}|=0 \tag{1.3-14}$$

事实上，展开上式有

$$|\boldsymbol{A}^{rb}-\lambda\boldsymbol{I}|=\lambda^3-\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}\lambda^2+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}\lambda-1=0$$

将 $\lambda=1$ 代入，满足方程。

(9) 任意两个基总存在一个矢量，它在两个基的坐标阵相等。

事实上，将本征根 $\lambda=1$ 的本征矢量记为 $\vec{p}$，在基 $\vec{e}^b$ 的坐标阵为 $\boldsymbol{p}^b$，代入本征方程，有 $(\boldsymbol{A}^{rb}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{p}^b=0$。展开得 $\boldsymbol{p}^b=\boldsymbol{A}^{rb}\boldsymbol{p}^b$，考虑到(1.3-11)，有 $\boldsymbol{p}^b=\boldsymbol{p}^r$，由此可得到本性质。

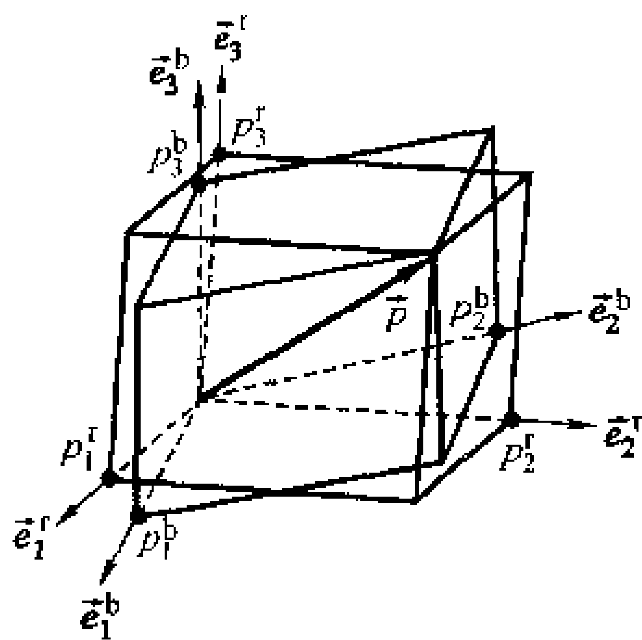


图1-5 两个基的一次转动矢量坐标阵

如图1-5所示，对于基 $\vec{e}^r$ 与基 $\vec{e}^b$，方向余弦阵已知，它的本征根为1的本征矢量 $\vec{p}$ 一定存在。因此由 $\boldsymbol{p}^b=\boldsymbol{p}^r$ 可推知，$p_i^b=p_i^r(i=1,2,3)$。即与矢量 $\vec{p}$ 平行的任意矢量在两个基上的坐标阵定相等。从另外一个角度讲，上述性质可理解为将矢量 $\vec{p}$ 作为一个旋转轴，基 $\vec{e}^b$ 是基 $\vec{e}^r$ 绕矢量 $\vec{p}$ 转过一个有限角度后到达的新的位置。所以上述性质与如下结论一致：

对于任意两个基总存在一个矢量，绕该矢量转过一个有限角度总可从其中一个基到达另一个基。该矢量称为**一次转动矢量**。

1.4 平面矢量

在理论力学中经常遇到这样一类问题，即描述运动学或动力学的矢量及其变化过程均在某一参考平面内。为了数学表达简洁起见，引入平面矢量的概念。

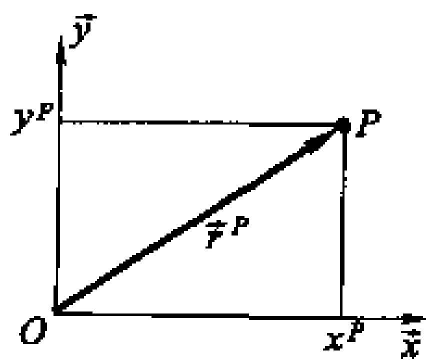


图1-6 平面矢量

定义一参考平面空间，用一个二维的矢量基描述，即 $\vec{e}=(\vec{x}\quad\vec{y})^{\mathrm{T}}$，其中 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 为基矢量，基点为 O(见图1-6)。该参考平面的法线方向记为 $\vec{z}=\vec{x}\times\vec{y}$。参考平面内的任意点 P 的矢径 $\vec{r}^P$ 为该平面内的矢量，称为**平面矢量**。它在参考基 $\vec{e}$ 的坐标阵 $\boldsymbol{r}^P$ 可用二维的标量坐标阵描述，即 $\boldsymbol{r}^P=(x^P\quad y^P)^{\mathrm{T}}$。作为基矢量 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$，它们的坐标阵分别为 $\boldsymbol{x}=(1\quad 0)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{y}=(0\quad 1)^{\mathrm{T}}$。

平面矢量 $\vec{r}^P$ 与其二维坐标阵 $\boldsymbol{r}^P$ 的关系仍可写为

$$\vec{r}^P = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^P = \boldsymbol{r}^{P\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}} = x^P\vec{x} + y^P\vec{y} \tag{1.4-1}$$

令任意两个平面矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，它们的坐标阵分别为 $\boldsymbol{a}=(a_x \quad a_y)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{b}=(b_x \quad b_y)^{\mathrm{T}}$，如下平面矢量运算和对应的同一基下的二维矩阵的运算成立：

$$\vec{c}=\alpha\vec{a} \qquad \boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a} \tag{1.4-2}$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} \qquad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \tag{1.4-3}$$

$$\alpha=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \qquad c=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} \tag{1.4-4}$$

式中：α 为一标量，$\vec{c}$ 为平面矢量。

然而，对于叉积 $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$，按定义（见图 1-1b）它是一个垂直参考平面的矢量，其模为

$$d = a_x b_y - a_y b_x = (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{1.4-5}$$

式中

$$\tilde{\boldsymbol{I}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4-6}$$

这样矢量 $\vec{d}$ 可写为

$$\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b} = (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\vec{z} \tag{1.4-7}$$

考虑法矢量 $\vec{z}$ 与平面矢量 $\vec{a}$ 的叉积，按定义它是一平面矢量，其模与矢量 $\vec{a}$ 相同，方向垂直于矢量 $\vec{a}$，记为 $\hat{\vec{a}}$（见图 1-7），即

$$\hat{\vec{a}} = \vec{z}\times\vec{a} = -a_y\vec{x} + a_x\vec{y} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{a}}$$

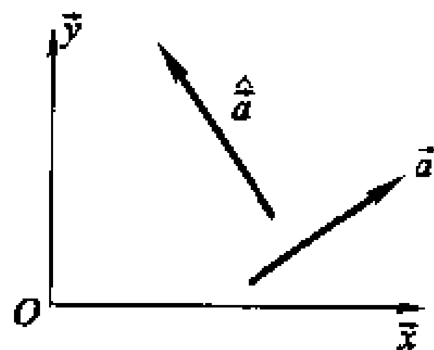


图 1-7 矢量 $\vec{a}$ 与 $\hat{\vec{a}}$ 的关系

利用式(1.4-6)，可得矢量 $\hat{\vec{a}}$ 与 $\vec{a}$ 的坐标阵间的关系为

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{a} \tag{1.4-8}$$

可见，2×2 阶矩阵 $\tilde{\boldsymbol{I}}$ 在描述平面运动的矩阵表达式中很有用。不难验证，此矩阵有如下性质：

$$\tilde{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{T}} = -\tilde{\boldsymbol{I}},\ \tilde{\boldsymbol{I}}\tilde{\boldsymbol{I}} = -\boldsymbol{I},\ \tilde{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{I}} = \tilde{\boldsymbol{I}}\tilde{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \tag{1.4-9}$$

如图 1-8 所示，如果在平面上有两个基：$\vec{\boldsymbol{e}}^r=(\vec{x}^r \quad \vec{y}^r)^{\mathrm{T}}$ 与 $\vec{\boldsymbol{e}}^b=(\vec{x}^b \quad \vec{y}^b)^{\mathrm{T}}$，基点分别为 O 与 C。两基的第三个基矢量均为平面的法向单位矢量 $\vec{z}$。基 $\vec{\boldsymbol{e}}^b$ 关于基 $\vec{\boldsymbol{e}}^r$ 的方向余弦阵可用一个 2×2 的标量阵来描述

$$\boldsymbol{A}^{rb} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

式中：列阵 $\boldsymbol{a}_1=(A_{11} \quad A_{21})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{a}_2=(A_{12} \quad A_{22})^{\mathrm{T}}$ 分别为基矢量 $\vec{x}^b$ 与 $\vec{y}^b$ 在参

考基 $\vec{e}^{r}$ 的坐标阵;行阵的转置 $\boldsymbol{b}_1=(A_{11}\quad A_{12})^{T}$ 与 $\boldsymbol{b}_2=(A_{21}\quad A_{22})^{T}$ 分别为基矢量 $\vec{x}^{r}$ 与 $\vec{y}^{r}$ 在参考基 $\vec{e}^{b}$ 的坐标阵。如果定义角 φ 为参考基 $\vec{e}^{r}$ 的基矢量 $\vec{x}^{r}$ 与基 $\vec{e}^{b}$ 的基矢量 $\vec{x}^{b}$ 的夹角,且以绕 $\vec{z}$ 的正向转动为正(见图 1-8),则两基的方向余弦阵为

$$A^{rb}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\quad(1.4-10)$$

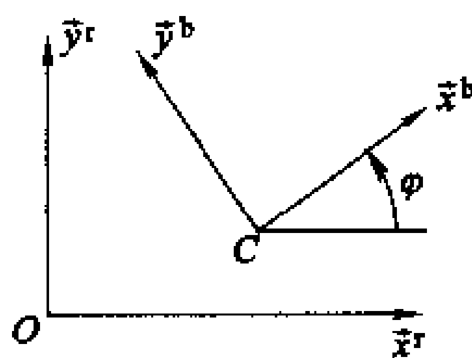


图 1-8 两平面基的关系

上式对时间求导,考虑到式(1.4-6),有

$$\dot{A}^{rb}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & -\sin\varphi\end{pmatrix}\dot{\varphi}=\tilde{I}A^{rb}\dot{\varphi}\qquad(1.4-11)$$

最后,读者不难验证,方阵 $\tilde{I}$ 与方向余弦阵的乘积有如下的性质:

$$A\tilde{I}=\tilde{I}A,\ A^{T}\tilde{I}=\tilde{I}A^{T}\qquad(1.4-12)$$

习 题

1-1 在下列向量组中的哪一个是线性无关的?

(1) $(1\quad 1\quad 1)^{T},(1\quad 1\quad 0)^{T},(1\quad 0\quad 0)^{T}$;

(2) $(1\quad 0\quad 1)^{T},(0\quad 1\quad 0)^{T}$;

(3) $(1\quad 2\quad 4)^{T},(2\quad 1\quad 3)^{T},(4\quad -1\quad 1)^{T}$。

1-2 求下列方阵的秩:

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$; (2) $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}$

1-3 证明以下方阵为正交阵(其中,$S\varphi=\sin\varphi,C\varphi=\cos\varphi$):

$$A=\begin{pmatrix}C\varphi & -S\varphi\\ S\varphi & C\varphi\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}C\varphi & 0 & S\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -S\varphi & 0 & C\varphi\end{pmatrix}$$

1-4 对于坐标阵 $\boldsymbol{a}=(a_1\quad a_2\quad a_3)^{T}$,令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}\quad\tilde{\boldsymbol{a}})$,问在什么条件下 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{T}$ 为正交阵?

1-5 令 $\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}2x-3xy+y^2-xz+yz^2-4xyz\\ -x^2+xy^2-2y+5yz-xz^2\end{bmatrix}$,

若 $\boldsymbol{q}=(x\quad y\quad z)^{T}$,求 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 与 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}$,且证明 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}$。

1-6 已知基 $\vec{e}$ 的基矢量为 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$,计算 $\vec{e}^{T}\cdot\vec{e}$、$\vec{e}\cdot\vec{e}^{T}$,$\vec{e}^{T}\times\vec{e}$,$\vec{e}\times\vec{e}^{T}$。

1-7 令矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 在某基下的坐标阵分别为 $\boldsymbol{a}=(1\quad 2\quad -1)^{T}$ 与 $\boldsymbol{b}=(2\quad -1\quad 1)^{T}$。

求以下矢量运算结果在该基下的坐标阵：$\vec{a}+\vec{b}$，　$\vec{a}\cdot\vec{b}$，　$\alpha\vec{a}$，　$\vec{a}\times\vec{b}$，$(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{a}$。

1－8　写出以下矢量运算式对应的坐标运算式：

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}),(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{d}\times\vec{a})+(\vec{c}\times\vec{d})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})。$$

1－9　已知矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 在基 $\vec{e}^r$ 的坐标阵与坐标方阵分别为 $\boldsymbol{a}^r,\boldsymbol{b}^r,\tilde{\boldsymbol{a}}^r$ 与 $\tilde{\boldsymbol{b}}^r$；矢量 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 在基 $\vec{e}^b$ 的坐标阵与坐标方阵分别为 $\boldsymbol{c}^b,\boldsymbol{d}^b,\tilde{\boldsymbol{c}}^b$ 与 $\tilde{\boldsymbol{d}}^b$；基 $\vec{e}^b$ 关于基 $\vec{e}^r$ 的方向余弦阵为 $\boldsymbol{A}^{rb}$。写出以下矢量运算式在基 $\vec{e}^b$ 下相应的坐标运算式：

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}),(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{d}\times\vec{a})+(\vec{c}\times\vec{d})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})。$$

1－10　由基 $\vec{e}^0$ 到达基 $\vec{e}^3$ 是通过三次连续绕如题图所示的基矢量转过有限角 α,β 与 γ。试写出方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{03}$ 关于这些角的表达式，且写出基矢量 $\vec{e}_1^3$ 在基 $\vec{e}^0$ 上的坐标阵。

$$\vec{e}^0\xrightarrow[\alpha]{\vec{e}_1^0}\vec{e}^1\xrightarrow[\beta]{\vec{e}_2^1}\vec{e}^2\xrightarrow[\gamma]{\vec{e}_3^2}\vec{e}^3$$

题 1－10 图

1－11　由 $\vec{e}^0$ 到达基 $\vec{e}^3$ 是通过三次连续绕如题图所示的基矢量转过有限角 ψ,θ 与 φ。试写出方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{03}$ 关于这些角的表达式，且写出基矢量 $\vec{e}_1^3$ 在基 $\vec{e}^0$ 上的坐标阵。

$$\vec{e}^0\xrightarrow[\psi]{\vec{e}_3^0}\vec{e}^1\xrightarrow[\theta]{\vec{e}_1^1}\vec{e}^2\xrightarrow[\varphi]{\vec{e}_3^2}\vec{e}^3$$

题 1－11 图

1－12　已知两矢径 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相互垂直，它们在基 $\vec{e}^b$ 与 $\vec{e}^r$ 的坐标阵分别为 $\boldsymbol{a}^r=(1\quad 0\quad 1)^T,\boldsymbol{b}^r=(-1\quad 1\quad 1)^T,\boldsymbol{a}^b=(0\quad 1\quad -1)^T,\boldsymbol{b}^b=(1\quad 1\quad 1)^T$。求基 $\vec{e}^b$ 关于基 $\vec{e}^r$ 的方向余弦阵 $\boldsymbol{A}^{rb}$。

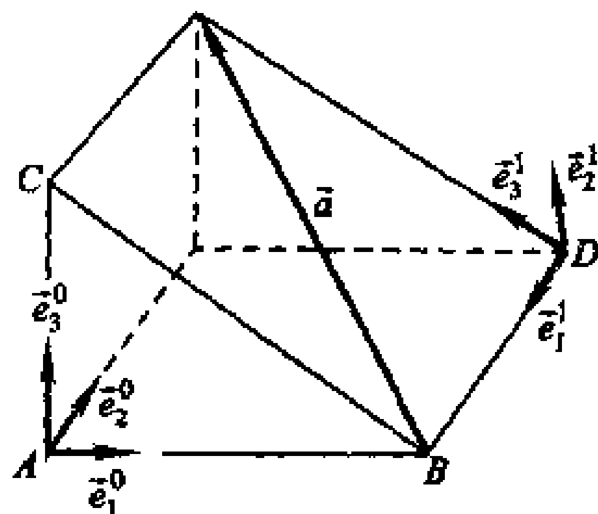
1－13　图示一正方体在一面的对角线上斜剖后形成的四面体，$AB=AC=BD=1$。图中给出了两个基 $\vec{e}^0$ 与 $\vec{e}^1$。写出：

(1) 基 $\vec{e}^0$ 关于基 $\vec{e}^1$ 的方向余弦阵；

(2) 写出矢量 $\vec{a}$ 在两个基上的坐标阵；

(3) 验证 $\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{A}^{01}\boldsymbol{a}^1$。

1－14　试找到题 1－13 中两个基的一次转动矢量 $\vec{p}$ 在基 $\vec{e}^1$ 的坐标阵 $\boldsymbol{p}^1$，且验证 $\boldsymbol{p}^0=\boldsymbol{p}^1$。



题 1－13 图

第2章　运动学

物体的运动是指物体在空间中的位置与姿态随时间的变化过程。在不同的参考物上考察同一个物体的运动，结果是不同的。因此在描述物体的运动时，需要指出是相对哪个参考物。

与动力学不同，在运动学中研究物体的运动并不考虑引起物体运动的原因。也就是说运动学是从几何学上研究物体的运动，只涉及空间与时间两个概念。

运动学是学习动力学的基础。然而运动学本身可直接应用于机械运动的分析。

本章首先介绍刚体运动学。在此基础上介绍固结在刚体上的点的运动与刚体运动间的关系。最后介绍相对刚体运动的点的运动学，通过这方面内容的学习进一步可得到刚体系运动学的关系。

2.1　刚体的连体基　刚体位形的描述

在运动过程中物体内任意两点的距离保持不变的物体称为**刚体**。

以刚体上一点 C 为原点构造一个正交坐标系与该刚体相固结，称此坐标系为该刚体的**连体基**，记为 $\vec{e}^b=(\vec{x}^b\quad \vec{y}^b\quad \vec{z}^b)^T$。坐标系的原点 C 称为**基点**(图 2-1)。连体基的位置与姿态的参考对象或为“绝对”空间，或为与其邻接的其他刚体。在数学上也可用固结于“绝对”空间坐标系或邻接刚体的连体基来表示，这个参考基记为 $\vec{e}^r=(\vec{x}^r\quad \vec{y}^r\quad \vec{z}^r)^T$，基点为 O。

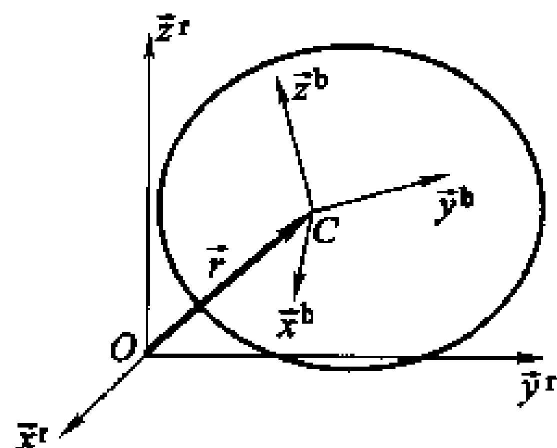


图 2-1　刚体的连体基及其位形

刚体在参考基 $\vec{e}^r$ 上的位置与姿态称为刚体关于参考基 $\vec{e}^r$ 的**位形**。从几何上可知，如果刚体的位形已知，那么刚体上任意点的位置完全确定(详细介绍见 2.4)。由于刚体位形与该刚体连体基 $\vec{e}^b$ 的位形一致，因此只要实现对刚体连体基 $\vec{e}^b$ 位形的描述，即达到了对该刚体位形描述的目的。

连体基 $\vec{e}^b$ 的位形有两个要素，即基点 C 在参考基 $\vec{e}^r$ 的位置，与 $\vec{e}^b$ 在参考基 $\vec{e}^r$ 上的姿态。前者可利用 $\vec{e}^b$ 的基点 C 关于 $\vec{e}^r$ 基点 O 的矢径 $\vec{r}$ 来描述(见图

2-1)。$\vec{r}$ 在参考基 $\vec{e}^{r}$ 的坐标阵为 $\boldsymbol{r}=(x \quad y \quad z)^{T}$，其中标量 x, y 与 z 称为基点 C 在参考基 $\vec{e}^{r}$ 上的坐标。连体基 $\vec{e}^{b}$ 在参考基 $\vec{e}^{r}$ 上的姿态的描述有多种多样，但最基本的是用基 $\vec{e}^{b}$ 相对于基 $\vec{e}^{r}$ 的方向余弦阵(即 $\boldsymbol{A}^{rb}$)来描述。

在刚体运动的过程中，如果刚体内部任意点与某固定的参考平面的距离始终保持不变，那么称此运动为**刚体的平面运动**。例如，车辆在作直线运行时，其车身与车轮均作平面运动。

如图 2-2 所示，令固定的参考平面为 S_0，沿该平面的垂直方向，将刚体向该平面作投影，得到该刚体的一个外形一定的投影面(图中的阴影区)。刚体在作平面运动时，该投影面形状不变，且这“刚性”投影面在参考平面为 S_0 上作相应的运动。刚体上任意一条与参考平面 S_0 垂直的直线与该投影面均有一交点(图中的点 Q)。显然，在刚体作平面运动的过程中，刚体在此直线上的所有点的运动与该交点 Q 的运动一致。因此在研究刚体平面运动时，可以将刚体的刚性投影面为研究对象，而且只需在参考平面为 S_0 的二维空间中进行分析。为了叙述简洁，下面将该刚体的刚性投影面简称为刚体。

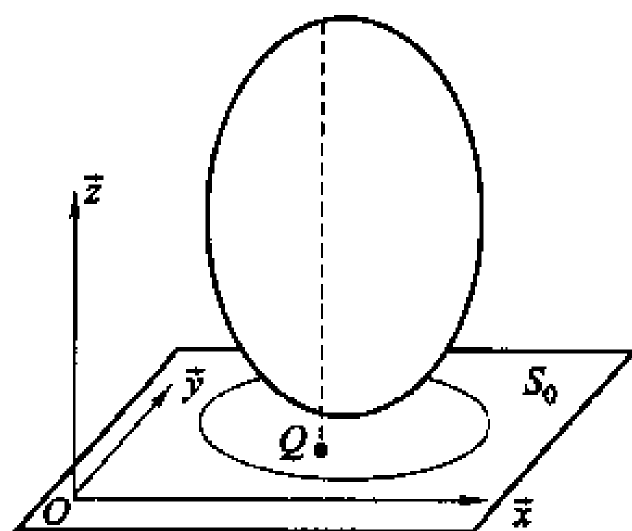


图 2-2 刚体的平面运动

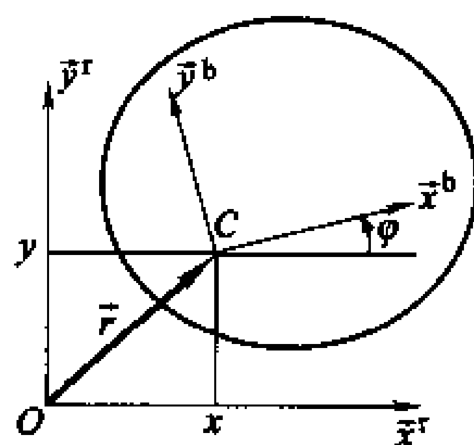


图 2-3 刚体的连体基及其位形

根据刚体平面运动的特点，可将以刚体上一点 C 为基点的连体基的一个基矢量与以基点 O 构造一参考基的一个基矢量始终保持平行，令 $\vec{z}=\vec{z}^{r}=\vec{z}^{b}$。这样两个基只需用二维的基来描述，分别记为 $\vec{e}^{b}=(\vec{x}^{b} \quad \vec{y}^{b})^{T}$ 与 $\vec{e}^{r}=(\vec{x}^{r} \quad \vec{y}^{r})^{T}$。基点 C 关于 $\vec{e}^{r}$ 基点 O 的矢径 $\vec{r}$(见图 2-3)在参考基 $\vec{e}^{r}$ 坐标阵为 $\boldsymbol{r}=(x \quad y)^{T}$，基点 C 在参考基 $\vec{e}^{r}$ 的坐标为 x 与 y。定义连体基 $\vec{e}^{b}$ 的基矢量 $\vec{x}^{b}$ 与参考基 $\vec{e}^{r}$ 的基矢量 $\vec{x}^{r}$ 的夹角为 φ，且以基矢量 $\vec{x}^{b}$ 逆时针方向旋转为正。这样连体基 $\vec{e}^{b}$ 相对于参考基 $\vec{e}^{r}$ 的方向余弦阵为

$$\boldsymbol{A}^{rb}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \tag{2.1-1}$$

可见，夹角为 φ 确定了连体基相对于参考基的姿态，故称此角为连体基的**姿态**

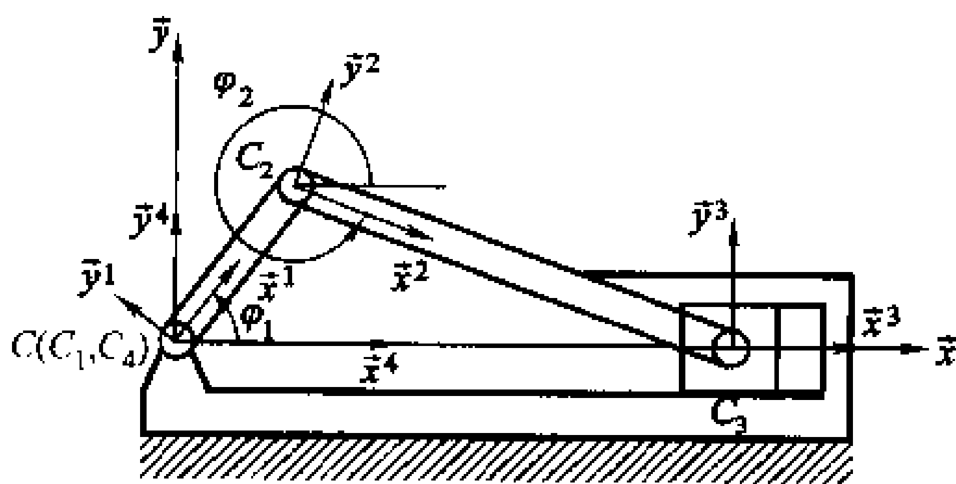
角。这样连体基的基点坐标与姿态角三个标量完全能描述连体基(即刚体)的位形。定义列阵

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \quad \varphi)^{\mathrm{T}} = (x \quad y \quad \varphi)^{\mathrm{T}} \tag{2.1-2}$$

为刚体的**位形坐标阵**,或简称刚体的**坐标阵**。

[例 2.1-1] 图示曲柄-滑块机构,由机座、曲柄、连杆与滑块四个构件组成。令曲柄与连杆的长度分别为 0.5 m 与 2 m,当曲柄与水平的夹角为 45°时确定四个构件的位形与它们关于公共基的方向余弦阵。

解: 首先对四个构件进行编号。分别定义曲柄、连杆、滑块与机座为刚体 1,2,3 与 4,分别记为 B_1,B_2,B_3 与 B_4。接着为每一个刚体定义连体基。对于曲柄 B_1,在与机座的连接铰处定义为连体基 $\vec{e}^1$ 的基点 C_1,基矢量 $\vec{x}^1$ 沿曲柄轴线指向曲柄与连杆的连接铰(见图)。对于连杆 B_2,在与曲柄的连接铰处定义为连体基 $\vec{e}^2$ 的基点 C_2,基矢量 $\vec{x}^2$ 沿连杆轴线指向连杆与滑块的连接铰。对于滑块 B_3,在与连杆的连接铰处定义为连体基 $\vec{e}^3$ 的基点 C_3,基矢量 $\vec{x}^3$ 沿指向滑移槽轴线向右。对于机座 B_4,定义连体基 $\vec{e}^4$ 基点 C_4 与基点 C_1 重合,基矢量 $\vec{x}^4$ 指向沿滑移槽轴线向右。为了确定每个刚体的位形需定义它们公共的参考基 $\vec{e}$,基点 C 取与基点 C_1 重合,基矢量 $\vec{x}$ 的指向沿滑移槽轴线向右。



例 2.1-1 图

根据定义,曲柄 B_1 连体基 $\vec{e}^1$ 的基点 C_1 的矢径为 $\vec{r}_1 = \overrightarrow{CC_1}$,机座 B_4 连体基 $\vec{e}^4$ 基点 C_4 的矢径为 $\vec{r}_4 = \overrightarrow{CC_4}$。由图所示,这些矢径在公共参考基 $\vec{e}$ 上的坐标阵分别 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_4 = (0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$。连杆 B_2 连体基 $\vec{e}^2$ 基点 C_2 矢径为 $\vec{r}_2 = \overrightarrow{CC_2}$。由图所示,矢径在公共参考基的坐标阵为

$$\boldsymbol{r}_2 = (0.5\cos(\pi/4) \quad 0.5\sin(\pi/4))^{\mathrm{T}} = (0.354 \quad 0.354)^{\mathrm{T}}$$

滑块 B_3 连体基 $\vec{e}^3$ 基点 C_3 的矢径为 $\vec{r}_3 = \overrightarrow{CC_3}$。矢径在公共参考基的坐标阵 $\boldsymbol{r}_3 = (x_3 \quad y_3)^{\mathrm{T}}$,由图所示,$y_3 = 0$,求 x_3 比较复杂些。由图所示的几何关系,

$2\sin(\angle C_2C_3C_1)=0.5\sin(\pi/4)$，可得$\angle C_2C_3C_1=0.178$。有 $x_3=0.5\cos(\pi/4)+2\cos(0.178)=2.322$ m。故 $\boldsymbol{r}_3=(2.322\quad 0)^{\mathrm{T}}$。

由图所示，曲柄 B_1 的姿态角为 $\varphi_1=\pi/4=0.785$。滑块 B_3 与机座 B_4 的姿态角均为 $\varphi_3=\varphi_4=0$。由图，$\varphi_2=2\pi-\angle C_2C_3C_1=6.105$。

根据上述分析可得曲柄、连杆、滑块与机座的位形坐标，即

$$\boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}=(0\quad 0\quad 0.785)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{q}_2=(\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}=(0.354\quad 0.354\quad 6.105)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{q}_3=(\boldsymbol{r}_3^{\mathrm{T}}\quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}=(2.322\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{q}_4=(\boldsymbol{r}_4^{\mathrm{T}}\quad \varphi_4)^{\mathrm{T}}=(0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

将各刚体的姿态角代入式(2.1-1)，可得曲柄、连杆、滑块与机座关于公共基的方向余弦阵，即

$$\boldsymbol{A}^1=\begin{pmatrix}0.707 & -0.707\\ 0.707 & 0.707\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0.984 & 0.177\\ -0.177 & 0.984\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{5}$$

2.2 刚体的平面运动

2.2.1 刚体的平移与定轴转动

刚体的运动过程表现为刚体的位形不断的变化，即描述刚体位形的坐标 $\boldsymbol{q}$ 为时间 t 的函数，即

$$\boldsymbol{q}(t)=(\boldsymbol{r}(t)^{\mathrm{T}}\quad \varphi(t))^{\mathrm{T}}=(x(t)\quad y(t)\quad \varphi(t))^{\mathrm{T}} \tag{2.2-1}$$

考虑两种特殊的情况。

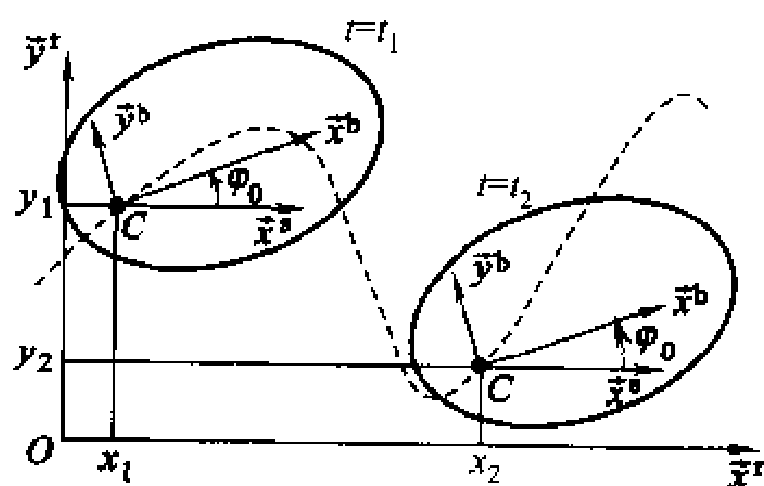


图 2-4 刚体的平移

第一种情况是刚体在运动过程中，姿态保持不变，即姿态角始终为常数，

$$\varphi(t)=\varphi_0$$

这样，每个瞬时刚体连体基或固结刚体上的任意直线均保持平行，称这类运动为**刚体的平移**。如图 2-4 所示，图中的虚线为刚体连体基基点的运动轨迹。图中画出了刚体在 t_1 与 t_2 的两个位形，坐标分别为

$$\boldsymbol{q}(t_1)=(\boldsymbol{r}(t_1)^{\mathrm{T}}\quad \varphi(t_1))^{\mathrm{T}}=(x_1\quad y_1\quad \varphi_0)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{q}(t_2)=(\boldsymbol{r}(t_2)^{\mathrm{T}}\quad \varphi(t_2))^{\mathrm{T}}=(x_2\quad y_2\quad \varphi_0)^{\mathrm{T}}$$

第二种情况为刚体在运动过程中，刚体上某点始终保持不动，如果取该点为连体基的基点，则基点的矢径为常矢径 $\vec{r}(t)=\vec{r}_0$，其在参考基的坐标阵为

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$$

或

$$x(t)=x_0,\quad y(t)=y_0$$

这样，每个瞬时刚体绕基点且垂直运动平面轴作转动，称这类运动为**刚体的定轴转动**。如图 2-5 所示，图中给出了某刚体定轴转动在 t_1 与 t_2 的两个位形，坐标分别为

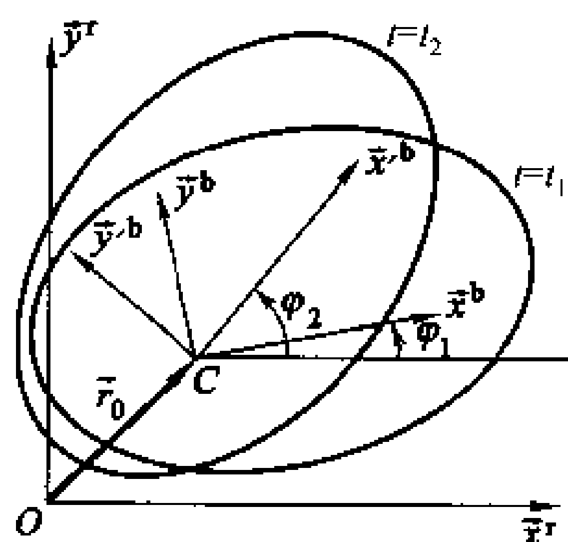
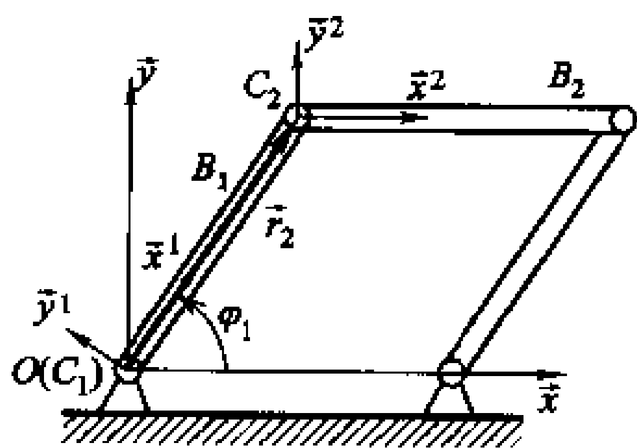


图 2-5　刚体的定轴转动

$$\boldsymbol{q}(t_1)=(\boldsymbol{r}(t_1)^{\mathrm{T}}\quad \varphi(t_1))^{\mathrm{T}}=(x_0\quad y_0\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{q}(t_2)=(\boldsymbol{r}(t_2)^{\mathrm{T}}\quad \varphi(t_2))^{\mathrm{T}}=(x_0\quad y_0\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$$

[例 2.2-1]　图示一四连杆机构。两摇臂等长，均为 1 m。摇臂 1 相对公共基的转角 φ_1 的变化规律为 $\varphi_1=0.5+2t$（t 的单位为 s，φ 的单位为 rad），试分别写出摇臂 B_1 与连杆 B_2 在时间区间[0　1]内，时间间隔为 0.2 s 的位形。

解：分别在摇臂 B_1 与连杆 B_2 的端部建立连体基 $\vec{e}^1$ 与 $\vec{e}^2$（如图所示）。摇臂 B_1 作定轴转动。连体基 $\vec{e}^1$ 的基点 C_1 在公共基的坐标阵为 $\boldsymbol{r}_1=(0\quad 0)^{\mathrm{T}}$，加上姿态角变化规律 $\varphi_1=0.5+2t$ 可写出基 $\vec{e}^1$ 的位形 $\boldsymbol{q}_1=(x_1\quad y_1\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$，现列在表 2.2-1。基 $\vec{e}^2$ 的基点 C_2 在公共基的坐标阵为 $\boldsymbol{r}_2=(\cos\varphi_1\quad \sin\varphi_1)^{\mathrm{T}}$，由已知条件，基 $\vec{e}^2$ 始终与公共基平行，$\varphi_2=0$，连杆 B_2 作平移。基 $\vec{e}^2$ 的位形 $\boldsymbol{q}_2=(x_2\quad y_2\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$ 也



例 2.2-1 图

列在表 2.2－1。

表 2.2－1 摇臂 1 与连杆 2 位形的时间历程

t/s	x_1/m	y_1/m	φ_1/rad	x_2/m	y_2/m	φ_2/rad
0.0	0.0	0.0	0.5	0.540	0.479	0.0
0.2	0.0	0.0	0.9	0.622	0.783	0.0
0.4	0.0	0.0	1.3	0.267	0.964	0.0
0.6	0.0	0.0	1.7	－0.129	0.992	0.0
0.8	0.0	0.0	2.1	－0.505	0.863	0.0
1.0	0.0	0.0	2.5	－0.801	0.598	0.0

2.2.2 刚体的平面一般运动

首先在连体基基点 C 定义一个与 $\vec{e}^r$ 始终保持平行的辅助参考基 $\vec{e}^s$(见图 2－6)。称基 $\vec{e}^s$ 为刚体的**平移参考基**。在刚体的运动中,该基始终随连体基的基点一起运动,但与刚体不固结,基矢量方向与基 $\vec{e}^r$ 平行。在图2－4中,每一个瞬时各基点的水平矢量线即为刚体平移参考基的基矢量 $\vec{x}^s$。

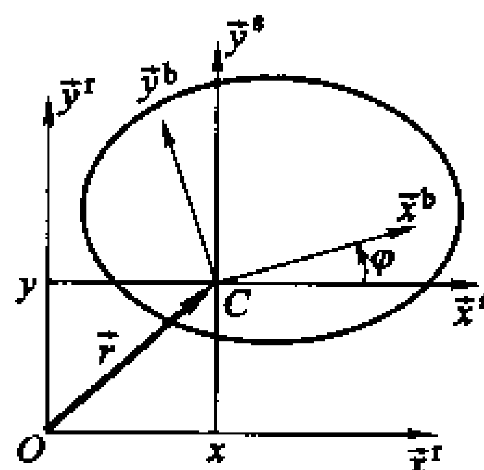


图 2－6 刚体的平移参考基

由平移参考基的定义可见,连体基 $\vec{e}^b$ 相对于 $\vec{e}^r$ 的姿态与它相对于 $\vec{e}^s$ 的姿态一致。故可有如下的结论:在研究连体基 $\vec{e}^b$ 相对于 $\vec{e}^r$ 的姿态时,可不考虑基点的移动。根据这个原理,刚体运动的前后两个位形(见图 2－7a 中的Ⅰ与Ⅲ)可以理解为刚体先由Ⅰ平移到Ⅱ,再定轴转动到Ⅲ(见图 2－7b)。或刚体在Ⅰ先转动到Ⅱ再由Ⅱ平移到Ⅲ(见图 2－7c)。因此有如下结论:在刚体平面运动的定性分析时可将刚体的平面一般运动分解为刚体的平移与刚体定轴转动。

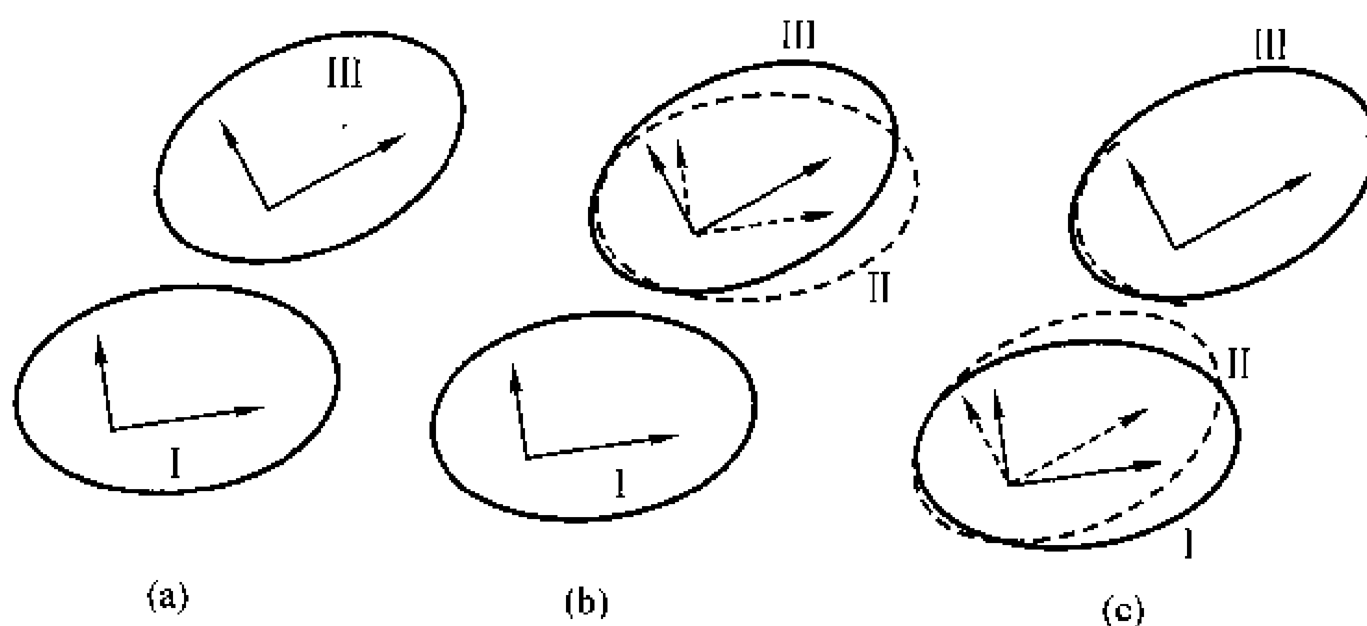


图 2－7 刚体平面运动的分解

2.2.3 同一个刚体的两个连体基的位形坐标间的相互关系。

如果在同一个刚体上分别在点 C_1 与 C_2 建立两个连体基 $\vec{e}^1$ 与 $\vec{e}^2$(如图 2-8 所示)。这两个连体基描述刚体位形的坐标分别为

$$\boldsymbol{q}_1 = (\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} \quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$$

考虑到在刚体运动的过程中,两个连体基 $\vec{e}^1$ 与 $\vec{e}^2$ 相对无运动,描述刚体姿态角的差始终保持不变,即

$$\theta \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = \text{常数} \quad (2.2-2)$$

在任意瞬时刚体姿态角间有如下关系:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \theta = \varphi_1 + \text{常数} \quad (2.2-3)$$

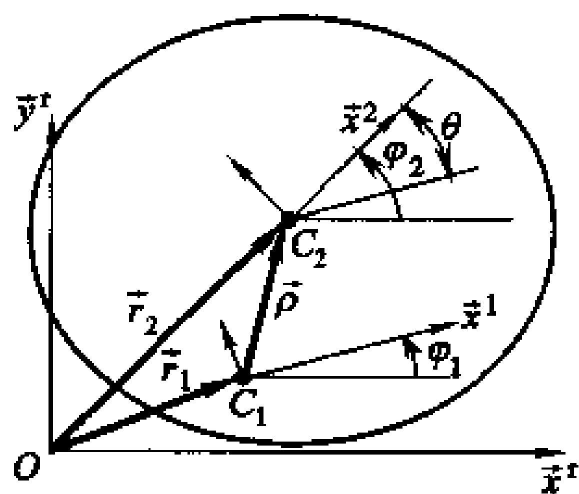


图 2-8 刚体上两个连体基的关系

此外,由图 2-8 所示,在刚体运动的过程中,基点 C_2 与 C_1 的矢径间有如下关系:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\rho} \quad (2.2-4)$$

式中,$\vec{\rho}$ 为基点C_2 关于 C_1 的矢径。矢量式(2.2-4)在公共基的坐标阵为

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\rho} \quad (2.2-5)$$

利用式(1.3-11),将 $\vec{\rho}$ 在公共基的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}$ 用在连体基 $\vec{e}^1$ 的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}^1$ 表达,有

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{A}^1\boldsymbol{\rho}^1 \quad (2.2-6)$$

式中:坐标阵 $\boldsymbol{\rho}^1 = (\rho_x^1 \quad \rho_y^1)^{\mathrm{T}}$ 为常值坐标阵;$\boldsymbol{A}^1$ 为连体基 $\vec{e}^1$ 关于公共基的方向余弦阵式(2.1-1),它是姿态角 φ_1 的函数。所以,基点的位置关系式(2.2-6)与姿态角 φ_1 有关。展开式(2.2-6)可得基点 C_2 与 C_1 坐标关系的显式

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_x^1 \\ \rho_y^1 \end{pmatrix} \quad (2.2-6')$$

[例 2.2-2] 如图所示的一长为 2 m 的曲柄,如果按图示分别在端部与轴线的中点建立两个连体基。求两个连体基位形坐标的关系。

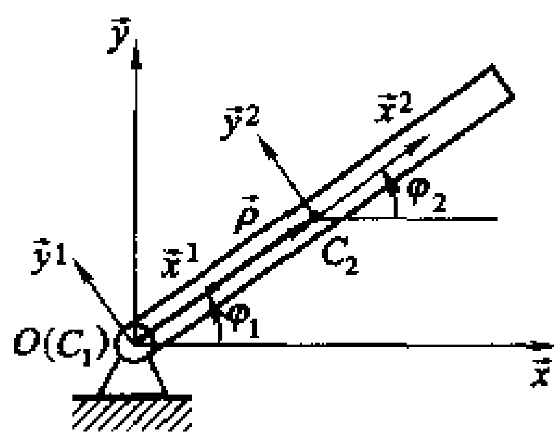
解: 由图所示,基 $\vec{e}^1$ 与基 $\vec{e}^2$ 相对姿态角 $\theta = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$,由式(2.2-3),曲柄在任意时刻,$\varphi_2 = \varphi_1$。

由图知,基点 C_2 关于 C_1 的矢径在基 $\vec{e}^1$ 上的坐标阵为 $\boldsymbol{\rho}^1 = (1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$,由式(2.2-6)或(2.2-6′)

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此式给出了曲柄在任意时刻两基点位置的关系。考虑到基点 C_1 在公共基的坐标为 $\boldsymbol{r}_1=(0\quad 0)^{\mathrm{T}}$，代入上面的展开式后，有

$$x_2=\cos\varphi_1,\quad y_2=\sin\varphi_1$$



例 2.2－1 图

刚体上连体基的选取是任意的，尽管它们的位形坐标的形式均为式(2.2－1)，都能描述同一个刚体的位形，但是位形坐标的时间历程表达式不同。由上例可知，连体基 $\vec{e}^1$ 位形坐标为 $\boldsymbol{q}_1=(0\quad 0\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$，连体基 $\vec{e}^2$ 位形坐标为 $\boldsymbol{q}_2=(\cos\varphi_2\quad \sin\varphi_2\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$，它们都描述曲柄的定轴转动。显然，连体基 $\vec{e}^1$ 位形坐标的时间历程表达式比较简洁。直接可以看出刚体在作定轴转动。所以在进行运动学分析时，合理设定连体基应给予重视。

2.3 刚体的定轴转动

2.3.1 刚体的角速度与角加速度

由上节已知，在研究 $\vec{e}^b$ 相对于 $\vec{e}^r$ 的姿态时，可不考虑基点的移动。因此研究刚体一般运动中的姿态变化可归结为研究刚体定轴转动的姿态变化。

如图 2－9 所示，如果在时间 t 到 $t+\Delta t$，刚体的姿态角由 φ 到 $\varphi+\Delta\varphi$，那么刚体在时间 t 到 $t+\Delta t$ 间姿态角改变的平均速率为 $\Delta\varphi/\Delta t$ 当 Δt 趋于无限小时，上述平均速率的极限称为刚体在瞬时 t 绕 C 的定轴转动的**角速度**，记为 ω，有

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\tag{2.3－1}$$

即刚体定轴转动的角速度为刚体姿态角对时间的导数，有

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}\tag{2.3－2}$$

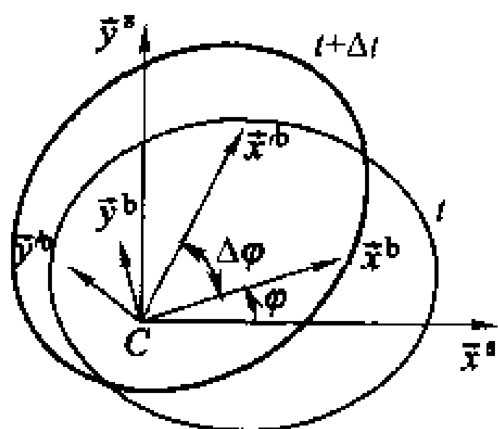


图 2－9 定轴转动刚体的姿态变化

定义角速度对时间的导数为刚体绕 C 的定轴转动的**角加速度**，记为 α，即

$$\alpha=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}\tag{2.3－3}$$

已知垂直与刚体运动平面的单位矢量

$$\vec{z}=\vec{x}^b\times\vec{y}^b=\vec{x}^s\times\vec{y}^s\tag{2.3－4}$$

由图 2－9 可知，连体基的基矢量 $\vec{x}^b$ 逆时针旋转的姿态角为正，即刚体的定轴转动绕矢

量 $\vec{z}$ 的正向为正。为此定义刚体相对于参考基绕 C 的定轴转动的**角速度矢量**为

$$\vec{\omega} = \omega\vec{z} = \dot{\varphi}\vec{z} \tag{2.3-5}$$

绕 C 的定轴转动的**角加速度矢量**为

$$\vec{\alpha} = \alpha\vec{z} = \ddot{\varphi}\vec{z} \tag{2.3-6}$$

如果刚体上定义有其他连体基，由式(2.2-3)可知$\frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t}$，代入式(2.3-1)，考虑到式(2.3-2)与(2.3-2)，有

$$\omega = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt},\ \alpha = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}$$

由此可得如下结论，刚体的角速度矢量和角加速度矢量与连体基基点的选取无关。根据这个结论，对于刚体绕某基点转动角速度矢量与角加速度矢量统称为刚体的角速度矢量与角加速度矢量。

现在考虑基矢量 $\vec{x}^b$ 在刚体转动时的变化。

当刚体由姿态角为 φ 转到 $\varphi+\Delta\varphi$ 时基矢量 $\vec{x}^b$ 到达新的位置 $\vec{x}'^b$，两矢量差为$\Delta\vec{x}^b = \vec{x}'^b - \vec{x}^b$。由矢量导数的定义(1.2-41)，在基 $\vec{e}^r$ 上基矢量 $\vec{x}^b$ 对时间求导有

$$\frac{{}^r d}{dt}\vec{x}^b = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{x}^b}{\Delta t} \tag{2.3-7}$$

该矢量的方向将垂直于 $\vec{x}^b$，即 $\vec{z}\times\vec{x}^b$。由于基矢量 $\vec{x}^b$ 为单位矢量，矢量差 $\Delta\vec{x}^b$ 的模$|\Delta\vec{x}^b|\approx\Delta\varphi$(见图2-10)。因此，考虑到角速度矢量的定义式(2.3-5)，式(2.3-7)可改写为

$$\frac{{}^r d}{dt}\vec{x}^b = (\vec{z}\times\vec{x}^b)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \vec{\omega}\times\vec{x}^b \tag{2.3-8}$$

同理
$$\frac{{}^r d}{dt}\vec{y}^b = \vec{\omega}\times\vec{y}^b \tag{2.3-9}$$

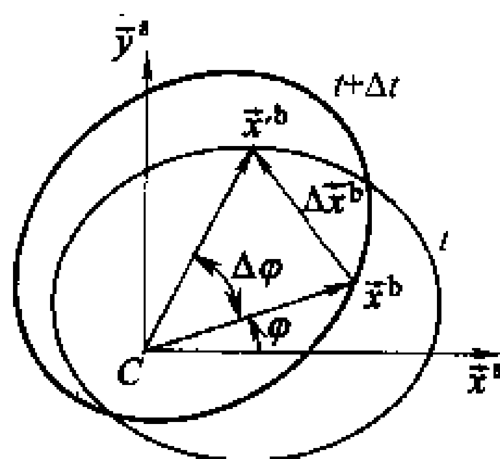


图2-10 定轴转动刚体基矢量的变化

由此可知，连体基的基矢量在参考基 $\vec{e}^r$ 上对时间的导数等于该基相对于参考基的角速度矢量与其的叉积。式(2.3-8)与(2.3-9)可合并为一矢量矩阵运算式，即

$$\frac{{}^r d}{dt}\vec{e}^b = \vec{\omega}\times\vec{e}^b \tag{2.3-10}$$

式(2.3-8)~(2.3-10)称为**泊松(Poisson)公式**。

2.3.2 矢量在不同基上对时间的导数

在 1.2.3 中指出，矢量的变化是客观的存在，应与基无关，因此在不同基下考察矢量 $\vec{b}$ 变化的不同结果间应该存在一定的关系。本节将给出矢量 $\vec{b}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 与基 $\vec{e}^{b}$ 上对时间的导数的关系。

定义 $\vec{e}^{r}$ 为参考基，$\vec{e}^{b}$ 为刚体的连体基。该连体基 $\vec{e}^{b}$ 相对参考基 $\vec{e}^{r}$ 的角速度矢量为 $\vec{\omega}$。考虑任意一个矢量 $\vec{b}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 对时间的导数，由式(1.2－32)，它可表为

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\vec{e}^{\mathrm{b}})=\left(\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\right)\vec{e}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\left(\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}^{\mathrm{b}}\right) \tag{2.3-11}$$

由于 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{b}}$ 为标量阵，对时间求导与参考基无关。考虑到矢量导数的定义式(1.2－38)，上式右边的第一式可改写为

$$\left(\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\right)\vec{e}^{\mathrm{b}}=\left(\frac{{}^{b}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\right)\vec{e}^{\mathrm{b}}=\frac{{}^{b}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} \tag{2.3-12}$$

考虑到式(2.3－10)与(1.2－32)，式(2.3－11)右边的第二式可改写为

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\left(\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}^{\mathrm{b}}\right)=\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\vec{\omega}\times\vec{e}^{\mathrm{b}}=\vec{\omega}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{bT}}\vec{e}^{\mathrm{b}}=\vec{\omega}\times\vec{b} \tag{2.3-13}$$

将式(2.3－12)与(2.3－13)代入式(2.3－11)，最后得到关系式为

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}=\frac{{}^{b}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}+\vec{\omega}\times\vec{b} \tag{2.3-14}$$

由此可得到结论：任意矢量在基 $\vec{e}^{r}$ 对时间的导数等于它在 $\vec{e}^{b}$ 上对时间的导数加上基 $\vec{e}^{b}$ 相对于基 $\vec{e}^{r}$ 的角速度矢量 $\vec{\omega}$ 与该矢量的叉积。

如果记 $\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}()\overset{\mathrm{def}}{=}\dot{()}$，$\frac{{}^{b}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}()\overset{\mathrm{def}}{=}\mathring{()}$，上式可改写为

$$\dot{\vec{b}}=\mathring{\vec{b}}+\vec{\omega}\times\vec{b} \tag{2.3-14'}$$

特殊情况，当矢量 $\vec{b}$ 与刚体(或连体基 $\vec{e}^{b}$)固结，则上式的第一项为零，有

$$\dot{\vec{b}}=\vec{\omega}\times\vec{b} \tag{2.3-15}$$

考虑角速度矢量对时间的导数，由式(2.3－14)，有

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}=\frac{{}^{b}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}+\vec{\omega}\times\vec{\omega}=\frac{{}^{b}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} \tag{2.3-16}$$

由此可得到结论：连体基 $\vec{e}^{b}$ 相对于参考基 $\vec{e}^{r}$ 的角速度矢量 $\vec{\omega}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 与基 $\vec{e}^{b}$ 对时间的导数相等。

求矢量 $\vec{b}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 对时间的的二阶导数。考虑到式(2.3－14)，有

$$\frac{{}^{r}\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{b}=\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{{}^{b}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}+\vec{\omega}\times\vec{b}\right)=\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{{}^{b}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}\right)+\left(\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}\right)\times\vec{b}+\vec{\omega}\times\frac{{}^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}$$

再利用式(2.3－14)，经整理，有任意矢量在两个基下二阶导数间的关系为

$$ {}^{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{b} = {}^{b}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{b} + {}^{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} \times \vec{b} + 2\vec{\omega} \times {}^{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{b}) \tag{2.3-17} $$

或考虑到式(2.3－14′),用简写的符号有

$$ \ddot{\vec{b}} = \overset{\circ\circ}{\vec{b}} + \vec{\alpha} \times \vec{b} + 2\vec{\omega} \times \overset{\circ}{\vec{b}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{b}) \tag{2.3-17′} $$

特殊情况,当矢量 $\vec{b}$ 与刚体(或连体基 $\vec{e}^{b}$)固结,上式变为

$$ \ddot{\vec{b}} = \vec{\alpha} \times \vec{b} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{b}) \tag{2.3-18} $$

2.3.3　角速度矢量的叠加原理

考虑任意一个固结于连体基 $\vec{e}^{b}$ 的矢量 $\vec{b}$,由式(2.3－15)可得它在参考基 $\vec{e}^{r}$ 与参考基 $\vec{e}^{s}$ 对时间的导数分别为

$$ {}^{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} = \vec{\omega}^{rb} \times \vec{b} \tag{2.3-19} $$

$$ {}^{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} = \vec{\omega}^{sb} \times \vec{b} \tag{2.3-20} $$

式中,$\vec{\omega}^{rb}$ 与 $\vec{\omega}^{sb}$ 分别为基 $\vec{e}^{b}$ 相对于基 $\vec{e}^{r}$ 与基 $\vec{e}^{s}$ 的角速度矢量。定义基 $\vec{e}^{s}$ 关于基 $\vec{e}^{r}$ 的角速度矢量为 $\vec{\omega}^{rs}$,则由式(2.3－14),

$$ {}^{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} = {}^{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} + \vec{\omega}^{rs} \times \vec{b} $$

将式(2.3－19)与(2.3－20)代入此式,有

$$ \vec{\omega}^{rb} \times \vec{b} = \vec{\omega}^{rs} \times \vec{b} + \vec{\omega}^{sb} \times \vec{b} = (\vec{\omega}^{rs} + \vec{\omega}^{sb}) \times \vec{b} $$

考虑到上式中矢量 $\vec{b}$ 是任意的,故有

$$ \vec{\omega}^{rb} = \vec{\omega}^{rs} + \vec{\omega}^{sb} \tag{2.3-21} $$

上式描述的是角速度矢量的叠加原理,即基 $\vec{e}^{b}$ 相对于基 $\vec{e}^{r}$ 的角速度矢量等于该基相对于基 $\vec{e}^{s}$ 与基 $\vec{e}^{s}$ 相对于基 $\vec{e}^{r}$ 两个角速度矢量的和。读者可由上标的关系记住此公式。该公式可推广到有限个基相对角速度矢量的叠加。

[例 2.3－1]　图示一对外接齿轮,齿轮 B_1 与机座固结,齿轮由连杆 B_3 带动在齿轮 B_1 上滚动。已知连杆 B_3 相对机座(齿轮 B_1)的角速度为 ω_3,齿轮 B_1 与齿轮 B_2 的节圆半径分别为 R_1 与 R_2。试求齿轮 B_2 相对于连杆 B_3 的角速度。

解: 令齿轮 B_2 相对于齿轮 B_1 与连杆 B_3 的角速度分别为 ω_2 与 ω_{32}。由角速度的叠加原理式(2.3－21),有

$$ \omega_2 = \omega_3 + \omega_{32} \tag{1} $$

由图可知,当连杆 B_3 转过角 ψ_3,齿轮转过角 ψ_2,且有

$$ \psi_2 R_2 = \psi_3 R_1 \tag{2} $$

考察齿轮 B_3 上的线段 DA,此时已转动到 D_1A_1,故齿轮 B_2 的相对于平移

参考基 $\vec{e}^{3}$ 的姿态角为 $\varphi_2=\psi_2+\psi_3$。考虑到式(2),此式可表为

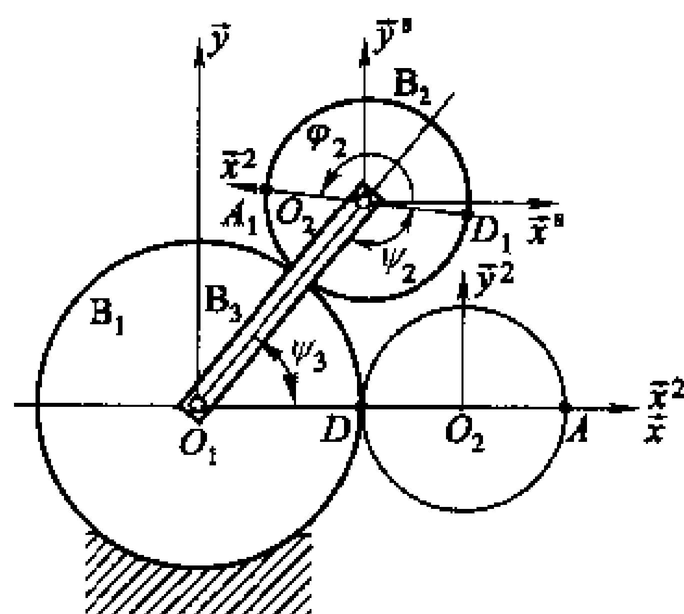
$$\varphi_2 = (R_1 + R_2)\psi_3/R_2$$

对时间求导,得到齿轮 B_2 相对于机座(齿轮 B_1)的角速度,即

$$\omega_2 = (R_1 + R_2)\omega_3/R_2$$

将此式代入式(1),可得齿轮 B_2 相对于连杆 B_3 的角速度,即

$$\omega_{32} = \omega_2 - \omega_3 = R_1\omega_3/R_2$$



例 2.3 1图

事实上,由图可知角 ψ_2 为齿轮 B_2 相对于连杆 B_3 的转角,故直接对式(2)求时间的导数,也可得到上式。

2.4 刚体上给定点的位置、速度与加速度

以上各节讨论了刚体连体基 $\vec{e}^{b}$ 相对于参考基 $\vec{e}^{r}$ 的姿态、姿态的变化率的描述方法。本节将讨论连体基 $\vec{e}^{b}$ 基点在 $\vec{e}^{r}$ 的位置、速度与加速度。这样我们将完成连体基 $\vec{e}^{b}$ 位形的描述。在此基础上进一步讨论固结于刚体的任意给定点的位置、速度与加速度与刚体位形间的关系。

2.4.1 基点的位置、速度与加速度

如 2.1 节所述,连体基 $\vec{e}^{b}$ 的基点在参考基 $\vec{e}^{r}$ 的位置可用 $\vec{e}^{r}$ 的基点 O 指向 $\vec{e}^{b}$ 的基点 C 的矢径 $\vec{r}$ 来表示(见图 2-11)。通常取矢径 $\vec{r}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 上的坐标为基点的位置坐标阵 $\boldsymbol{r}$,即

$$\boldsymbol{r} = (x \quad y)^{\mathrm{T}} \tag{2.4-1}$$

基点在基 $\vec{e}^{r}$ 上的速度矢量记为 $\vec{v}$,它是矢径 $\vec{r}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 上对时间的导数,即

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \dot{\vec{r}} \qquad (2.4-2)$$

令速度矢量 $\vec{v}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 上的坐标阵 $\boldsymbol{v}$，由式(1.2－38)，上式可表示为

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\vec{e}^{r} = \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}\vec{e}^{r}$$

故有

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad (2.4-3)$$

基点在基 $\vec{e}^{r}$ 上的加速度矢量，记为 $\vec{a}$，它是速度矢量 $\vec{v}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 上对时间的一阶导数。考虑到式(2.4－2)，它也为矢径 $\vec{r}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 上对时间的二阶导数，有

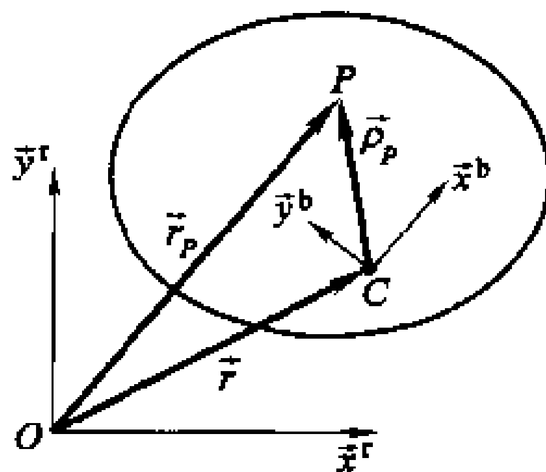


图 2－11 刚体上任意点 P 的位置

$$\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{^{r}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \qquad (2.4-4)$$

令加速度矢量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 上的坐标阵为 $\boldsymbol{a}$，由式(1.2－38)，且考虑到式(2.4－3)，有

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \qquad (2.4-5)$$

因此，由式(2.4－3)与(2.4－5)可知，基点的速度矢量 $\vec{v}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 上的坐标阵 $\boldsymbol{v}$ 为基点位置坐标阵 $\boldsymbol{r}$ 对时间的一阶导数；基点的加速度矢量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}^{r}$ 上的坐标阵 $\boldsymbol{a}$ 为基点位置坐标阵 $\boldsymbol{r}$ 对时间的二阶导数或基点速度坐标阵对时间的一阶导数。

2.4.2 刚体上任意点的位置、速度与加速度

1. 给定点的位置与速度

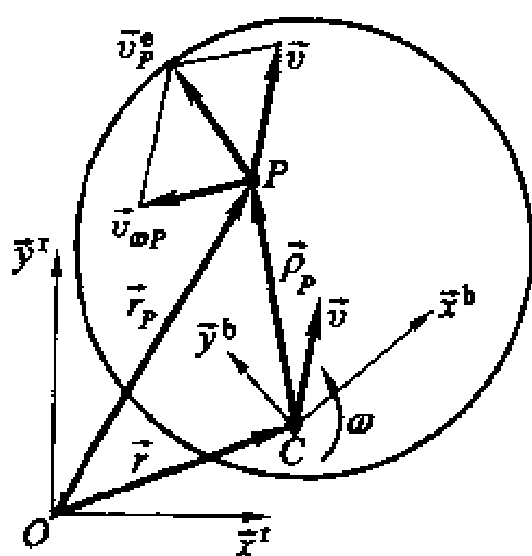


图 2－12 刚体上给定点 P 的速度

在图 2－12 中，令点 P 为固结于刚体的任意点，简称为**给定点**。$\vec{r}_P$ 为 O 指向 P 的矢径，$\vec{\rho}_P$ 为 C 指向 P 的矢径。令连体基 $\vec{e}^{b}$ 相对于参考基 $\vec{e}^{r}$ 的角速度矢量为 $\vec{\omega}$，角加速度矢量为 $\vec{\alpha}$。由图可见，给定点 P 的两矢径间有如下关系

$$\vec{r}_P = \vec{r} + \vec{\rho}_P \qquad (2.4-6)$$

两边在基 $\vec{e}^{r}$ 上对时间求导

$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\rho}}_P \qquad (2.4-7)$$

由于 P 为刚体上的给定点，矢量 $\vec{\rho}_P$ 与刚体固结，由式(2.3－15)知

$$\dot{\vec{\rho}}_P = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P \qquad (2.4-8)$$

代人式(2.4-7),得到给定点 P 的速度矢量关系式为

$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P \tag{2.4-9}$$

式中,$\dot{\vec{r}}_P$ 为给定点 P 的绝对速度,记为 $\vec{v}_P$。此式的物理意义可以这样来理解:给定点 P 的绝对速度为两个速度矢量和。一个为当连体基 $\vec{e}^b$ 以基点的速度 $\vec{v}$(即 $\dot{\vec{r}}$)作平移时,给定点 P 因此而引起的速度;另一个记为

$$\vec{v}_{\omega P} \xlongequal{\text{def}} \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P \tag{2.4-10}$$

它是一垂直于矢径 $\vec{\rho}_P$ 的速度矢量,是当连体基 $\vec{e}^b$ 以角速度 $\vec{\omega}$ 转动时,矢径 $\vec{\rho}_P$ 端点(即给定点 P)因此而引起的速度(见图 2-12)。以上两种速度均因刚体(连体基)作一般运动"牵连"而成。前者称为**平移牵连速度**,后者称为**转动牵连速度**,它们之和为点 P 的**牵连速度**,记为 $\vec{v}_P^e$

$$\vec{v}_P^e \xlongequal{\text{def}} \vec{v} + \vec{v}_{\omega P} \tag{2.4-11}$$

这样由式(2.4-9)可得到如下结论:固结在刚体上任意点的绝对速度等于因刚体的一般运动导致该点的牵连速度,即

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^e = \vec{v} + \vec{v}_{\omega P} \tag{2.4-12}$$

考虑刚体作平移的特殊情况。由于角速度为零,由式(2.4-12)可得到如下结论:刚体作平移时,刚体上任意点的绝对速度与基点的绝对速度一致,即

$$\vec{v}_P = \vec{v} \tag{2.4-13}$$

考虑刚体绕基点作定轴转动的特殊情况。由于基点的速度为零,由式(2.4-12)可得到如下结论:刚体绕基点作定轴转动时,刚体上任意点的绝对速度与该点的转动牵连速度一致。考虑到式(2.3-5),有

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{\omega P} = \omega \vec{z} \times \vec{\rho}_P \tag{2.4-14}$$

由此可知,该速度的方向垂直矢径 $\vec{\rho}_P$,大小与矢径的模成正比。考虑到式(1.4-8),上式在参考基与刚体连体基上的坐标式分别为①

$$\boldsymbol{v}_P = \omega \tilde{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{\rho}_P = \omega \tilde{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\rho}'_P, \quad \boldsymbol{v}'_P = \omega \tilde{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{\rho}'_P \tag{2.4-15}$$

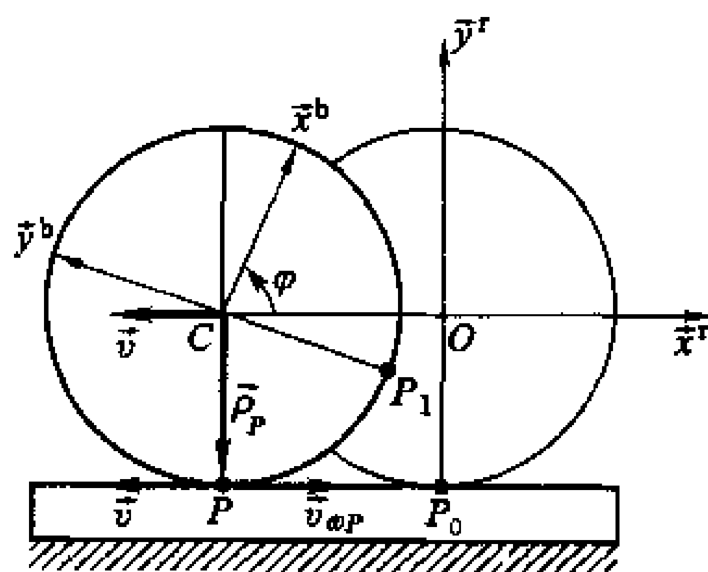
[例 2.4-1] 图示一半径为 r 的刚性圆盘在一平面上作无滑动的滚动,这是一齿轮-齿条运动副的抽象。如果圆盘的中心 C 的速度为 $\vec{v}$,试求圆盘与平面的接触点 P 的速度。

解: 如图所示,以圆盘初始位置的中心 O 为基点,建立参考基 $\vec{e}^r$。以圆盘的中心 C 为基点,建立圆盘的连体基 $\vec{e}^b$,初始位置与基 $\vec{e}^r$ 重合。由已知条件,

① 如果不特别指出,通常将黑体字母上加一撇表示某矢量在连体基的坐标阵。

圆盘作无滑动的滚动,故基点 C 移动的距离 OC 与圆盘弧长 PP_1 相等,即有

$$|x| = r\varphi$$



例 2.4-1 图

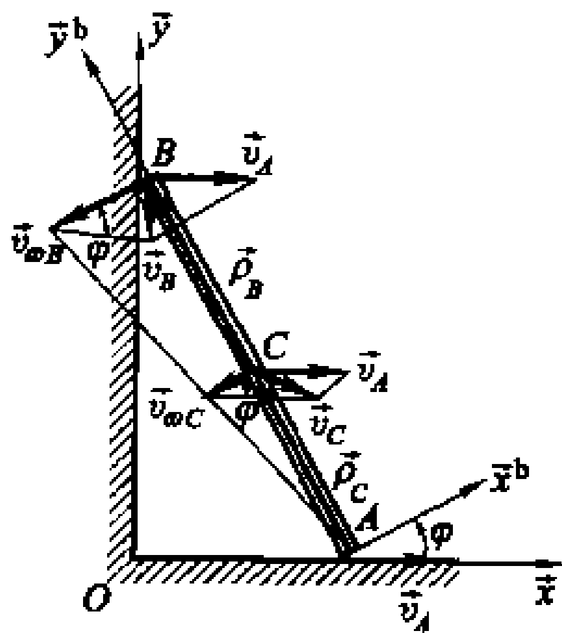
其中 x 为圆盘中心的坐标,φ 为转角。两边对时间求导,得 $|\dot{x}| = r\dot{\varphi}$。由于中心 C 在 $\vec{y}$ 方向无运动,故中心速度矢量 $\vec{v}$ 如图所示,其模 $v = |\dot{x}|$,考虑到角速度 $\omega = \dot{\varphi}$,有

$$v = r\omega \tag{1}$$

此式给出了纯滚动刚体中心的速度与刚体的角速度间的关系。

考虑刚体上点 P,它的平移牵连速度矢量 $\vec{v}$ 与旋转牵连速度矢量 $\vec{v}_{\omega P}$ 如图所示,方向向反。由于由式(2.4-10)可得 $v_{\omega P} = r\omega$,故给定点 P 的速度为零。

[例 2.4-2] 图示一刚性杆 AB 长为 l,其一端 A 着地,一端 B 靠墙,可在铅垂面运动。现端部点 A 以速度 v 作匀速运动向右。求图示当杆与水平面的夹角$\angle OAB$ 为 60°瞬时,杆 AB 的转动角速度、端部 B 点与中点 C 的速度。



例 2.4-2 图

解: 过点 A 作杆 AB 的连体基 $\vec{e}^b$ 如图所示。杆 AB(连体基 $\vec{e}^b$)在铅垂面作平面一般运动。基点 A 的绝对速度矢量为

$$\vec{v}_A = v\vec{x} \tag{1}$$

令杆 AB 的转动角速度矢量为 $\vec{\omega} = \omega\vec{z}$。图示瞬时,由已知条件知,刚体的姿态角 $\varphi = \pi/6$。

在刚体上考察给定点 B,其在刚体上的坐标为 $\boldsymbol{\rho}'_B = (0 \quad l)^T$。给定点 B 的平移牵连速度为 $\vec{v}_A$;转动牵连速度为 $\vec{v}_{\omega B} =$

$\vec{\omega}\times\vec{\rho}_B$ 垂直于杆 AB 如图所示，其模为

$$v_{\omega B} = |\vec{v}_{\omega B}| = \omega l \tag{2}$$

再在惯性基上考察刚体上的给定点 B，它沿墙作铅垂运动，故其的绝对速度矢量 $\vec{v}_B$ 如图垂直向下。由式(2.4-12)，上述三个矢量应满足如图所示的矢量几何关系。它们模之间的关系为

$$v_B = v_A \tan\varphi,\ \ v_B = v_{\omega B}\cos\varphi \tag{3}$$

考虑到式(1)，由第一式可得到点 B 的绝对速度的大小为

$$v_B = v\tan\varphi = v/\sqrt{3} \tag{4}$$

将上式与式(2)代入式(3)的第二式，可得到杆 AB 的角速度为

$$\omega = 2v/l\sqrt{3} \tag{5}$$

考察刚体上的给定点 C，在刚体上的坐标为 $\boldsymbol{\rho}_C' = (0 \quad l/2)^{\mathrm{T}}$。其平移牵连速度仍为 $\vec{v}_A$；转动牵连速度为 $\vec{v}_{\omega C} = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_C$ 垂直于杆 AB 如图所示，考虑到(5)，其模为

$$v_{\omega C} = \omega\rho_C = v/\sqrt{3} \tag{6}$$

由式(2.4-12)，给定点 C 的绝对速度 $\vec{v}_C$ 与上述两个矢量应满足如图所示的矢量几何关系。考虑到上式，根据余弦公式，可得到给定点 C 的绝对速度的大小为

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + v_{\omega C}^2 - 2v_A v_{\omega C}\cos\varphi} = v/\sqrt{3} \tag{7}$$

与式(6)比较知，此瞬时，$v_C = v_{\omega C}$，可得到 $\vec{v}_C$ 与 $\vec{v}_A$（或基矢量 $\vec{x}$）的夹角为 30°，指向如图所示。

请读者考虑，如果先不分析给定点 B 的速度，直接求中点 C 的绝对速度是否可能？

2. 给定点的加速度

将式(2.4-6)在 $\vec{e}^r$ 对时间求二阶导，考虑到式(2.3-18)，得到点 P 的加速度关系式

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}} + \vec{\alpha}\times\vec{\rho}_P + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P) \tag{2.4-16}$$

式中，$\ddot{\vec{r}}_P$ 为刚体上的给定点 P 的绝对加速度，记为 $\vec{a}_P$。此式的物理意义可以这样来理解：刚体上给定点 P 的绝对加速度为三个加速度矢量和。一个为当连体基 $\vec{e}^b$ 以基点的加速度 $\vec{a}$（即 $\ddot{\vec{r}}$）作平移时，点 P 因此而引起的加速度。后两个均因连体基转动而引起的，其中前一个加速度矢量，记为 $\vec{a}_{\alpha P}$，

$$\vec{a}_{\alpha P} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \vec{\alpha}\times\vec{\rho}_P \tag{2.4-17}$$

为连体基角加速度引起的，它的方向为矢径 $\vec{\rho}_P$ 端点（即给定点 P）切向（见图

2－13)，而后一个加速度矢量，记为 $\vec{a}_{\omega P}$，

$$\vec{a}_{\omega P} \xlongequal{\text{def}} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P) \qquad (2.4-18)$$

与连体基的角速度有关，其方向沿矢径 $\vec{\rho}_P$ 的反向指向基点(见图 2－13)。这三种加速度均因连体基一般运动“牵连”而成，第一个称为**平移牵连加速度**，后两个分别称为**转动牵连切向加速度**与**转动牵连法向加速度**，三个矢量之和称为点 P 的**牵连加速度**，记为

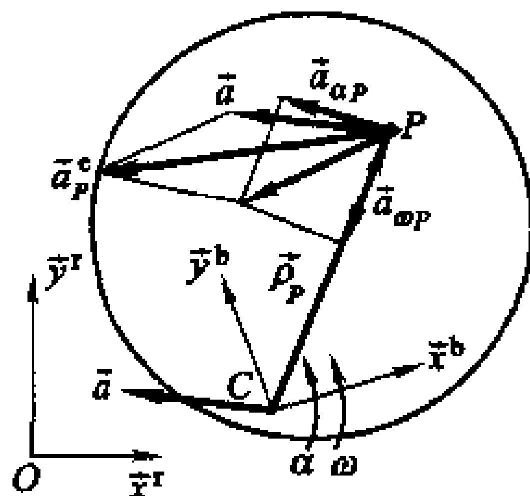


图 2－13 刚体上任意点 P 的加速度

$$\vec{a}_P^e \xlongequal{\text{def}} \vec{a} + \vec{a}_{\omega P} + \vec{a}_{\alpha P} \qquad (2.4-19)$$

这样由式(2.4－16)可得到如下结论：固结在刚体上任意点的绝对加速度等于该点因刚体的一般运动而引起的牵连加速度。式(2.4－16)可简写为

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^e = \vec{a} + \vec{a}_{\alpha P} + \vec{a}_{\omega P} \qquad (2.4-20)$$

考虑刚体作平移的特殊情况。由于角速度与角加速度为零，由式(2.4－16)可得到如下结论：刚体作平移时，刚体上任意点的绝对加速度与平移牵连加速度(基点的绝对加速度)一致，即

$$\vec{a}_P = \vec{a} \qquad (2.4-21)$$

考虑刚体绕基点作定轴转动的特殊情况。由于基点不动，由式(2.4－16)可得到如下结论：刚体绕基点作定轴转动时，刚体上任意点的绝对加速度为该点的转动牵连切向加速度与转动牵连法向加速度的矢量和。考虑到式(2.3－5)与(2.3－6)，有

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{\alpha P} + \vec{a}_{\omega P} = \alpha\vec{z} \times \vec{\rho}_P + \omega^2 \vec{z} \times (\vec{z} \times \vec{\rho}_P) \qquad (2.4-22)$$

由此可知，转动牵连切向加速度垂直矢径 $\vec{\rho}_P$，大小与矢径的模成正比；转动牵连法向加速度，沿矢径指向基点，大小与矢径的模成正比。考虑到式(1.4－8)与(1.4－9)，上式在参考基与刚体连体基上的坐标式分别为

$$\boldsymbol{a}_P = \alpha\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}_P - \omega^2\boldsymbol{\rho}_P = \alpha\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P - \omega^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P, \quad \boldsymbol{a}'_P = \alpha\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}'_P - \omega^2\boldsymbol{\rho}'_P \qquad (2.4-23)$$

[例 2.4－3] 求例 2.4－2 杆 AB 的转动角加速度、端部 B 点的加速度。

解： 同样过点 A 作杆 AB 的连体基 $\vec{e}^b$ 如图所示。杆 AB 在铅垂面作平面一般运动。由已知条件，基点 A 的绝对加速度为 $\vec{a}_A = \vec{0}$。

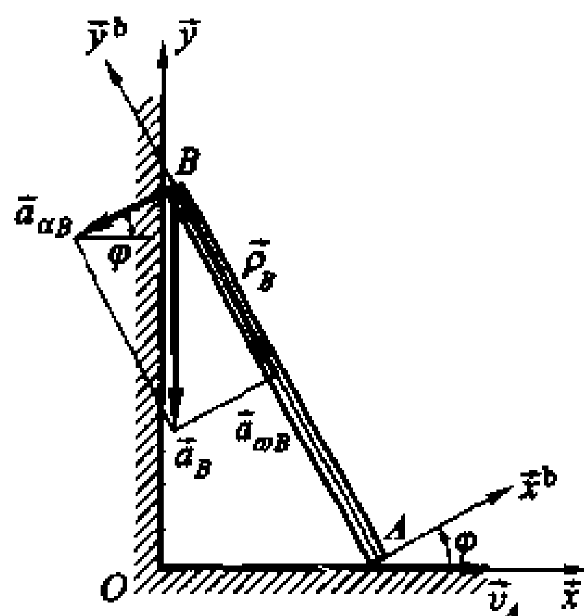
考察刚体上的给定点 B，其在刚体上的坐标为 $\boldsymbol{\rho}'_B = (0 \quad l)^T$。给定点 B 的平移牵连加速度为 $\vec{a}_A = \vec{0}$；转动牵连切向加速度为 $\vec{a}_{\alpha B} = \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_B$ 垂直于杆 AB

如例 2.4－3 图所示，其模为

$$a_{\alpha B} = |\vec{a}_{\alpha B}| = \alpha l \qquad (1)$$

转动牵连法向加速度为 $\vec{a}_{\omega B} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_B)$，由 B 指向 A。其模为

$$a_{\omega B} = |\vec{a}_{\omega B}| = \omega^2 l \qquad (2)$$



例 2.4－3 图

再从惯性基上考察刚体上的给定点 B，它沿墙作铅垂运动，故其的绝对加速度矢量 $\vec{a}_B$ 如图垂直向下。由式(2.4－20)，上述三个矢量应满足如图所示的矢量几何关系。它们模之间的关系为

$$\vec{a}_{\omega B} = a_B \cos\varphi,\ \vec{a}_{\alpha B} = a_{\omega B} \tan\varphi \qquad (3)$$

将式(2.4－20)与(2.4－21)代入上式，可得到杆 AB 上给定点 B 的绝对加速度与刚体转动角加速度，考虑到例 2.4－2 的式(5)，它们分别为

$$a_B = \omega^2 l/\cos\varphi = 8v^2/3\sqrt{3}l,\ \alpha = \omega^2 \tan\varphi = 4v^2/3\sqrt{3}l^2 \qquad (4)$$

请读者考虑如何求中点 C 的绝对加速度。

从以上的三个例子可以看到，对于刚体上的给定点，速度矢量式(2.4－12)建立了该点绝对速度、平移牵连速度与转动牵连速度 3 个矢量的关系。一个矢量在几何上含模与方向 2 个信息，故该矢量式建立了 6 个信息量间的关系。因此，通过该矢量式，只能解决 2 个未知的信息量。加速度矢量式(2.4－20)建立了刚体上给定点的绝对加速度、平移牵连加速度、转动牵连切向加速度与转动牵连法向加速度 4 个矢量间的关系。考虑到后两个转动牵连加速度在方向上必须相互垂直的关系，通过该矢量式只能解决 7 个矢量信息量中两个未知的信息量。速度矢量式(2.4－12)与加速度矢量式(2.4－20)可用于解决已知刚体的运动求刚体上任意点运动的正向求解的问题。如例 2.4－1 中求刚体上给定点 P 的速度，例 2.4－2 中确定刚体上给定点 C 的速度与加速度即属这类问题。由于刚体上给定点的运动与刚体的运动相关联，因此可以通过已知该点的绝对运动确定该点的牵连运动，即刚体的运动，这是利用公式(2.4－12)与(2.4－20)的逆向求解的问题。所以刚体给定点的速度与加速度的矢量关系式可以用作刚体运动分析的工具。例 2.4－2 与例 2.4－3 中确定刚体的角速度与角加速度即属此类问题。这种分析过程称为单刚体运动学的**瞬时矢量分析方法**。

通过矢量几何运算对刚体上给定点的位置、速度与加速度进行了分析，其优点比较直观，但如果几何关系比较复杂，得依靠解析方法。下面将给出上述运动学矢量关系式的在参考基 $\vec{e}^r$ 上的坐标阵的运算式，供解析分析与数值计算用。

3. 给定点位置、速度与加速度的解析表达式

首先由表 1.2－1 可得到矢量式(2.4－6)在参考基 $\vec{e}^r$ 的坐标阵运算式

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho}_P \tag{2.4-24}$$

式中，$\boldsymbol{\rho}_P$ 为矢量 $\vec{\rho}_P$ 在 $\vec{e}^r$ 的坐标阵。引入连体基 $\vec{e}^b$ 相对于 $\vec{e}^r$ 的方向余弦阵 $\boldsymbol{A}$，利用式(1.3－11)可将 $\boldsymbol{\rho}_P$ 转换为矢量 $\vec{\rho}$ 在 $\vec{e}^b$ 的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}'_P = (x'_P \quad y'_P)^T$。这样式(2.4－24)可改写为

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P \tag{2.4-25}$$

展开此式有

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix} \tag{2.4-25$'$}$$

矢量 $\vec{\rho}_P$ 在 $\vec{e}^b$ 的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}'_P$ 为常值阵，它给出了刚体上给定点 P 的位置。由于刚体作平面运动，式(2.4－25)表达了刚体上给定点 P 在基 $\vec{e}^r$ 的坐标与刚体位形坐标 $\boldsymbol{q} = (x \quad y \quad \varphi)^T$ 的关系。由此可得到结论：当刚体的位形为已知时，刚体上所有点在基 $\vec{e}^r$ 的位置由式(2.4－25)完全确定。

将式(2.4－25)对时间求导，考虑到 $\boldsymbol{\rho}'_P$为常值阵，对时间求导为零，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\rho}'_P \tag{2.4-26}$$

将式(1.4－11)代入式(2.4－26)，得到刚体上给定点的速度与刚体位形坐标导数间的关系

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = \dot{\boldsymbol{r}} + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P\dot{\varphi} \tag{2.4-27}$$

或将其展开有

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}\dot{\varphi} \tag{2.4-27$'$}$$

事实上以上两式是速度矢量式(2.4－9)在基 $\vec{e}^r$ 的坐标式。考虑到式(2.4－12)在基 $\vec{e}^r$ 的坐标式为

$$v_P = v + v_{\omega P} \tag{2.4-28}$$

与式(2.4－27)比较，其中转动牵连速度矢量在基 $\vec{e}^r$ 的坐标阵为

$$\boldsymbol{v}_{\omega P} = \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P\dot{\varphi} \tag{2.4-29}$$

与式(2.4－15)一致。

将式(2.4－27)对时间求导，考虑到 $\boldsymbol{\rho}'_P$ 为常值阵对时间求导为零，得

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P = \ddot{\boldsymbol{r}} + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P\ddot{\varphi} + \tilde{\boldsymbol{I}}\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\rho}'_P\dot{\varphi}$$

将式(1.4－11)代入，考虑到式(1.4－9)，可得到刚体上任意点的速度与刚体位形坐标二阶导数间的关系

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P = \ddot{\boldsymbol{r}} + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P\ddot{\varphi} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P\dot{\varphi}^2 \tag{2.4-30}$$

或将其展开有

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_P\\ \ddot{y}_P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & -\sin\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_P'\\ y_P'\end{pmatrix}\ddot{\varphi}-\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_P'\\ y_P'\end{pmatrix}\dot{\varphi}^2 \tag{2.4-30'}$$

同样,以上两式是加速度矢量式(2.4-16)在基 $\vec{e}^r$ 的坐标式。考虑到式(2.4-20)在基 $\vec{e}^1$ 的坐标式为

$$\boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}_{\alpha P}+\boldsymbol{a}_{\omega P} \tag{2.4-31}$$

与式(2.4-30)比较,其中转动切向牵连加速度与转动法向牵连加速度的坐标阵分别为

$$\boldsymbol{a}_{\alpha P}=\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}_P'\ddot{\varphi},\ \boldsymbol{a}_{\omega P}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}_P'\dot{\varphi}^2 \tag{2.4-32}$$

分别与式(2.4-23)中第一式的前后两部分一致。

[例 2.4-4] 利用解析式(2.4-27)与(2.4-30)计算例 2.4-2 中杆 AB 的转动角速度与角加速度,以及端点 B 与中点 C 的绝对速度与绝对加速度。

解: 由例 2.4-2 的条件,在例 2.4-2 图所示瞬时,杆 AB 的位形坐标为

$$\boldsymbol{q}=(x_A\quad y_A\quad \varphi)^{\mathrm{T}}=\left(l\cos\frac{\pi}{3}\quad 0\quad \frac{\pi}{6}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{l}{2}\quad 0\quad \frac{\pi}{6}\right)^{\mathrm{T}}$$

在该瞬时,基点 A 的绝对速度 $\vec{v}_A$ 在参考基上的坐标阵为 $\boldsymbol{v}_A=(v\quad 0)^{\mathrm{T}}$,给定点 B 在杆 AB 上的位置矢径 $\vec{\rho}_B$ 在连体基的坐标阵为 $\boldsymbol{\rho}_B'=(0\quad l)^{\mathrm{T}}$。该点的绝对速度 $\vec{v}_B$ 方向已定,其在参考基上的坐标阵为 $\boldsymbol{v}_B=(0\quad v_B)^{\mathrm{T}}$。记该瞬时杆 AB 的转动的角速度为 $\dot{\varphi}=\omega$。将上述数据代入式(2.4-27),有

$$\begin{pmatrix}0\\ v_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\pi/6 & -\cos\pi/6\\ \cos\pi/6 & -\sin\pi/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ l\end{pmatrix}\omega=\begin{pmatrix}v\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ l\end{pmatrix}\omega$$

上式中有两个待求的未知变量 v_B 与 ω。由第一式可解得该瞬时杆 AB 的转动的角速度为

$$\omega=2v/l\sqrt{3} \tag{1}$$

将其代入第二式可得点 B 绝对速度 $v_B=-v/\sqrt{3}$。负号表示绝对速度 $\vec{v}_B$ 的方向与基矢量 $\vec{y}$ 反向。结果与例 2.4-2 的式(4)和(5)一致。

对于中点 C,该点在杆 AB 上的位置矢径 $\vec{\rho}_C$ 在连体基的坐标阵为 $\boldsymbol{\rho}_C'=(0\quad l/2)^{\mathrm{T}}$。其速度的大小方向均待定,令 $\boldsymbol{v}_C=(\dot{x}_C\quad \dot{y}_C)^{\mathrm{T}}$。同样由式(2.4-27),有

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_C\\ \dot{y}_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_A\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ l/2\end{pmatrix}\omega=\begin{pmatrix}v/2\\ -v/2\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

考虑到式(1),ω 为已知,2 个方程可求得 2 个未知量 $\dot{x}_C=v/2$ 与 $\dot{y}_C=-v/2\sqrt{3}$,

即$\boldsymbol{v}_C=(v/2 \quad -v/2\sqrt{3})^{\mathrm{T}}$。故中点 C 的绝对速度的模为 $v_C=\sqrt{\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2}=v/\sqrt{3}$。为了找到绝对速度矢量 $\vec{v}_C$ 的方向与基矢量 $\vec{x}$ 的夹角 θ。根据矢量点积的定义，$\vec{v}_C\cdot\vec{x}=v_C\cos\theta$，它的坐标式为

$$v_C\cos\theta=\boldsymbol{v}_C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(v/2 \quad -v/2\sqrt{3})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=v/2$$

将 v_C 用 v 表示，上式变为 $\cos\theta=\sqrt{3}/2$，故 $\theta=\pi/6$。结果与例 2.4-2 的一致。

下面求杆 AB 的角加速度以及点 B 与点 C 的加速度。

在该瞬时，基点 A 的绝对加速度 $\vec{a}_A=\vec{0}$，在参考基上的坐标阵为 $\boldsymbol{a}_A=(0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$，杆 AB 上给定点 B 的绝对加速度 $\vec{a}_B$ 方向已定，令其在参考基上的坐标阵为 $\boldsymbol{a}_B=(0 \quad a_B)^{\mathrm{T}}$。记该瞬时杆 AB 的转动的角加速度为 $\ddot{\varphi}=\alpha$。将上述数据代入式(2.4-30)，有

$$\begin{pmatrix}0\\a_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\pi/6 & -\cos\pi/6\\ \cos\pi/6 & -\sin\pi/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix}\alpha-\begin{pmatrix}\cos\pi/6 & -\sin\pi/6\\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix}\omega^2$$

考虑到式(1)，上式的未知量为 a_B 与 α 两个，可解。由第一式得杆 AB 的角加速度

$$\alpha=\omega^2/\sqrt{3}=4v_A^2/3\sqrt{3}l^2$$

将其代入第二式得点 B 的加速度

$$a_B=-l\alpha/2+\sqrt{3}l\omega^2/2=-8v_A^2/3\sqrt{3}l$$

结果与例 2.4-2 的式(4)一致。

考虑中点 C，其加速度的大小方向不定，令 $\boldsymbol{a}_C=(\ddot{x}_C \quad \ddot{y}_C)^{\mathrm{T}}$，同样由式(2.4-30)，有代数方程

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_C\\ \ddot{y}_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\pi/6 & -\cos\pi/6\\ \cos\pi/6 & -\sin\pi/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\l/2\end{pmatrix}\alpha-\begin{pmatrix}\cos\pi/6 & -\sin\pi/6\\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\l/2\end{pmatrix}\omega^2$$

由于 ω 与 α 已经求得，故上式的 2 个未知量 $\ddot{x}_C$ 与 $\ddot{y}_C$ 可解，它们分别为

$$\ddot{x}_C=0,\ \ddot{y}_C=-l\omega^2/\sqrt{3}=-4v_A^2/3\sqrt{3}l$$

由此可知中点 C 的加速度大小为 $a_C=4v_A^2/3\sqrt{3}l$，方向垂直向下。读者自己可利用矢量几何方法得到的结果进行对照。

由上例可知，刚体上给定点的速度解析关系式(2.4-27)建立了该点的绝对速度、刚体连体基的基点速度、姿态坐标与角速度 6 个标量的关系。2 个代数方程只能解决其中的 2 个未知量。刚体上给定点的加速度解析关系式(2.4-30)建立了该点的绝对加速度、刚体连体基的基点加速度、位形坐标、角速度与角加

速度 7 个标量的关系。2 个代数方程也只能解决其中的 2 个未知量。利用这两个解析式可解决已知刚体运动求刚体上任意点的速度与加速度矢量在参考基上的坐标阵。也可以已知点的速度与加速度的信息求刚体的位形速度与加速度。因此利用刚体给定点的速度与加速度的矩阵关系式可以作刚体的运动分析，这种分析过程称为单刚体运动学的**瞬时解析分析方法**。从上述分析过程可知，由于速度关系式中包含点的未知坐标与刚体的位形，加速度关系中还包含角速度，故在进行瞬时解析分析时应该遵循先位形分析，再速度分析，最后加速度分析的原则。

2.4.3 刚体的瞬时速度中心

对于给定瞬时，通常在刚体或在其延伸部分存在一个特殊点 S，该点的绝对速度为零，称该点为刚体的**瞬时速度中心**，简称为**瞬心**。令该点的矢径为 $\vec{\rho}_S$，根据式(2.4-9)，有如下关系：

$$\dot{\vec{r}}_S = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_S = \vec{0} \qquad (2.4-33)$$

由式(2.4-27)，写出上式的矩阵式

$$\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v} + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_S\omega = \boldsymbol{0} \qquad (2.4-34)$$

两边左乘矩阵$(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$，考虑到式(1.4-9)与(1.4-12)，可得到瞬心 S 相对于基点C 的矢径$\vec{\rho}_S$ 在连体基的坐标阵应满足的方程

$$\boldsymbol{\rho}'_S = \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}/\omega \qquad (2.4-35)$$

此式指出，当已知刚体的运动(基点的速度$\boldsymbol{v}$ 与刚体的角速度 ω)可以找到瞬心在刚体上的位置。展开此式有

$$\begin{pmatrix} x'_S \\ y'_S \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \qquad (2.4-35')$$

需要强调的是，一般情况下不同的瞬时刚体的瞬心位置是不同的。

如果在该瞬时，瞬心 S 为刚体连体基的基点，那么刚体上任意点的绝对速度为

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P \qquad (2.4-36)$$

可见，在该瞬时刚体上各点的速度分布与刚体绕瞬心作定轴转动的速度分布一致，故过瞬心垂直运动平面的转轴称为**刚体的转动瞬轴**。

确定刚体在某瞬时瞬心位置的方法可以通过公式(2.4-35)求得，也可根据刚体绕转动瞬轴作转动的原理，通过矢量几何方法得到。可分如下几种情况：

(1) 如果刚体上 A 与B 两点的速度方向已知，但不平行，那么过 A 与B 两点作垂直各自速度矢量的直线，它们的交点为该瞬时的瞬心(见图 2-14a)。

(2) 如果刚体上 A 与B 两点的速度大小已知，相互平行且垂直于 A，B 两

点的连线，则速度矢量端点的连线与 A,B 连线的交点为该瞬时的瞬心(见图2-14b与图2-14c)。

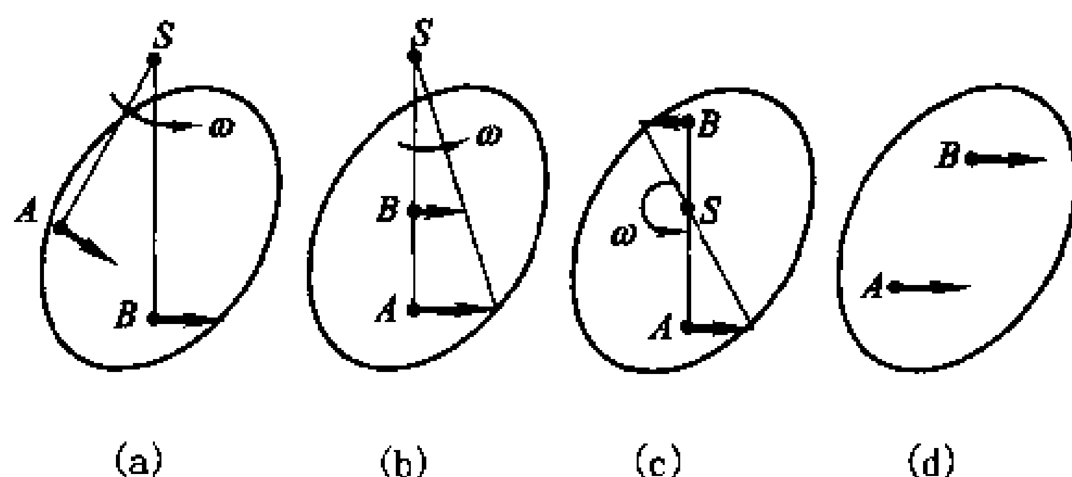


图2-14 瞬心的确定

(3) 情况(2)中如果刚体上 A 与 B 两点的速度大小相等，或 A 与 B 两点的速度相互平行但与 A,B 两点的连线不垂直，那么无法得到交点，该瞬时的速度中心在无限远处，这时刚体作瞬时平移(见图2-14d)。

对于刚体运动的某些情况也可根据刚体与邻接物体的关系确定瞬心。如刚体在一刚性固定平面上作无滑动滚动，由例2.4-1知，刚体与平面的接触点的速度为零，因此该点为该刚体的瞬心。图2-15给出了作纯滚动刚体的瞬心与刚体上速度的分布。

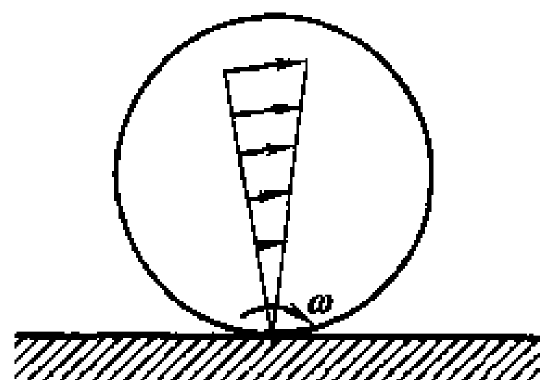


图2-15 刚体的纯滚动

利用瞬心的概念，有时可比较方便地解决刚体运动学瞬时分析的问题。见下例。

[例2.4-5] 对于例2.4-2中刚性杆 AB 所处的瞬时，找到此时的瞬心，并且求该瞬时杆 AB 的角速度及点 B 与 C 的绝对速度。

解: 由于点 A 与 B 的绝对速度已知，作它们的垂线其交点为该瞬时的瞬心 S，如图所示。其位置坐标为

$$x_S = l\cos(\pi/3) = l/2,\ y_S = l\sin(\pi/3) = \sqrt{3}l/2$$

此瞬时杆 AB 可理解为绕瞬心作瞬时定轴转动，故由绝对速度 v_A，可求得杆 AB 的角速度 ω 为

$$\omega = v_A/y_S = 2v_A/l\sqrt{3}$$

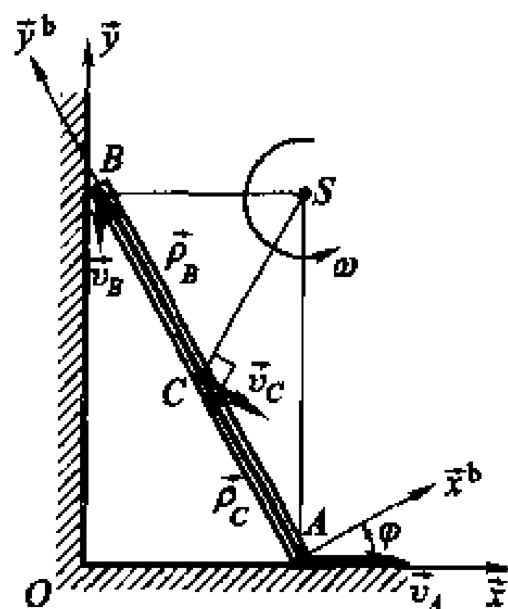
由此可直接计算点 B 的绝对速度的模为 $v_B=\omega x_S=v_A/\sqrt{3}$，方向如图所示。

为了计算点 C 的绝对速度，需已知 S 到 C 的距离，记为 d。由几何关系可得

$d=l/2$。故点 C 的绝对速度的模为 $v_C=\omega d=v_A/\sqrt{3}$，方向垂直点 S 与 C 的连线，指向如图所示。

上述结果与例 2.4－2 和例 2.4－3 中的结果一致。

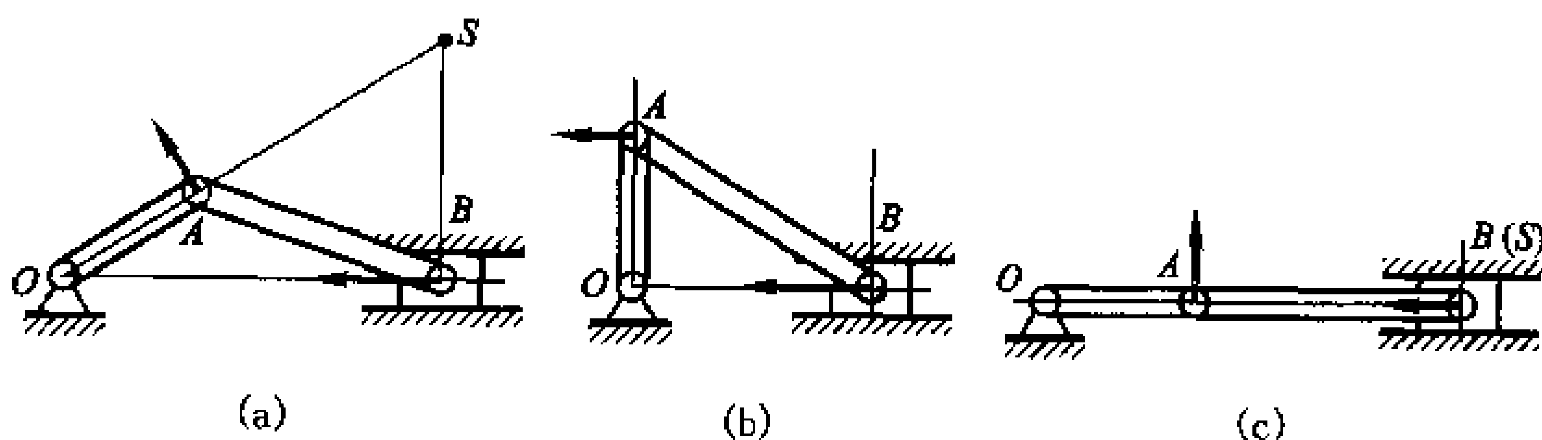
从此例可知，利用瞬心与速度矢量几何关系可以作为刚体运动学瞬时速度矢量分析方法的一种。与例 2.4－2 比较，本方法在处理速度分析时要方便得多。故瞬心方法在速度分析中有时是相当有效的。下面再考虑多个刚体的情况。



例 2.4－5 图

[例 2.4－6] 如图所示一曲柄滑块机构的三个瞬时，试确定连杆的瞬心并分析连杆的运动。

解： 对于图 a 所示瞬时，曲柄 OA 作定轴转动，点 A 的绝对速度垂直 OA，滑块沿平面滑动，点 B 的速度沿平面。作两速度的垂线，交于点 S，此点即为该瞬时连杆的瞬心，可见连杆此时作平面的一般运动。对于图 b 所示瞬时，曲柄 OA 处于垂直状态，点 A 与点 B 的速度平行，作两速度的垂线将无交点，连杆的运动为瞬时平移。对于图 c 所示瞬时，曲柄与连杆在同一直线上，点 A 的速度与点 B 的速度相互垂直，分别作两速度的垂线，交于 S 点，B 点与瞬心 S 重合。此瞬时连杆绕 B 作瞬时定轴转动。



例 2.4－6 图

2.5 相对刚体运动的任意点的位置、速度与加速度

2.5.1 动点运动学矢量关系式

现在考虑空间中的某一点，它可以在刚体的运动平面上相对于刚体运动。为了与固结在刚体上的给定点有所区别，简称其为**动点**。考察该点运动可以在

两个参考基上进行，即参考基 $\vec{e}^{r}$ 与相对 $\vec{e}^{r}$ 运动的刚体连体基 $\vec{e}^{b}$，将前者简称为**定基(系)**，后者称为**动基(系)**。动点在定基上的运动为该点的**绝对运动**，在动基上考察到动点的运动为该点相对于动基的**相对运动**。

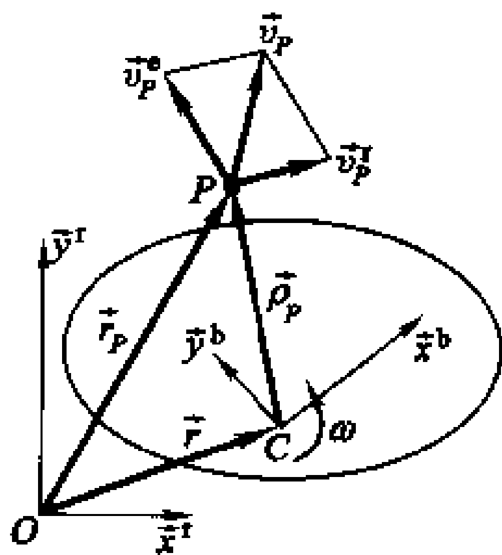


图 2-16 动点 P 的速度

如图 2-16 所示，令动点 P 关于 O 与 C 的矢径分别为 $\vec{r}_P$ 与 $\vec{\rho}_P$。$\vec{r}$ 为连体基基点 C 关于 O 的矢径。与上节讨论的情况不同，矢径 $\vec{\rho}_P$ 与动系不固结。矢径 $\vec{r}_P$ 在定基上对时间的一阶与二阶导数为动点 P 的绝对速度与绝对加速度，分别记为

$$\vec{v}_P \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{{}^{r}\mathrm{d}\vec{r}_P}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}_P,\ \vec{a}_P \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{{}^{r}\mathrm{d}^2\vec{r}_P}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}_P \tag{2.5-1}$$

矢径 $\vec{\rho}_P$ 在动基上对时间的一阶与二阶导数为动点 P 的相对速度与相对加速度，分别记为

$$\vec{v}_P^{r} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{{}^{b}\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}t} = \mathring{\vec{\rho}}_P,\ \vec{a}_P^{r} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{{}^{b}\mathrm{d}^2\vec{\rho}_P}{\mathrm{d}t^2} = \mathring{\mathring{\vec{\rho}}}_P \tag{2.5-2}$$

由图 2-16 可见，点 P 各矢径的关系为

$$\vec{r}_P = \vec{r} + \vec{\rho}_P$$

两边在 $\vec{e}^{r}$ 对时间求导

$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\rho}}_P \tag{2.5-3}$$

由于动点 P 对动系有相对运动，由式(2.3-14′)知

$$\dot{\vec{\rho}}_P = \mathring{\vec{\rho}}_P + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P \tag{2.5-4}$$

将其代入式(2.5-3)，得到动点 P 的速度关系式

$$\dot{\vec{r}}_P = \mathring{\vec{\rho}}_P + \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P \tag{2.5-5}$$

由式(2.5-1)，(2.5-2)与(2.4-11)，上式可改写为

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{r} + \vec{v}_P^{e} \tag{2.5-6}$$

如果在动基 $\vec{e}^{b}$ 上考察动点 P 的相对运动，令此瞬时在刚体(动基)上定义与 P 相重合的点为 P'，那么动点的相对速度 $\vec{v}_P^{r}$ 可理解为点 P 相对于点 P' 的速度。由于刚体(动基)本身在运动，点 P' 随动基作"牵连"运动，故称 P' 为动点 P 的**牵连点**。由上节可知，牵连点 P' 的绝对速度为该点随动基的牵连速度 $\vec{v}_{P'}^{e}$，考虑到动点 P 与牵连点在此瞬时重合，牵连速度的下标 P' 仍由 P 表示，即记为 $\vec{v}_P^{e}$。因此由式(2.5-6)得到如下结论：动点 P 的绝对速度为该点相对动基的相对速度

与它对应的牵连点随动基的牵连速度之矢量和。

将式(2.5-3)在 $\vec{e}^r$ 对时间求二阶导数，考虑到式(2.3-17′)，经整理，得到动点 P 的加速度关系式

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{\rho}}_P + \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}_P + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P) + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{\rho}}_P \tag{2.5-7}$$

定义

$$\vec{a}_P^C \overset{\text{def}}{=\!=} 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{\rho}}_P = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_P^r \tag{2.5-8}$$

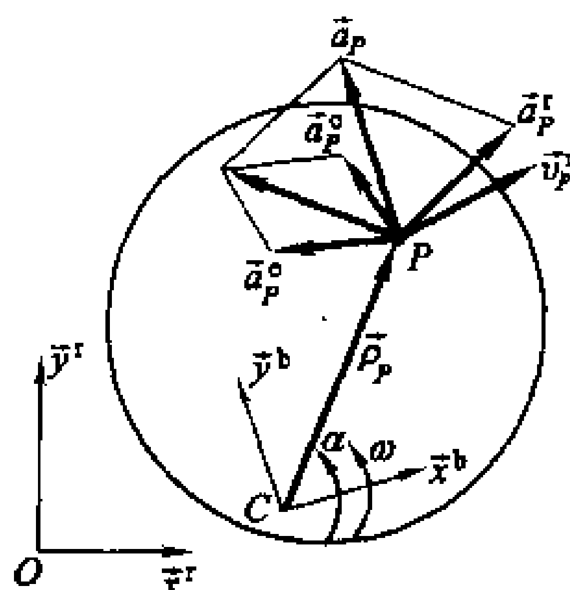
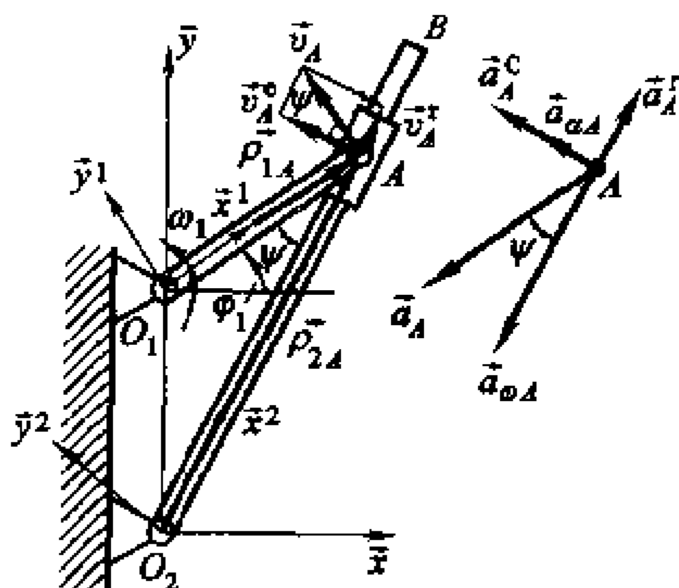


图 2-17 动点 P 的加速度

为动点 P 的**科氏加速度**，它是由科里奥利(G. G. Coriolis)于 1835 年首先提出的。科氏加速度是动系的转动与动点相对运动相互耦合引起的加速度。科氏加速度的方向垂直于角速度矢量和相对速度矢量(见图 2-17)。考虑到式(2.5-1)，(2.5-2)，(2.5-8)与(2.4-19)，式(2.5-7)可改写为

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^r + \vec{a}_P^t + \vec{a}_P^C \tag{2.5-9}$$

式中：$\vec{a}_P^r = \ddot{\vec{\rho}}$为点 P 相对加速度；$\vec{a}_P^t$ 为牵连点 P' 的牵连加速度。由上式可得到如下结论：动点的绝对加速度为该点的相对动系的相对加速度、科氏加速度与它对应的牵连点的牵连加速度之矢量和。



例 2.5-1 图

[例 2.5-1] 如图所示为一急回机构。已知长为 l_1 的曲柄 O_1A 以匀角速度 ω_1 转动，杆端为一个套筒，它可绕 A 自由转动，套筒穿在摇杆 O_2B 上，相对摇杆它又能相对滑动。令 O_1 与 O_2 的间距也为 l_1。求曲柄的转角为 $\varphi_1=\pi/6$ 时摇杆 O_2B 的角速度 ω_2 与角加速度 α_2 以及滑块在摇杆上的滑动速度与加速度。

解： 首先令曲柄为 B_1，摇杆为 B_2。如图所示过 O_1 作 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$，过 O_2 作 B_2 的连体基 $\vec{e}^2$ 与公共参考基 $\vec{e}$。

在曲柄 B_1 上考察点 A 的速度。B_1 绕 O_1 作定轴转动，A 作为 B_1 上的一给定点。点 A 的绝对速度为该点的转动牵连速度，即 $\vec{v}_A = \vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_{1A}$。其垂直于

O_1A，方向如图所示。根据已知条件，$\rho_{1A}=l_1$。点 A 的绝对速度 $\vec{v}_A$ 的模为

$$v_A = \omega_1 l_1 \tag{1}$$

在摇杆 B_2（连体基 $\vec{e}^2$）上考察点 A 的速度。点 A 对于 $\vec{e}^2$ 为一个动点。其相对运动为沿杆 O_2B 的滑移。相对速度 $\vec{v}_A^r$ 如图所示。点 A 的牵连速度为杆上与 A 瞬时重合一点 A' 的牵连速度。由于 $\vec{e}^2$ 绕 O_2 作定轴转动，故牵连速度为 $\vec{v}_A^e=\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_{2A}$。其垂直于 O_2A，方向如图所示。由图示等腰三角形 O_1O_2A 的几何关系，可得

$$\psi = \varphi_1 = \pi/6,\ \rho_{2A} = 2l_1\cos\psi = 2l_1\cos\varphi_1 \tag{2}$$

点 A 的牵连速度 $\vec{v}_A^e$ 的模为

$$v_A^e = \omega_2\rho_{2A} = 2\omega_2 l_1\cos\varphi_1 \tag{3}$$

根据式(2.5－6)，上述矢量在点 A 有图示的矢量几何。考虑到式(1)与(2)，由图可得如下关系：

$$v_A^e = v_A\cos\psi = \omega_1 l_1\cos\varphi_1,\ v_A^r = v_A\sin\psi = \omega_1 l_1\sin\varphi_1$$

将式(3)代入第一式可得到在图示瞬时 O_2B 的角速度 ω_2，由第二式可得到滑块在摇杆上的滑移速度 v_A^r，即

$$\omega_2 = \omega_1/2,\ v_A^r = \omega_1 l_1/2 \tag{4}$$

在曲柄 B_1 上考察点 A 的加速度。B_1 绕 O_1 作等角速度的定轴转动，角加速度为零。定点 A 的牵连加速度只有转动牵连向心加速度一项。故点 A 的绝对加速度为 $\vec{a}_A=\vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_{1A})$。方向由 A 指向 O_1，模为

$$a_A = \omega_1^2 l_1 \tag{5}$$

在摇杆 B_2（动基 $\vec{e}^2$）上考察点 A 的加速度。点 A 相对运动为沿 O_2B（基矢量 $\vec{x}^2$）的滑移，相对加速度 $\vec{a}_A^r$ 如图所示。点 A 的科氏加速度为 $\vec{a}_A^C=2\vec{\omega}_2\times\vec{v}_A^r$。方向垂直与摇杆如图所示，考虑到式(2.5－13)，其模为

$$a_A^C = 2\omega_2 v_A^r = \omega_1^2 l_1/2 \tag{6}$$

点 A 的牵连加速度为杆上与 A 瞬时重合一点 A' 的牵连加速度。由于动基 $\vec{e}^2$ 绕 O_2 作定轴转动，故牵连加速度为两项，即转动牵连法向加速度 $\vec{a}_{\omega A}=\vec{\omega}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_{2A})$ 与转动牵连切向加速度 $\vec{a}_{\alpha A}=\vec{\alpha}_2\times\vec{\rho}_{2A}$。它们的方向如图所示，考虑到式(2)与(4)，它们的模分别为

$$a_{\omega A} = \omega_2^2\rho_{2A} = \omega_1^2 l_1\cos\varphi_1/2,\ a_{\alpha A} = \alpha_2\rho_{2A} = 2\alpha_2 l_1\cos\varphi_1 \tag{7}$$

根据式(2.5－9)，上述5个加速度矢量在点 A 有图示的矢量几何。考虑到式(2)与(5)，由图可得如下关系：

$$a_{\omega A} - a_A^r = a_A\cos\psi = \omega_1^2 l_1\cos\varphi_1,\ a_A^C + a_{\alpha A} = a_A\sin\psi = \omega_1^2 l_1\sin\varphi_1$$

将式(7)代入，由第一式可得点 A 的相对滑移加速度为

$$a_A^t = \omega_1^2 l_1 \cos\varphi_1/2 - \omega_1^2 l_1 \cos\varphi_1 = -\sqrt{3} l_1 \omega_1^2/4$$

负号表示与图示方向相反。将式(6)与(7)代入第二式可得此瞬时摇杆的转动的角加速度

$$\alpha_2 = (\omega_1^2 l_1 \sin\varphi_1 - \omega_1^2 l_1/2)/2l_1\cos\varphi_1 = 0$$

从上例可以看到，动点速度矢量式(2.5－6)建立了动点相对于定基的绝对速度、相对于动基的相对速度与该点在动基上瞬时重合的牵连点的平移牵连速度与转动牵连速度4个矢量的关系。一个矢量在几何上含模与方向2个信息，故该矢量式建立了8个信息量间的关系。因此，通过该矢量式，只能解决2个未知的信息量。动点的加速度矢量式(2.5－9)，建立了动点相对于定基的绝对加速度、相对于动基的相对加速度、科氏加速度以及该点在动基上瞬时重合的牵连点的平移牵连加速度、转动牵连法向加速度与转动牵连切向加速度6个矢量的关系；考虑到转动牵连法向加速度与转动牵连切向加速度矢量必相互垂直，故该矢量式建立了11个信息量间的关系。通过该矢量式也只能解决2个未知的信息量。这2个矢量式可以解决在已知动基的运动的情况下，求动点的绝对运动与其对于动基的相对运动间的关系。

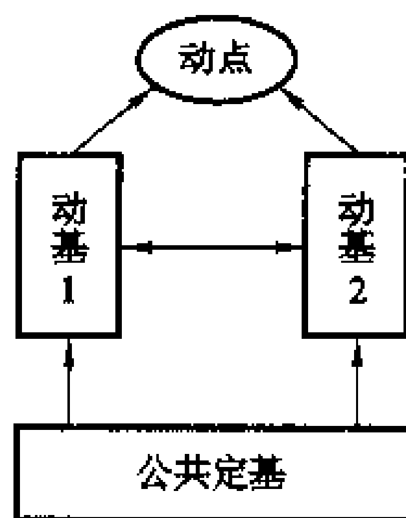


图2－18　动基间的运动学关系

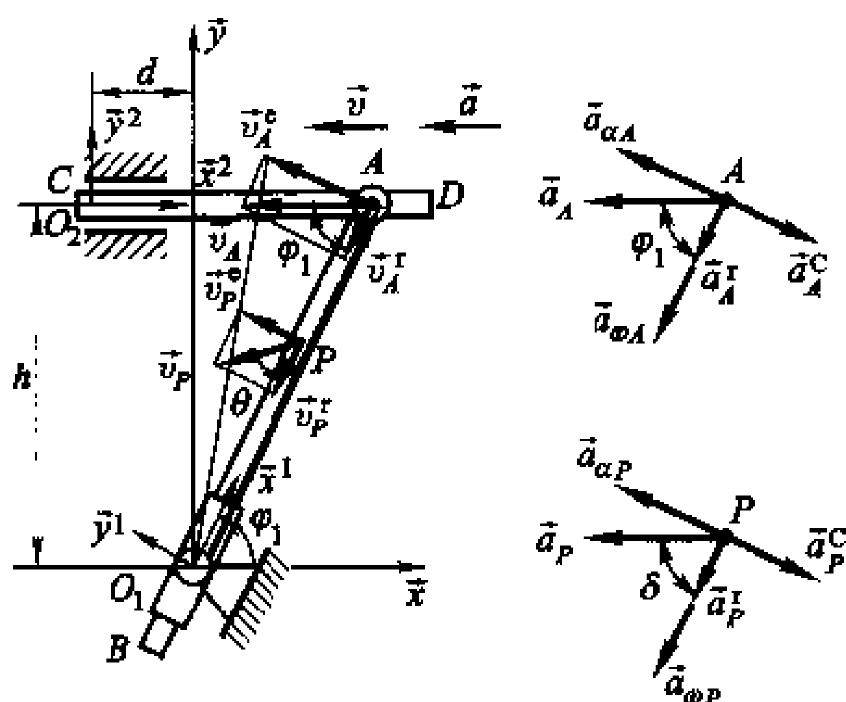
然而，考虑到上述2个矢量式建立了动基与定基的点的运动学关系，如果有两个动基与一个公共定基，那么同一个点可以相对于动基1与公共基建立上述关系，也可以相对于动基2与公共基建立上述关系。通过动点在公共基下的绝对速度与加速度一致的原理，将在两个刚体(动基)的运动学间建立起一种关系(见图2－18)。这是刚体系运动学**瞬时矢量分析方法**的基础。下面再看一个例子。

[**例2.5－2**]　在图示机构中杆 CD 可在水平槽内左右滑移。在 O_1 处有一套筒，它可绕其转动。套筒中穿一杆 AB，此杆与杆 CD 在 A 处有一转动铰相连。现杆 CD 向左作减速运动，到达图示位置时，角 $\varphi_1=\pi/3$，杆 CD 的速度为 $\vec{v}$，加速度为 $\vec{a}$，求此时套筒的转动角速度与角加速度；杆 AB 在套筒中的相对滑移速度与加速度；杆 AB 上 P 点(距离点 A 为 b)的绝对速度与加速度。

解：首先令套筒为 B_1，杆 CD 为 B_2。如图所示过 O_1 作 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$ 与公共参考基 $\vec{e}$，过 O_2 作 B_2 的连体基 $\vec{e}^2$。

在 B_2 上考察点 A 的速度。B_2 作平移，A 为 B_2 的一个给定点。点 A 的绝

对速度为其平移牵连速度，即 $\vec{v}_A=\vec{v}$，方向如图所示。



例2.5－2图

在 B_1（连体基 $\vec{e}^1$）上考察点 A 的速度。点 A 对于动基 $\vec{e}^1$ 为一个动点。其相对运动为沿套筒的基矢量 $\vec{x}^1$ 滑移。相对速度 $\vec{v}_A^r$ 如图所示。点 A 的牵连速度为基矢量 $\vec{x}^1$ 所在坐标轴上与 A 瞬时重合一点 A' 的牵连速度。由于动基 $\vec{e}^1$ 绕 O_1 作定轴转动，故牵连速度为 $\vec{v}_A^e=\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_{1A}$。其垂直于 O_1A，方向如图所示。由图示的几何关系，可得

$$\rho_{1A}=h/\sin\varphi_1 \tag{1}$$

点 A 的牵连速度的模为

$$v_A^e=\omega_1\rho_{1A}=\omega_1 h/\sin\varphi_1 \tag{2}$$

根据式(2.5－6)，上述矢量在点 A 有图示的矢量几何，由图可得如下关系：

$$v_A^e=v_A\sin\varphi_1=v\sin\varphi_1,\ v_A^r=v_A\cos\varphi_1=v\cos\varphi_1 \tag{3}$$

将式(1)代入式(3)第一式可得到在图示瞬时套筒的角速度为

$$\omega_1=v\sin^2\varphi_1/h=3v/4h \tag{4}$$

由式(3)第二式可得到点 A（即杆 AB）的相对滑移速度为

$$v_A^r=v\cos\varphi_1=v/2 \tag{5}$$

在 B_1 上考察点 P 的速度。点 P 对于动基 $\vec{e}^1$ 为一个动点。由于点 A 与点 P 在同一个刚体上，在动基 $\vec{e}^1$ 中它的相对运动为沿动基 $\vec{e}^1$ 的基矢量 $\vec{x}^1$ 滑移。相对速度 $\vec{v}_P^r=\vec{v}_A^r$。牵连速度为 $\vec{v}_P^e=\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_{1P}$。其垂直于 O_1P，方向如图所示。由图示的几何关系，可得

$$\rho_{1P}=h/\sin\varphi_1-b \tag{6}$$

点 P 的牵连速度的模为 $v_P^e=\omega_1\rho_{1P}$。根据上面的分析，考虑到式(5)与(6)，由

图可得动点 P 的速度 $\vec{v}_P$ 的模为

$$v_P = \sqrt{(v_P^c)^2 + (v_P^r)^2} = v\sqrt{4h^2 + 9\rho_{1P}^2}/4h$$

如果该矢量指向由其与杆 AB 的夹角 θ 来描述，有

$$\cos\theta = v_P^r/v_P = 2h/\sqrt{4h^2 + 9\rho_{1P}^2}$$

在 B_2 上考察点 A 的加速度。B_2 作平移，A 作为 B_2 的一个定点。点 A 的绝对加速度为其平移牵连加速度，即 $\vec{a}_A = \vec{a}$，方向如图所示。

在套筒 B_1 上考察点 A 的加速度。点 A 对于动基 $\vec{e}^1$ 为一个动点，其相对运动为沿套筒的基矢量 $\vec{x}^1$ 滑移。相对加速度 $\vec{a}_A^r$ 如图所示。基 $\vec{e}^1$ 绕 O_1 作定轴转动，点 A 的科氏加速度为 $\vec{a}_A^C = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_A^r$。方向垂直于摇杆如图所示，考虑到式(4)与(5)，其模为

$$a_A^C = 2\omega_1 v_A^r = 2v^2\cos\varphi_1\sin^2\varphi_1/h \tag{7}$$

点 A 的牵连加速度为两项，即转动牵连法向加速度 $\vec{a}_{\omega A} = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{1A})$ 与转动牵连切向加速度 $\vec{a}_{\alpha A} = \vec{\alpha}_1 \times \vec{\rho}_{1A}$。它们的方向如图所示，考虑到式(1)与(4)，它们的模分别为

$$a_{\omega A} = \omega_1^2\rho_{1A} = v^2\sin^3\varphi_1/h,\ a_{\alpha A} = \alpha_1\rho_{1A} = \alpha_1 h/\sin\varphi_1 \tag{8}$$

根据式(2.5-9)，上述5个加速度矢量在点 A 有图示的矢量几何。由图可得如下关系：

$$a_{\omega A} + a_A^r = a_A\cos\varphi_1 = a\cos\varphi_1,\ a_{\alpha A} - a_A^C = a_A\sin\varphi_1 = a\sin\varphi_1 \tag{9}$$

将式(8)代入式(9)第一式可得点 A 的相对滑移加速度为

$$a_A^r = a\cos\varphi_1 - v^2\sin^3\varphi_1/h = (4a - 3\sqrt{3}v^2/h)/8 \tag{10}$$

将式(7)与(8)代入式(9)第二式可得此瞬时摇杆的转动的角加速度

$$\alpha_1 = (ah + v^2\sin 2\varphi_1)\sin^2\varphi_1/h^2 = 3(2ah + \sqrt{3}v^2)/8h^2 \tag{11}$$

最后考虑点 P 的绝对加速度。与点 A 不同，其方向与大小均未知 在套筒 B_1(即动基 $\vec{e}^1$)上考察点 P 的加速度。由于点 A 与点 P 在同一个刚体体上，在动基 $\vec{e}^1$ 中它的相对运动为沿动基 $\vec{e}^1$ 的基矢量 $\vec{x}^1$ 滑移。相对加速度 $\vec{a}_P^r = \vec{a}_A^r$。由式(10)，其模为

$$a_P^r = a_A^r = a\cos\varphi_1 - v^2\sin^3\varphi_1/h \tag{12}$$

点 P 的科氏加速度为 $\vec{a}_P^C = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_P^r$。由于 $\vec{v}_P^r = \vec{v}_A^r$，故 $\vec{a}_P^C = \vec{a}_A^C$，考虑到式(7)，其模有

$$a_P^C = a_A^C = 2v^2\cos\varphi_1\sin^2\varphi_1/h。 \tag{13}$$

点 P 的转动牵连法向加速度 $\vec{a}_{\omega P} = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{1P})$ 与转动牵连切向加速度 $\vec{a}_{\alpha P} = \vec{\alpha}_1 \times \vec{\rho}_{1P}$。考虑到式(1)，(4)与(11)，它们的模分别为

$$a_{\omega P} = \omega_1^2\rho_{1P} = v^2\sin^3\varphi_1/h,\ a_{\alpha P} = \alpha_1\rho_{1P} = (ah - v^2\sin 2\varphi_1)\sin\varphi_1/h \tag{14}$$

根据式(2.5－9)，上述5个加速度矢量在点 P 有图示的矢量几何，由图可得如下关系

$$a_{\omega P} + a_P^{\mathrm{r}} = a_P\cos\delta,\ a_{\alpha P} - a_P^{C} = a_P\sin\delta$$

将式(12)～(14)代入，经整理有

$$a\cos\varphi_1 = a_P\cos\delta,\ a\sin\varphi_1 = a_P\sin\delta$$

由此可得点 P 在该瞬时的加速度 $a_P = a$，$\delta = \varphi_1 = \pi/3$，即点 P 的绝对速度矢量水平向左。

2.5.2　动点运动学的解析关系式

考虑到动点在动基与定基上的矢径间的关系式 $\vec{r}_P = \vec{r} + \vec{\rho}_P$，它们在定基下的坐标式为

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P \tag{2.5-10}$$

注意式(2.5－10)与(2.4－25)在形式上一致，故式(2.5－10)的展开式与式(2.4－25′)在形式上一致，即

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix} \tag{2.5-10′}$$

应注意，式(2.5－10)与(2.4－25)的区别是式(2.5－10)中矢径 $\vec{\rho}_P$ 在动基下的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}'_P = (x'_P\ \ y'_P)^{\mathrm{T}}$ 是时变的。

将上式对时间求导，考虑到式(1.4－11)，有

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}'_P + \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\rho}'_P = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}'_P + \dot{\boldsymbol{r}} + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P\dot{\varphi} \tag{2.5-11}$$

其展开式为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}'_P \\ \dot{y}'_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}\dot{\varphi} \tag{2.4-11′}$$

将式(2.5－11)与式(2.4－27)对照，考虑到式(2.4－12)，等式右边后两项为动点 P 的牵连点的牵连速度 $\vec{v}_P^{\mathrm{e}}$ 在基 $\vec{e}^{\mathrm{r}}$ 坐标阵 $\boldsymbol{v}_P^{\mathrm{e}}$，令相对速度矢量 $\vec{v}_P^{\mathrm{r}}$ 在基 $\vec{e}^{\mathrm{b}}$ 与基 $\vec{e}^{\mathrm{r}}$ 上的坐标阵分别为

$$\boldsymbol{v}'^{\mathrm{r}}_P = \dot{\boldsymbol{\rho}}'_P,\ \boldsymbol{v}_P^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}'_P \tag{2.5-12}$$

式(2.5－11)可简写为

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_P^{\mathrm{r}} + \boldsymbol{v}_P^{\mathrm{e}} \tag{2.5-13}$$

将式(2.5－11)对时间求导，考虑到式(1.4－11)，有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P = \boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}}'_P + 2\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}'_P\dot{\varphi} + \ddot{\boldsymbol{r}} + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P\ddot{\varphi} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_P\dot{\varphi}^2 \tag{2.5-14}$$

其展开式为

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}'_P \\ \ddot{y}'_P \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}'_P \\ \dot{y}'_P \end{pmatrix}\dot{\varphi} + \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}\ddot{\varphi} - \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}\dot{\varphi}^2 \qquad (2.5-14')$$

将式(2.5－14)对照式(2.4－30)，考虑到式(2.4－20)，式(2.5－14)右边最后三项为牵连点的牵连加速度矢量 $\vec{a}_P^e$ 在基 $\vec{e}^r$ 坐标阵 $\boldsymbol{a}_P^e$，又令第四项的科氏加速度矢量 $\vec{a}_P^C$ 在基 $\vec{e}^r$ 的坐标阵为

$$\boldsymbol{a}_P^C = 2\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}'_P\dot{\varphi} \qquad (2.5-15)$$

相对加速度矢量 $\vec{a}_A^r$ 在基 $\vec{e}^b$ 与基 $\vec{e}^r$ 上的坐标阵分别为

$$\boldsymbol{a}'^r_P = \ddot{\boldsymbol{\rho}}'_P,\ \boldsymbol{a}_P^r = \boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}}'_P \qquad (2.5-16)$$

故式(2.5－33)可简写为

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_P^r + \boldsymbol{a}_P^e + \boldsymbol{a}_P^C \qquad (2.5-17)$$

[**例 2.5－3**] 利用解析方法求解例 2.5－1。

解：首先令曲柄为 B_1，摇杆为 B_2。如例 2.5－1 图所示过 O_1 作 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$，过 O_2 作 B_2 的连体基 $\vec{e}^2$ 与公共参考基 $\vec{e}$。在图所示瞬时，考虑到例 2.5－1 的式(2)，B_1 与 B_2 的位形坐标分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{q}_1 &= (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^T = (0 \quad 0 \quad \pi/6)^T \\ \boldsymbol{q}_2 &= (x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2)^T = (0 \quad 0 \quad \pi/3)^T \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

两动基的位形速度与加速度分别为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}}_1 &= (\dot{x}_1 \quad \dot{y}_1 \quad \dot{\varphi}_1)^T = (0 \quad 0 \quad \omega_1)^T \\ \dot{\boldsymbol{q}}_2 &= (\dot{x}_2 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{\varphi}_2)^T = (0 \quad 0 \quad \omega_2)^T \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{q}}_1 &= (\ddot{y}_1 \quad \ddot{y}_1 \quad \ddot{\varphi}_1)^T = (0 \quad 0 \quad 0)^T \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_2 &= (\ddot{y}_2 \quad \ddot{y}_2 \quad \ddot{\varphi}_2)^T = (0 \quad 0 \quad \alpha_2)^T \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

其中套筒在此瞬时的角速度 ω_2 与角加速度 α_2 是待定的。

考虑曲柄 B_1(连体基 $\vec{e}^1$)，刚体上定点 A 在连体基的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}'_{1A} = (l_1 \quad 0)^T$。由式(2.4－31)可得到点 A 绝对速度在公共基的坐标阵为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\pi/6 & -\cos\pi/6 \\ \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix}\omega_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\omega_1 l_1 \qquad (4)$$

考虑摇杆 B_2(连体基 $\vec{e}^2$)。对于基 $\vec{e}^2$，点 A 为动点，由例 2.5－1 的式(2)，在图示瞬时点 A 在该基上的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}'_{2A} = (2l_1\cos\varphi_1 \quad 0)^T = (\sqrt{3}l_1 \quad 0)^T$。相对速度 $\vec{v}_A^r$ 如图所示，在连体基的坐标阵为 $\boldsymbol{v}_A^r = (v_A^r \quad 0)^T$。将上述数据代入式

(2.5－11′)，考虑到式(2)，有

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_A\\ \dot{y}_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\pi/3 & -\sin\pi/3\\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_A^r\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\pi/3 & -\cos\pi/3\\ \cos\pi/3 & -\sin\pi/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}l_1\\ 0\end{pmatrix}\omega_2$$

与式(4)比较，有

$$\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}v_A^r+\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}\sqrt{3}l_1\omega_2=\begin{pmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\omega_1 l_1 \tag{5}$$

这是有两个未知量的线性代数方程组，其标准形式为

$$\begin{pmatrix}1/2 & -3l_1/2\\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}l_1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_A^r\\ \omega_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\omega_1 l_1 \tag{5′}$$

可以用解线性代数方程的数值方法解式(5′)。这里采用另一种方法，对式(5)作消元处理。用行阵$(\sqrt{3}/2\quad -1/2)$乘式(5)的两边，消去变量v_A^r，可解得$\omega_2=\omega_1/2$。代入式(5)可得到$v_A^r=\omega_1 l_1/2$。与例2.5－1的式(4)一致。

在曲柄B_1(连体基$\vec{e}^1$)上考察点A的加速度。考虑到式(3)，由式(2.4－30′)可得到点A绝对加速度$\vec{a}_A$在公共基的坐标阵为

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_A\\ \ddot{y}_A\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\cos\pi/6 & -\sin\pi/6\\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\ 0\end{pmatrix}\omega_1^2=-\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}\omega_1^2 l_1 \tag{6}$$

在摇杆B_2(动基$\vec{e}^2$)上考察点A的加速度。对于基$\vec{e}^2$，点A为动点，点A相对运动为沿O_2B(基矢量$\vec{x}^2$)的滑移，相对加速度$\vec{a}_A^r$如图所示在连体基的坐标阵为$\boldsymbol{a}_A^r=(a_A^r\quad 0)^T$。将上述数据代入式(2.5－14′)，考虑到式(3)，有

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_A\\ \ddot{y}_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\pi/3 & -\sin\pi/3\\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_A^r\\ 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-\sin\pi/3 & -\cos\pi/3\\ \cos\pi/3 & -\sin\pi/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_A^r\\ 0\end{pmatrix}\omega_2+$$

$$\begin{pmatrix}-\sin\pi/3 & -\cos\pi/3\\ \cos\pi/3 & -\sin\pi/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}l_1\\ 0\end{pmatrix}\alpha_2-\begin{pmatrix}\cos\pi/3 & -\sin\pi/3\\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}l_1\\ 0\end{pmatrix}\omega_2^2$$

将式(6)与例2.5－1的式(4)代入，经整理得到如下代数方程组：

$$\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}a_A^r+\begin{pmatrix}-3l_1/2\\ \sqrt{3}l_1/2\end{pmatrix}\alpha_2=-\begin{pmatrix}\sqrt{3}/8\\ 3/8\end{pmatrix}l_1\omega_1^2 \tag{7}$$

用行阵$(\sqrt{3}/2\quad -1/2)$乘式(7)的两边，消去变量a_A^r，可解得$\alpha_2=0$。代入式(7)可得到$a_A^r=-\sqrt{3}l_1\omega_1^2/4$。结果与例2.5－1的一致。

[例2.5－4]　利用解析方法求解例2.5－2。

解：首先令套筒为B_1，杆CD为B_2。如图所示过O_1作B_1的连体基$\vec{e}^1$与公共参考基$\vec{e}$，过O_2作B_2的连体基$\vec{e}^2$。在例2.5－2图所示瞬时，B_1与B_2的

位形坐标分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{q}_1 &= (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}} = (0 \quad 0 \quad \pi/3)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{q}_2 &= (x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2)^{\mathrm{T}} = (-d \quad h \quad 0)^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

两动基的位形速度与加速度分别为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{q}}_1 &= (\dot{x}_1 \quad \dot{y}_1 \quad \dot{\varphi}_1)^{\mathrm{T}} = (0 \quad 0 \quad \omega_1)^{\mathrm{T}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_2 &= (\dot{x}_2 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{\varphi}_2)^{\mathrm{T}} = (-v \quad 0 \quad \omega_2)^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{q}}_1 &= (\ddot{x}_1 \quad \ddot{y}_1 \quad \ddot{\varphi}_1)^{\mathrm{T}} = (0 \quad 0 \quad \alpha_1)^{\mathrm{T}} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_2 &= (\ddot{x}_2 \quad \ddot{y}_2 \quad \ddot{\varphi}_2)^{\mathrm{T}} = (-a \quad 0 \quad \alpha_2)^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中套筒在此瞬时的角速度 ω_1 与角加速度 α_1 是待定的。

在 B_2(连体基 $\vec{e}^2$)上考察点 A 的速度。B_2 作平移,A 作为 B_2 的一个定点考虑到式(2),由式(2.4-27′)有点 A 的绝对速度在公共基的坐标阵为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_A \\ \dot{y}_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{x}_2 \\ \dot{y}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-v \\ 0\end{pmatrix} \tag{4}$$

在 B_1(即动基 $\vec{e}^1$)上考察点 A 的速度。点 A 对于动基 $\vec{e}^1$ 为一个动点。在图示瞬时该点在连体基上的位置坐标为 $\boldsymbol{\rho}_{1A} = (x_A' \quad y_A')^{\mathrm{T}} = (\rho_{1A} \quad 0)^{\mathrm{T}}$。该点相对运动为沿动基 $\vec{e}^1$ 的基矢量 $\vec{x}^1$ 滑移。相对速度 $\vec{v}_A^r$ 如例 2.5-2 图所示,其在连体基的坐标阵为 $\boldsymbol{v}_A^r = (\dot{x}_A \quad \dot{y}_A)^{\mathrm{T}} = (-v_A^r \quad 0)^{\mathrm{T}}$。考虑到例 2.5-2 的式(2)与(2),由式(2.5-11′)有

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_A \\ \dot{y}_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-v_A^r \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h/\sin\varphi_1 \\ 0\end{pmatrix}\omega_1$$

将式(4)代入上式,经整理,得到有两个未知变量的代数方程组

$$\begin{pmatrix}-\cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1\end{pmatrix}v_A^r + \begin{pmatrix}-h \\ h\cot\varphi_1\end{pmatrix}\omega_1 = \begin{pmatrix}-v \\ 0\end{pmatrix} \tag{5}$$

将行阵$(-\sin\varphi_1 \quad \cos\varphi_1)$左乘式(4)两边,消去 v_A^r,可得到在图示瞬时套筒的角速度为

$$\omega_1 = v\sin^2\varphi_1/h = 3v/4h \tag{6}$$

将行阵$(\cot\varphi_1 \quad 1)$左乘式(4)两边,消去 ω_1,可得到在图示瞬时点 A(即杆 AB)的相对滑移速度为

$$v_A^r = v\cos\varphi_1 = v/2 \tag{7}$$

上两结果与例 2.5-2 中的式(4)与(5)一致。

在 B_2(连体基 $\vec{e}^2$)上考察点 A 的加速度。B_2 作平移,A 作为 B_2 的一个定点。考虑到式(3),由式(2.4-27′)有点 A 的绝对加速度在公共基的坐标阵为

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

在套筒 B_1(即动基 $\vec{e}^1$)上考察点 A 的加速度。点 A 对于动基 $\vec{e}^1$ 为一个动点,其相对运动为沿套筒的基矢量 $\vec{x}^1$ 滑移。相对加速度 $\vec{a}_A^r$ 如图所示,其在连体基的坐标阵为 $\boldsymbol{a}_A^r = (\ddot{x}_A \quad \ddot{y}_A)^T = (-a_A^r \quad 0)^T$。考虑到例 2.5-2 的式(2)与(3),由式(2.5-14′)有

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_A^r \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_A^r \\ 0 \end{pmatrix}\omega_1 +$$
$$\begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h/\sin\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha_1 - \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h/\sin\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}\omega_1^2$$

将式(6)和(7)代入上式,经整理,得到有两个未知变量的代数方程组

$$\begin{pmatrix} -\cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 \end{pmatrix} a_A^r + \begin{pmatrix} -h \\ h\cot\varphi_1 \end{pmatrix}\alpha_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \end{pmatrix} v_A^r\omega_1 +$$
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \omega_1^2 h/\sin\varphi_1 \tag{9}$$

将行阵$(-\sin\varphi_1 \quad \cos\varphi_1)$左乘式(8)两边,消去 a_A^r,可得到在图示瞬时套筒的角加速度

$$\alpha_1 = (ah + v^2\sin 2\varphi_1)\sin^2\varphi_1/h^2 = 3(2ah + \sqrt{3}v^2)/8h^2 \tag{10}$$

将行阵$(\cot\varphi_1 \quad 1)$左乘式(8)两边,消去 α_1,可得到在图示瞬时点 A(即杆 AB)的相对滑移加速度

$$a_A^r = a\cos\varphi_1 - v^2\sin^3\varphi_1/h = (4a - 3\sqrt{3}v^2/h)/8 \tag{11}$$

上两结果与例 2.5-2 中的式(10)与(11)一致。

在 B_1(即动基 $\vec{e}^1$)上考察点 P 的速度。点 P 对于动基 $\vec{e}^1$ 为一个动点。在图示瞬时该点在连体基上的位置坐标为 $\boldsymbol{\rho}_{1P} = (x_P' \quad y_P')^T = (\rho_{1P} \quad 0)^T$。由于点 A 与点 P 在同一个刚体上,在动基 $\vec{e}^1$ 中它的相对运动为沿动基 $\vec{e}^1$ 的基矢量 $\vec{x}^1$ 滑移。相对速度 $\vec{v}_P^r = \vec{v}_A^r$。考虑到式(2),由式(2.5-11′)有点 P 的绝对速度 $\vec{v}_P$ 在公共基的坐标阵

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_A^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{1P} \\ 0 \end{pmatrix}\omega_1$$
$$= \begin{pmatrix} -\cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 \end{pmatrix} v_A^r + \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \rho_{1P}\omega_1$$

其中,v_A^r 与 ω_1 分别见式(6)与(7)。点 P 的绝对速度 $\vec{v}_P$ 的模为

$$v_P = \sqrt{\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2} = \sqrt{(v_A^r)^2 + (\rho_{1P}\omega_1)^2}$$

最后考虑点 P 的绝对加速度。由于点 A 与点 P 在同一个刚体上，在动基 $\vec{e}^1$ 中它的相对运动为沿动基 $\vec{e}^1$ 的基矢量 $\vec{x}^1$ 滑移。考虑到式(3)，由式(2.5－14′)有

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_P\\ \ddot{y}_P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a_A^r\\ 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1\\ \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-v_A^r\\ 0\end{pmatrix}\omega_1 +$$
$$\begin{pmatrix}-\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1\\ \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_{1P}\\ 0\end{pmatrix}\alpha_1 - \begin{pmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_{1P}\\ 0\end{pmatrix}\omega_1^2$$

考虑到式(6)，(7)，(10)与(11)，由此式可得 $\ddot{x}_P = -a$，$\ddot{y}_P = 0$，即点 P 的绝对速度矢量水平向左。与例 2.5－2 的结果一致。

由以上两例可知，刚体上动点的速度解析关系式(2.5－11′)建立了该点的绝对速度、关于动基的相对速度、动基的基点速度、姿态坐标与角速度 8 个标量的关系。2 个代数方程只能解决其中的 2 个未知量。刚体上定点的加速度解析关系式(2.5－14′)建立了该点的绝对加速度、关于动基的相对加速度、相对速度、动基的基点加速度、位形坐标、角速度与角加速度 11 个标量的关系。2 个代数方程也只能解决其中的 2 个未知量。在已知动基的位形坐标，角速度与角加速度的条件下可以得到动点的绝对速度、加速度与相对动基的速度、加速度的关系。由于在两个解析关系式中均包含动基的位形坐标、角速度与角加速度的信息，如图 2－18 所示，如果有两个动基与一个公共基，根据动点在公共基上的绝对位置、速度与加速度是唯一的原理，利用上述的解析关系式，可以得到两个动基运动学间的关系。因此动点的速度与加速度的矩阵关系式是**刚体系**运动学的**瞬时解析分析方法**的基础。当然，这种分析过程应该遵循先位形分析，再速度分析，最后加速度分析的原则。

习　题

2－1　试确定图示机构中每个构件的位形和它们关于公共基的方向余弦阵。

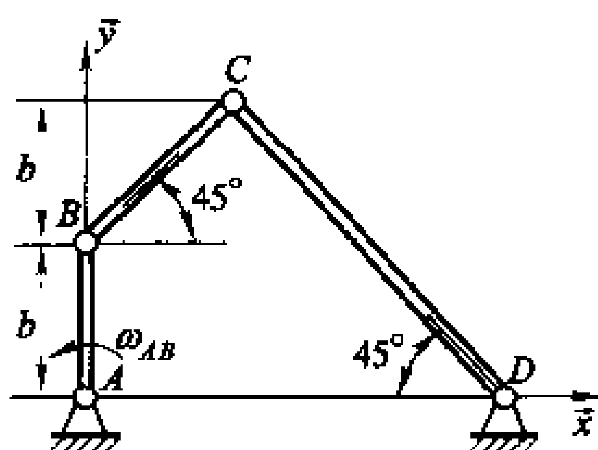
(1) 四连杆机构，其中 AB 为曲柄，BC 为连杆，CD 为摇杆。

(2) 曲柄摇杆机构，其中 O_1A 为曲柄，O_2A 为摇杆，A 为滑块。

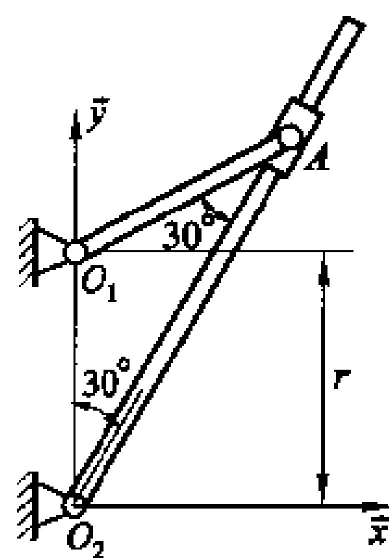
(3) 凸轮挺杆机构，其中 O 为偏心轮，AB 为挺杆。

(4) 套筒滑杆机构，其中 AB 为滑杆，BC 为摇杆，D 为套筒。

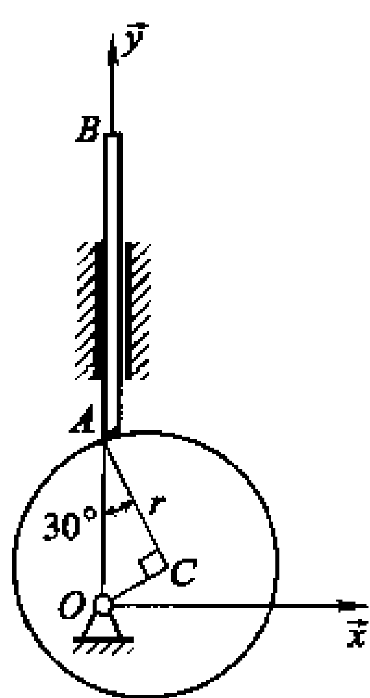
(5) 凸轮挺杆机构，其中 O 为凸轮，AB 为挺杆。



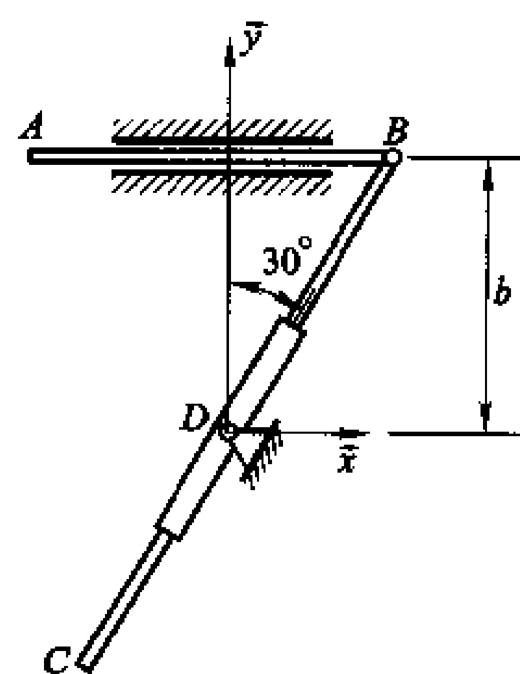
题 2－1(1)图



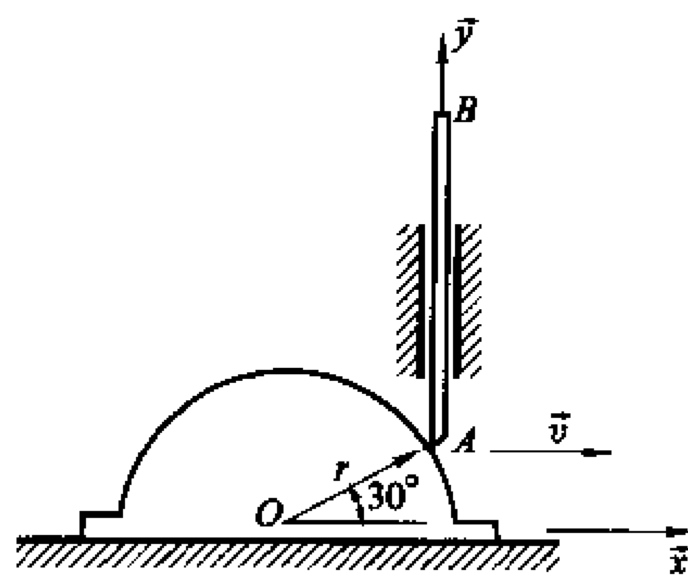
题 2－1(2)图



题 2－1(3)图

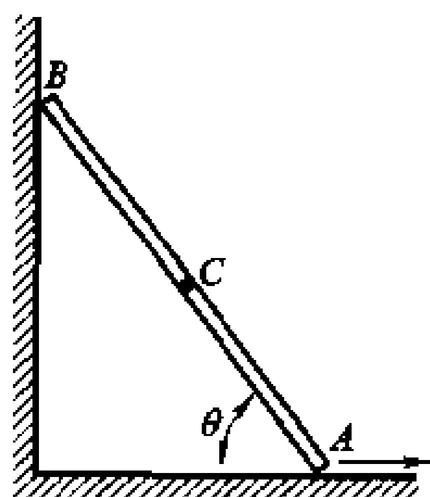


题 2－1(4)图

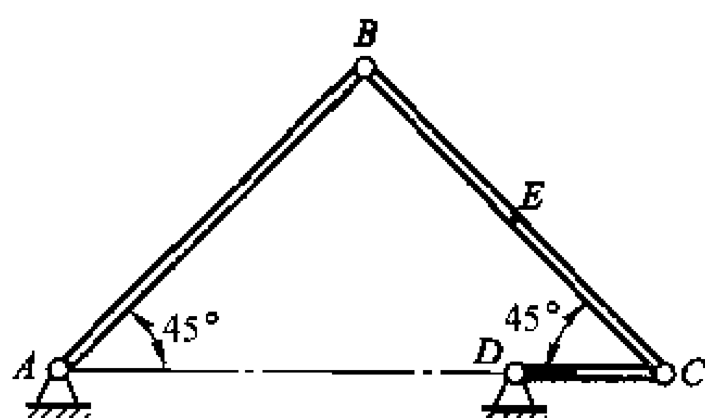


题 2 1(5)图

2-2　图示长为0.2 m的直杆，一端沿水平线运动，方向如图示一端沿铅垂线运动，分别在其端部 A 和杆件中点 C，以及在其端部 A 和 B 分别建立两个连体基。试求两个连体基位形坐标之间的关系。



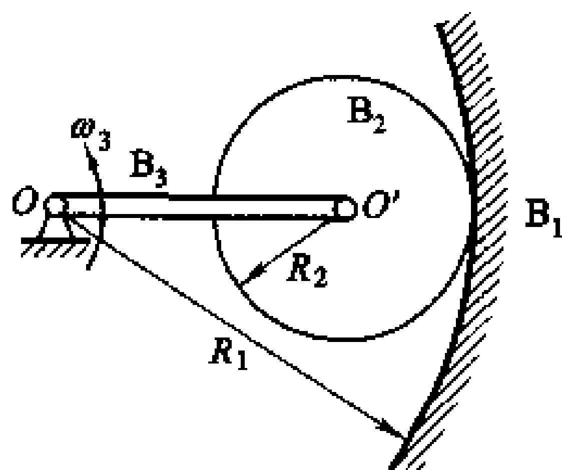
题 2-2 图



题 2-3 图

2-3　四连杆机构中 $AB=BC=b$，$CD=\frac{\sqrt{2}}{4}b$，$AD=\frac{3\sqrt{2}}{4}b$，曲柄 CD 重合于 AD 延长线。在连杆端点 B 和中点 E，以及端点 B 和端点 C 建立两个连体基，求两个连体基位形坐标之间的关系。

2-4　图示一对内接齿轮，齿轮 B_1 与机座固结，齿轮 B_2 由连杆 B_3 带动在齿轮 B_1 上滚动。已知连杆 B_3 相对机座(齿轮 B_1)的角速度为 ω_3，齿轮 B_1 与齿轮 B_2 的节圆半径分别为 R_1 与 R_2。试求齿轮 B_2 相对于连杆 B_3 的角速度。



题 2-4 图

2-5　试分别用瞬时矢量分析方法和瞬时解析分析方法解以下习题：

(1) 杆 AB 长 2 m，其一端 A 沿地面，另一端 B 沿斜面运动如图示，设 A 点作匀速运动 $v_A=2$ m/s，求当 $\theta=30°$时，B 点的速度与杆的角速度；B 点的加速度与杆的角加速度。

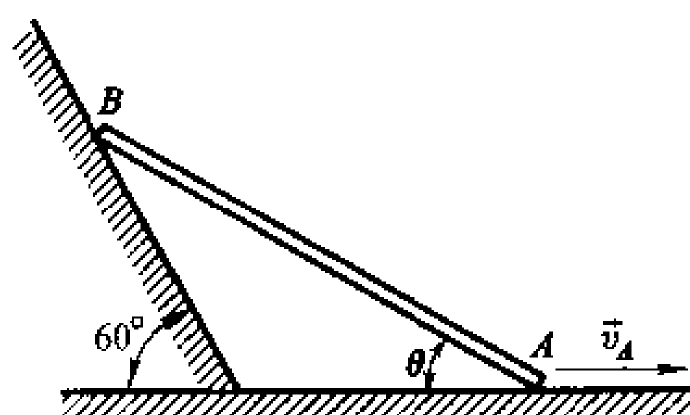
(2) 图示一铰接四连杆机构在某一瞬时的位置，设 AB 作匀角速度转动 $\omega=4$ rad/s，求 BC 杆与 CD 杆的角速度和角加速度。

(3) 图示一机构在某瞬时的位置，已知 $AB=BC=O'B=2OA=r$，OA 以角速度 ω 转动，求此瞬时 C 点的速度和加速度。

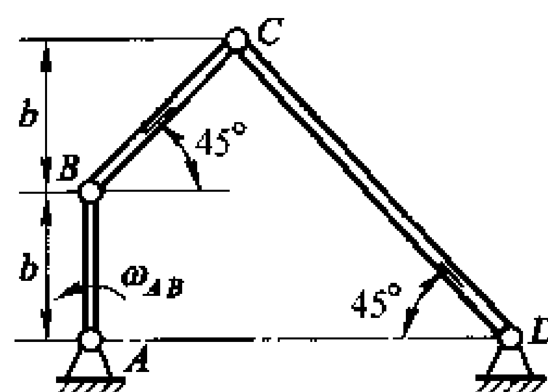
(4) 图示机构中，已知 AB 相对杆 OA 的角速度为 $\omega_r=4$ rad/s，相对角加速度为 0，求此瞬时 OA 杆的角速度和角加速度。

(5) 图示机构中，$AB=0.5$ m，$OA=1$ m，$\omega_{AB}=7$ rad/s，$\alpha_{AB}=0$，求当 $\theta=60°$时，BC 杆在导管中运动的速度与加速度。

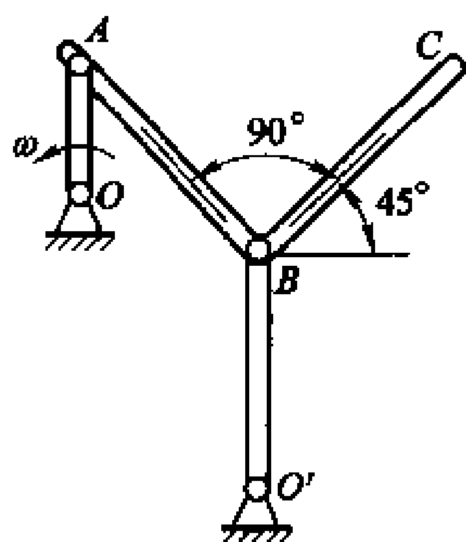
(6) 图示机构中 $AB=CD=EF=r$，设在图示位置时 $\theta=\varphi=45°$，EF 杆的角速度为 ω，角加速度为 0，求此时 AB 杆的角速度与角加速度。



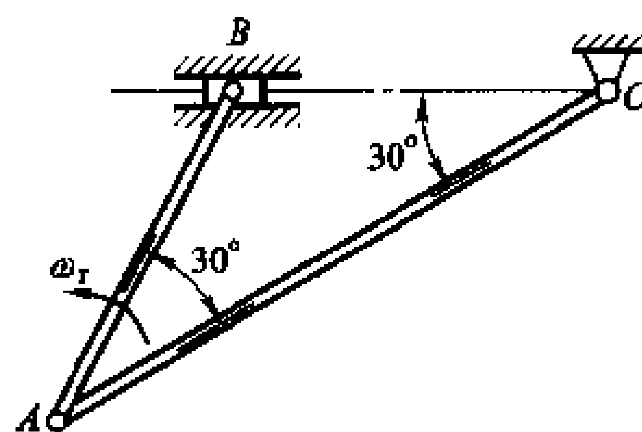
题 2－5(1)图



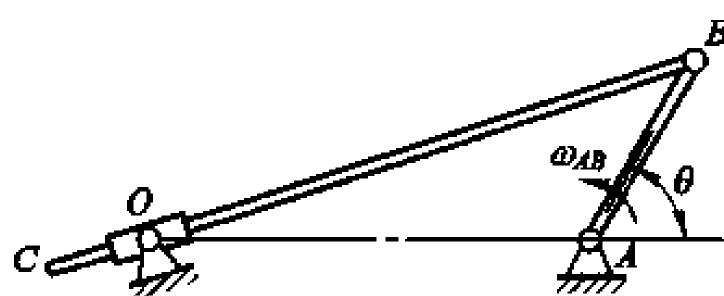
题 2－5(2)图



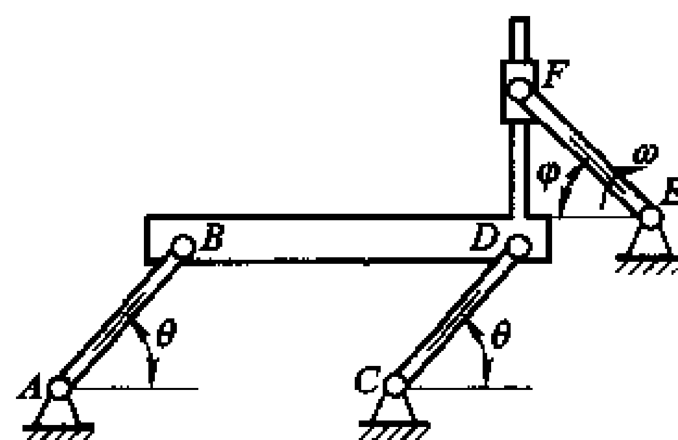
题 2－5(3)图



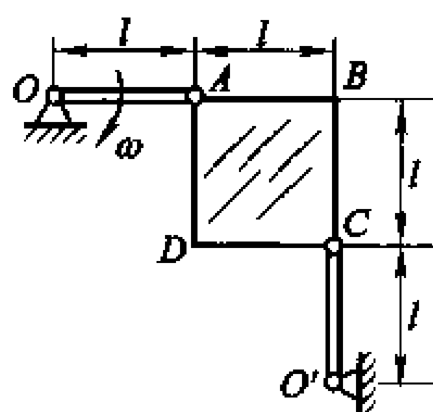
题 2－5(4)图



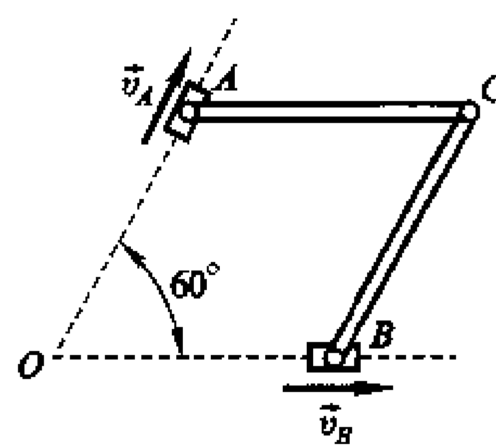
题 2－5(5)图



题 2－5(6)图



题 2－6 图



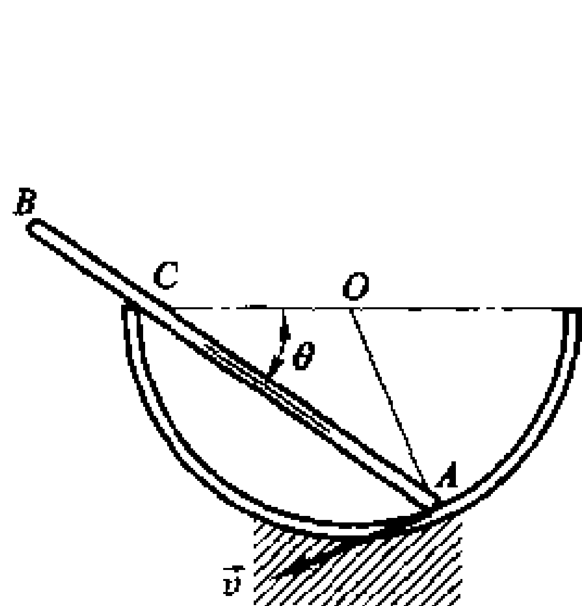
题 2－7 图

2-6　正方形板 $ABCD$ 与杆 OA，$O'C$ 铰接如图示。设在图示位置 $\omega_{OA}=\omega$，$\alpha_{OA}=0$，试找出板的速度瞬心并求速度瞬心的加速度。

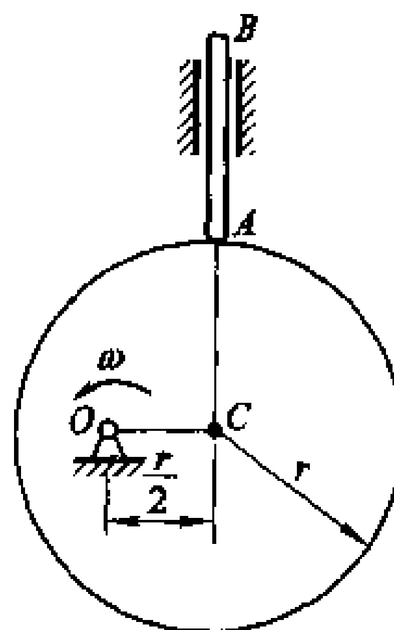
2-7　长 l 的两杆 AC 与 BC 铰接后，其两端 A 与 B 分别沿两直线运动如图示。设 $v_A=v$，$v_B=2v$，求当 $OACB$ 成平行四边形时 C 点的加速度。

2-8　杆 AB 放在一半径为 r 的半圆槽内，其一端 A 以匀速 $\vec{v}$ 运动如图示。求 AB 杆上与半圆槽相接触的一点 C 的速度与加速度(以 θ 表示)。

2-9　图示一偏心圆盘凸轮机构在某瞬时的位置。设凸轮以匀角速度 ω 转动，求此时 AB 杆的速度与加速度。



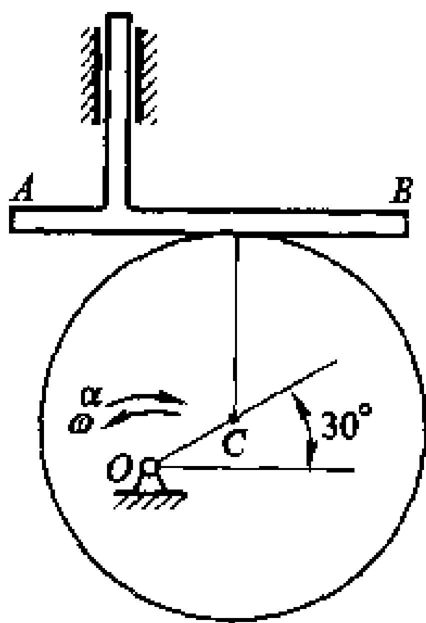
题 2-8 图



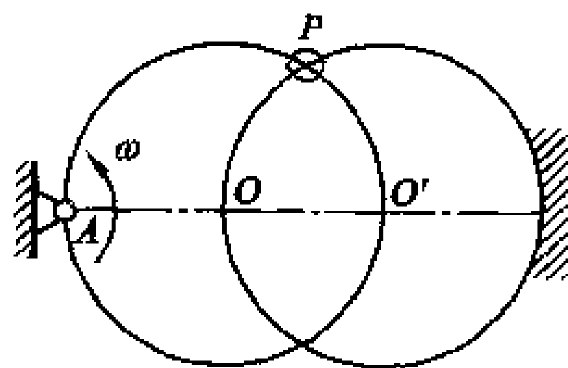
题 2-9 图

2-10　偏心圆轮在图示位置时的角速度 $\omega=4\ \mathrm{rad/s}$，角加速度 $\alpha=2\ \mathrm{rad/s^2}$，减速转动圆盘的半径 $r=0.2\ \mathrm{m}$，偏心距 $\overline{OC}=0.1\ \mathrm{m}$，求导板 AB 的速度与加速度。

2-11　半径为 r 的两圆相交，如图示。今圆 O' 固定，圆 O 绕其圆周上一点 A 以匀角速 ω 转动，求当 A，O 和 O' 位于同一直线上时两圆交点上小环 P 的速度与加速度。



题 2-10 图



题 2-11 图

第 3 章　刚体系运动学及其计算机辅助分析

第 2 章介绍了刚体的位形描述、点的运动学、刚体与刚体系运动学瞬时分析的矢量方法与解析方法。本章将介绍刚体系运动学分析的一般方法及其计算机辅助分析基础，重点介绍刚体系各刚体的位形、位形改变的速度与加速度等随时间变化过程分析的基本原理与方法。

最后，本章还将介绍机械系统运动学计算机辅助分析的过程。包括工程对象的刚体系运动学模型的建立、系统参数的定义与利用分析软件处理运动学问题。本书所附的软件《理论力学问题求解器》为读者提供实践的机会。

3.1　刚体系位形的描述　约束方程

首先以如图 3－1 所示的平面三杆系统为例介绍刚体系的位形描述的问题。

对于 N 个刚体作平面运动的刚体系，首先在系统的运动平面上定义一公共的参考基，记为 $\underline{e} = (\vec{x} \quad \vec{y})^{\mathrm{T}}$。在刚体 B_i（$i = 1,\cdots,N$）上取某一点 C_i（如质心）为基点建立一连体基 $\underline{e}^i = (\vec{x}^i \quad \vec{y}^i)^{T}$。将该基点相对于公共基的坐标记为 (x_i, y_i)，连体基的基矢量 $\vec{x}^i$ 与公共基的基矢量 $\vec{x}$ 正向的夹角记为 φ_i（见图 3－1）。它们将确定了刚体 B_i 的位形。这些参数构成描述刚体 B_i 的位形坐标，记为如下坐标列阵：

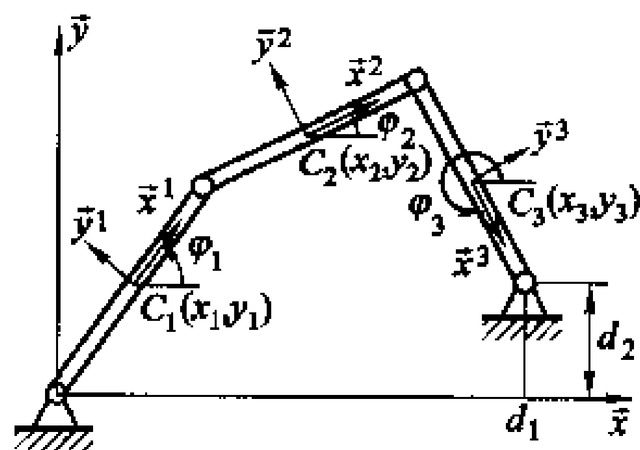


图 3－1　笛卡尔坐标描述刚体系位形

$$\boldsymbol{q}_i = (x_i \quad y_i \quad \varphi_i)^{\mathrm{T}} \quad (i = 1,\cdots,N) \tag{3.1-1}$$

这 N 个列阵组集，构成了描述该刚体系位形的坐标列阵

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{3.1-2}$$

可见，该坐标阵坐标个数为 $n = 3N$。对于图 3－1 所示系统，位形坐标阵有 9 个坐标构成，即

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}} \tag{3.1-3}$$

对于上述平面三杆系统也可按如下的方式描述其位形。

首先如图 3-2 所示建立各刚体的连体基。刚体 B_1 连体基 $\vec{e}^1$ 的基点取在**转动铰**的**铰点**处，其在基 $\vec{e}$ 上的坐标阵为零阵，刚体 B_1 的位形可由角 φ_1 确定。刚体 B_2 连体基 $\vec{e}^2$ 的基点取在与 B_1 的转动铰的铰点处，其在 $\vec{e}^1$ 的坐标阵为 $(l_1 \quad 0)^T$（其中 l_1 为 B_1 的杆长）。可见该基点的坐标阵为常值阵，刚体 B_2 相对于 B_1 的位形可由角 φ_2 确定，该角为 B_2 的基矢量 $\vec{x}^2$ 相对于 B_1 的基矢量 $\vec{x}^1$ 的夹角。类似地，刚体 B_3 连体基 $\vec{e}^3$ 的基点取在与 B_2 的转动铰的铰点处，其在 $\vec{e}^2$ 的坐标阵为 $(l_2 \quad 0)^T$（其中 l_2 为 B_2 的杆长）。定义 B_2 的基矢量 $\vec{x}^3$ 相对于 B_2 的基矢量 $\vec{x}^2$ 的夹角为 φ_3，由于该基点的坐标阵为常值阵，刚体 B_3 相对于 B_2 的位形可由角 φ_3 确定。显然，刚体系的位形完全由如下位形坐标阵确定：

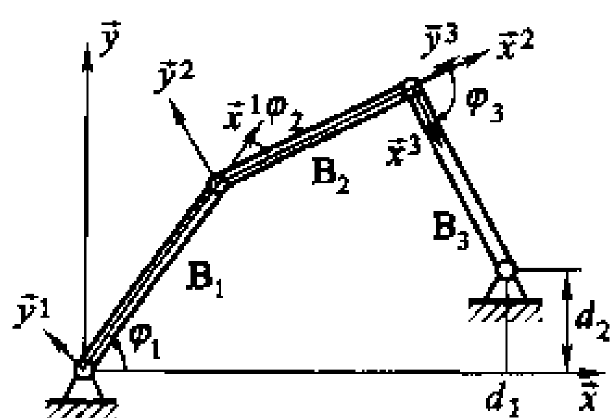


图 3-2 拉格朗日坐标描述刚体系位形

$$q = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^T \tag{3.1-4}$$

这两种描述系统位形坐标的主要区别为前者所有刚体的位形均相对于公共基定义，后者各刚体的位形是分别相对于不同参考基进行定义。为了区分，现将前者定义的位形坐标称为刚体系的**笛卡尔**(Descartes)**位形坐标阵**；后者称为刚体系的**拉格朗日**(J. L. Lagrange)**位形坐标阵**。读者不难看出，对于任意一个刚体系，利用笛卡尔位形坐标描述位形比较规范，只要定义好公共基与连体基，坐标阵公式(3.1-2)的定义是统一的。如果用拉格朗日坐标定义刚体系的位形，同一个系统则因人而宜可能有多种可能性。

图 3-3 为另一种定义三杆系统位形的方法。各刚体连体基的基点在铰点上，各刚体的方位角是相对于公共基的。由于各基的基点在对应的连体基上的坐标阵为常值阵，坐标阵

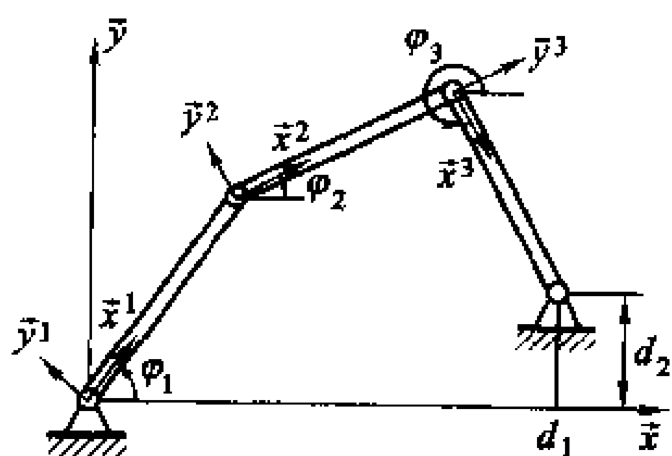


图 3-3 另一种笛卡尔坐标描述刚体系位形

$$q = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^T \tag{3.1-5}$$

同样可描述系统的位形。式(3.1-5)也可看作一种笛卡尔坐标。它是一般笛卡尔坐标公式(3.1-3)的特殊情况。严格地讲，这是两类坐标混合的描述方法。坐标阵公式(3.1-5)的定义也带有一些人为参与的因素。

由于系统中某些刚体间存在铰(或运动副)，它们限制了刚体的运动。这样，

某铰的邻接刚体中，一个刚体的运动将部分地牵制了另一刚体的运动。即在一般情况下，描述系统位形的坐标并不完全独立，在运动过程中，它们之间存在某些关系。这些关系的解析表达式称为**约束方程**。

虽然描述刚体系的位形坐标选取方法多种多样，但是描述某刚体系位形的最小坐标数是不变的。这个不变数为该系统的**自由度数**(简称**自由度**)，记为 δ。对于图3-3所示三杆系统定义的3个坐标($\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$)相互不独立，存在如下2个代数约束方程：

$$\left.\begin{aligned} l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 - d_1 = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 - d_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.1-6}$$

当 φ_1 给定，由此方程组可解出 φ_2 与 φ_3。坐标 φ_1 将完全确定了系统的位形。该系统的自由度为1。

任意的一个刚体系如果自由度为 δ，则该系统只需 δ 个坐标即完全能描述该系统的位形。这 δ 个坐标称为该系统的**独立坐标**或**广义坐标**，它们构成该系统的一**独立坐标阵**或**广义坐标阵**，记为 $\boldsymbol{w}$。其余的坐标构成的坐标阵称为**非独立坐标阵**，记为 $\boldsymbol{u}$。对于上述图3-3所示的系统，$\boldsymbol{w}=(\varphi_1)$，$\boldsymbol{u}=(\varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$。经对坐标次序的排列，坐标阵总可表达为

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{3.1-7}$$

系统约束方程组一般可表达为

$$\boldsymbol{\Phi} \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0} \tag{3.1-8}$$

或显含时间 t

$$\boldsymbol{\Phi} \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t) = \boldsymbol{0} \tag{3.1-9}$$

式中，

$$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_s)^{\mathrm{T}} \tag{3.1-10}$$

s 为约束方程的个数。这种只含坐标与时间的约束方程描述的约束称为**完整约束**。对于图3-3的系统，$s=2$，有

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 - d_1 = 0 \\ \Phi_2 &= l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 - d_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.1-11}$$

然而，有些约束的约束方程可能还与坐标的一阶导数有关，

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t) = \boldsymbol{0}$$

当这些约束方程不可积时，这种约束称为**非完整约束**。不显含时间的约束方程相应的约束称为**定常约束**，反之称为**非定常约束**。有时约束方程为一不等式方程，这种约束称为**单侧约束**，故通常约束方程为一等式的约束为**双侧约束**。工程中大多数运动副均为完整约束，如不特别指出，本书所提的约束均指完整约束。

对于只含完整约束的刚体系，系统的自由度数等于系统的坐标数减去系统独立的约束方程的个数，如果上述的 s 个约束方程相互独立，系统的坐标数为

n，即有

$$\delta = n - s \tag{3.1-12}$$

例如图 3－3 所示的系统，系统的坐标数为 $n=3$，系统的自由度数 $\delta=3-2=1$。

如式(3.1－6)可见，约束方程通常为系统坐标的非线性代数方程。将式(3.1－9)对时间求导有

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Phi}_t = \boldsymbol{0} \tag{3.1-13}$$

或改写为

$$\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}} = - \boldsymbol{\Phi}_t \tag{3.1-13'}$$

式中，[1]

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad \cdots \quad \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} \right)^{\mathrm{T}} \in \mathscr{R}^{s\times 1} \tag{3.1-14}$$

而

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_s}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_s}{\partial q_n} \end{pmatrix} \in \mathscr{R}^{s\times n} \tag{3.1-15}$$

称为约束方程(3.1－9)的**雅可比矩阵**或简称约束方程的**雅可比**(C. G. J. Jacobi)。它与 $\boldsymbol{\Phi}_t$ 的元素均为系统坐标与时间的函数。方程(3.1－13)与(3.1－13′)称为系统的**速度约束方程**，它们为系统位形坐标导数的线性代数方程组。对于定常系统，雅可比矩阵不显含时间 t，有 $\boldsymbol{\Phi}_t=\boldsymbol{0}$，此时该代数方程组为**齐次方程**。

对于图 3－3 的系统，由约束方程(3.1－6)的左函数(3.1－11)，根据式(3.1－15)有系统约束方程的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\varphi_1 & -l_2 \sin\varphi_2 & -l_3 \sin\varphi_3 \\ l_1 \cos\varphi_1 & l_2 \cos\varphi_2 & l_3 \cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

将式(3.1－13)对时间求导，可表示为

$$\ddot{\boldsymbol{\Phi}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Phi}_q \ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0} \tag{3.1-16}$$

或改写为

$$\boldsymbol{\Phi}_q \ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\gamma} \tag{3.1-16'}$$

式(3.1－16)与(3.1－16′)中，考虑到 $\boldsymbol{\Phi}_{tq}=\boldsymbol{\Phi}_{qt}$ 有

---

[1] $\mathscr{R}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 的实数空间，在这里表示该矩阵为 $m\times n$ 阶。

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} -(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}} - 2\boldsymbol{\Phi}_{qt}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\Phi}_{tt} \in \mathscr{R}^{s\times 1} \tag{3.1-17}$$

其元素为系统坐标及其导数和时间的函数。方程(3.1-16)与(3.1-16′)称为系统的**加速度约束方程**,它们为系统坐标二阶导数的线性代数方程组。

对于图3-3的系统,由约束方程(3.1-6)的左函数式(3.1-11),考虑到$\boldsymbol{\Phi}_t = \boldsymbol{0}$,根据式(3.1-17)有加速度约束方程的右函数为

$$\boldsymbol{\gamma} = -(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} l_1\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2 + l_3\dot{\varphi}_3^2\cos\varphi_3 \\ l_1\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2 + l_3\dot{\varphi}_3^2\sin\varphi_3 \end{pmatrix}$$

约束方程的建立通常有两种方法。一种是总体方法,另一种为局部方法。下面以上述三杆系统为例,简单说明这两种方法的特点。

首先将系统的各构件按一般位形画出示意图,如图3-3所示。总体方法是按其总体的几何关系写出位形坐标的约束方程。根据两支座在x与y两个方向的相对距离保持不变的条件,可列出两个约束方程,即式(3.1-6)。

局部方法是从每个铰所关联的刚体偶对局部出发,根据铰的性质建立邻接刚体的坐标间的约束方程。现按一般的笛卡尔坐标公式(3.1-3)描述平面运动刚体的位形。对于转动铰,铰点在运动过程中始终保持重合。这样对于铰A与B有如下相似的矢量关系(见图3-4):

$$(\vec{r}_2 + \vec{\rho}_{2A}) - (\vec{r}_1 + \vec{\rho}_{1A}) = \vec{0}$$

$$(\vec{r}_3 + \vec{\rho}_{3B}) - (\vec{r}_2 + \vec{\rho}_{2B}) = \vec{0}$$

其中:$\vec{r}_i\,(i=1,2,3)$为杆B_i连体基基点C_i的矢径;$\vec{\rho}_{iA}$为杆B_i上C_i指向铰A的连体矢径(其他类同)。令$\vec{r}_C$与$\vec{r}_D$为支座C与D的矢径,对于铰C与D有类似的矢量关系

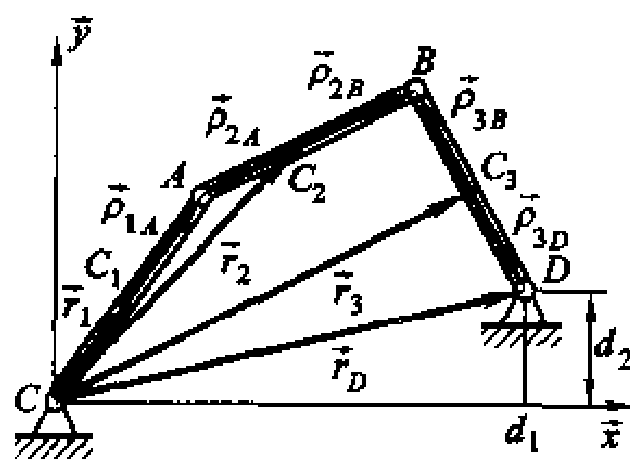


图3-4 局部方法建立约束方程

$$(\vec{r}_1 + \vec{\rho}_{1C}) - \vec{r}_C = \vec{0}$$

$$\vec{r}_D - (\vec{r}_3 + \vec{\rho}_{3D}) = \vec{0}$$

上述每个矢量式在公共基上有两个标量坐标式,它们组成系统的约束方程组,即

$$A:\ \begin{cases} x_2 - \dfrac{l_2}{2}\cos\varphi_2 - x_1 - \dfrac{l_1}{2}\cos\varphi_1 = 0 \\ y_2 - \dfrac{l_2}{2}\sin\varphi_2 - y_1 - \dfrac{l_1}{2}\sin\varphi_1 = 0 \end{cases} \tag{3.1-18a}$$

$$B:\ \begin{cases} x_3 - \dfrac{l_3}{2}\cos\varphi_3 - x_2 - \dfrac{l_2}{2}\cos\varphi_2 = 0 \\ y_3 - \dfrac{l_3}{2}\sin\varphi_3 - y_2 - \dfrac{l_2}{2}\sin\varphi_2 = 0 \end{cases} \tag{3.1-18b}$$

$$C: \quad \begin{cases} x_1 - \dfrac{l_1}{2}\cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 - \dfrac{l_1}{2}\sin\varphi_1 = 0 \end{cases} \tag{3.1-18c}$$

$$D: \quad \begin{cases} d_1 - x_3 - \dfrac{l_3}{2}\cos\varphi_3 = 0 \\ d_2 - y_3 - \dfrac{l_3}{2}\sin\varphi_3 = 0 \end{cases} \tag{3.1-18d}$$

以上 8 个约束方程相互独立，系统的坐标个数 $n=9$，系统的自由度为 $\delta=9-8=1$。

比较这两种建立系统约束方程组的方法可知，局部方法统一由铰的偶对刚体出发，对于同一类铰，约束方程有共性。系统的约束方程是各铰的约束方程的组集。然而，总体方法则缺少这种共性，方程的建立更多的依赖于读者的经验与分析问题的能力。对于较复杂的系统，总体方法往往会漏列或多列约束方程。而局部方法是一种程式化的方法，故不会出现这种情况。不过，局部方法得到的约束方程的个数可能远大于总体方法得到的。综上所述，采用一般形式的笛卡尔坐标与建立约束方程的局部方法便于计算机建立刚体系统运动学关系。不过，局部方法得到的约束方程的个数偏大是它的缺点。

3.2 运动学分析的一般方法及计算机辅助分析基础

刚体系的运动学分析是讨论系统各刚体的位形、速度与加速度间的关系。与上一章介绍的运动学瞬时分析的矢量方法与解析方法不同，下面将给出刚体系运动学分析的一般方法，通过这种方法将得到刚体系位形、速度与加速度的时间历程，当然也包括某瞬时值。该方法的依据是系统位置、速度与加速度三个层次上的约束方程(3.1-9)，(3.1-13)与(3.1-16)。

对于有 n 个坐标，s 个独立约束方程的系统，自由度为 δ。系统有 δ 个独立坐标。运动学分析也就是在已知这 δ 个坐标、速度与加速度的时间历程的情况下，找到其余的 $n-\delta$(即 s)个坐标、速度与加速度的时间历程。

解决此类运动学分析有**坐标分离方法**与**附加驱动约束方法**两种。下面分别予以介绍。

3.2.1 坐标分离方法

对于有 n 个坐标，s 个独立约束方程的系统，坐标阵

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathscr{R}^{n\times 1} \tag{3.2-1}$$

式中有独立坐标阵 $\boldsymbol{w}\in\mathscr{R}^{\delta\times 1}$与非独立坐标阵 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{R}^{s\times 1}$两部分。约束方程(3.1-

9)可改写为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},t)=\boldsymbol{0} \tag{3.2-2}$$

由式(3.2-1),约束方程(3.2-2)的雅可比矩阵可写成

$$\boldsymbol{\Phi}_q=(\boldsymbol{\Phi}_u\quad \boldsymbol{\Phi}_w) \tag{3.2-3}$$

式中,$\boldsymbol{\Phi}_u\in\mathscr{R}^{s\times s}$与$\boldsymbol{\Phi}_w\in\mathscr{R}^{s\times\delta}$分别为约束方程关于非独立坐标$\boldsymbol{u}$与独立坐标阵$\boldsymbol{w}$的偏导数。

由高等代数的隐函数定理[①]知,如果s个约束方程相互独立,当$t=t^*$与$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^*$时,$\boldsymbol{\Phi}_u$在$\boldsymbol{w}^*$与$\boldsymbol{u}^*$处非奇异,则在$\boldsymbol{w}^*$的某邻域内有唯一解$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w})$。

通常,式(3.2-2)是一非线性代数方程组,不可能解出$\boldsymbol{u}$关于$\boldsymbol{w}$的显式,故系统的位置分析归结为采用**迭代方法**对方程(3.2-2)进行数值解。解非线性代数方程常用的方法为**牛顿**(I. Newton)-**拉费森**(Raphson)**方法**(N-R**法**)(见附录B.2)。该方法首先选定一个非独立坐标$\boldsymbol{u}$的近似解$\boldsymbol{u}^{(0)}$,作为方程(3.2-2)的迭代初值。在正常的情况下,N-R方法将经过多次迭代,逼近精确解$\boldsymbol{u}$。

将式(3.2-3)代入式(3.1-13)与式(3.1-16),经整理,分别得到分离变量形式的速度约束与加速度约束方程,即

$$\boldsymbol{\Phi}_u\dot{\boldsymbol{u}}=-\boldsymbol{\Phi}_w\dot{\boldsymbol{w}}-\boldsymbol{\Phi}_t \tag{3.2-4}$$

与

$$\boldsymbol{\Phi}_u\ddot{\boldsymbol{u}}=-\boldsymbol{\Phi}_w\ddot{\boldsymbol{w}}+\boldsymbol{\gamma} \tag{3.2-5}$$

已知独立速度$\dot{\boldsymbol{w}}$值,方程(3.2-4)为待求非独立速度$\dot{\boldsymbol{u}}$的线性代数方程组。对于独立的约束方程组,方程(3.2-4)的系数矩阵$\boldsymbol{\Phi}_u$满秩。非独立速度$\dot{\boldsymbol{u}}$有唯一解。同样,当独立加速度$\ddot{\boldsymbol{w}}$值为已知时,方程(3.2-5)为待求非独立加速度$\ddot{\boldsymbol{u}}$的线性代数方程组。由式(3.1-14)与(3.1-15)知,$\boldsymbol{\Phi}_u$,$\boldsymbol{\Phi}_w$和$\boldsymbol{\Phi}_t$与时间t与坐标$\boldsymbol{q}$有关,故速度分析前需先进行位置分析。对于独立的约束方程组,非独立加速度$\ddot{\boldsymbol{u}}$有唯一解。由式(3.1-17)知,$\boldsymbol{\gamma}$项除了与时间t与坐标$\boldsymbol{q}$有关外,还包含速度$\dot{\boldsymbol{q}}$项,故加速度分析前需先进行速度分析。综上所述,速度与加速度分析归结为求解非齐次线性代数方程组(3.2-4)与(3.2-5),为此可利用**高斯**(Gauss)**消去法**(见附录B.1)求数值解。

根据上述位置、速度与加速度的分离变量的关系式(3.2-2),(3.2-4)与(3.2-5),在时间区间$[t_0\ t_{end}]$中进行运动学分析,可按如下的计算过程进行:

(1) 将时间区间$[t_0\ t_{end}]$离散,以步长h分为若干时间点,$t_0,t_1,t_2,\cdots,t_n$,其中$t_n=t_{end}$,$t_{i+1}=t_i+h$。

(2) 计数器$i=0$,对于时间t_0,独立坐标$\boldsymbol{w}_0$,速度$\dot{\boldsymbol{w}}_0$与加速度$\ddot{\boldsymbol{w}}_0$已知

① 见高等代数书

① 设定非独立坐标 $\boldsymbol{u}$ 的迭代初值 $\boldsymbol{u}_0^{(0)}$，利用 N－R 法，对于给定的迭代精度，对方程(3.2－1)经迭代得到时间 t_0 非独立坐标 $\boldsymbol{u}$ 的值 $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}(t_0)$。

② 将 $t_0,\boldsymbol{w}_0$ 与 $\boldsymbol{u}_0$ 代入式(3.1－15)与(3.1－14)计算 $\boldsymbol{\Phi}_{u0}=\boldsymbol{\Phi}_u(\boldsymbol{u}_0\quad \boldsymbol{w}_0\quad t_0)$，$\boldsymbol{\Phi}_{w0}=\boldsymbol{\Phi}_w(\boldsymbol{u}_0\quad \boldsymbol{w}_0\quad t_0)$ 与 $\boldsymbol{\Phi}_{t0}=\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{u}_0\quad \boldsymbol{w}_0\quad t_0)$。将它们与 $\dot{\boldsymbol{w}}_0$ 代入式(3.2－4)，求解该线性代数方程，得到 $\dot{\boldsymbol{u}}_0$。

③ 将 $t_0,\boldsymbol{w}_0,\boldsymbol{u}_0,\dot{\boldsymbol{w}}_0$ 与 $\dot{\boldsymbol{u}}_0$ 代入式(3.1－17)计算 $\boldsymbol{\gamma}_0=\boldsymbol{\gamma}(\dot{\boldsymbol{u}}_0\ \dot{\boldsymbol{w}}_0\ \boldsymbol{u}_0\ \boldsymbol{w}_0\ t_0)$。将它与 $\boldsymbol{\Phi}_{u0},\boldsymbol{\Phi}_{w0},\ddot{\boldsymbol{w}}_0$ 代入式(3.2－5)，求解该线性代数方程，得到 $\ddot{\boldsymbol{u}}_0$。

(3) 计数器 $i=i+1$，对于时刻 t_i，独立坐标 $\boldsymbol{w}_i$，速度 $\dot{\boldsymbol{w}}_i$ 与加速度 $\ddot{\boldsymbol{w}}_i$ 已知

① 设定非独立坐标 $\boldsymbol{u}$ 的迭代初值 $\boldsymbol{u}_i^{(0)}$，通常可利用上一步迭代的结果作为此初值，即令 $\boldsymbol{u}_i^{(0)}=\boldsymbol{u}_{i-1}$。然后利用 N－R 法，对于给定的迭代精度，对方程(3.2－1)经迭代得到时刻 t_i 非独立坐标 $\boldsymbol{u}$ 的值 $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}(t_i)$。

② 将 $t_i,\boldsymbol{w}_i$ 与 $\boldsymbol{u}_i$ 代入式(3.1－15)与(3.1－14)计算 $\boldsymbol{\Phi}_{ui}=\boldsymbol{\Phi}_u(\boldsymbol{u}_i\ \boldsymbol{w}_i\ t_i)$，$\boldsymbol{\Phi}_{wi}=\boldsymbol{\Phi}_w(\boldsymbol{u}_i\quad \boldsymbol{w}_i\quad t_i)$ 与 $\boldsymbol{\Phi}_{ti}=\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{u}_i\quad \boldsymbol{w}_i\quad t_i)$。将它们与 $\dot{\boldsymbol{w}}_i$ 代入式(3.2－4)，求解该线性代数方程，得到 $\dot{\boldsymbol{u}}_i$。

③ 将 $t_i,\boldsymbol{w}_i,\boldsymbol{u}_i,\dot{\boldsymbol{w}}_i$ 与 $\dot{\boldsymbol{u}}_i$ 代入式(3.1－17)计算 $\boldsymbol{\gamma}_i=\boldsymbol{\gamma}(\dot{\boldsymbol{u}}_i\quad \dot{\boldsymbol{w}}_i\quad \boldsymbol{u}_i\quad \boldsymbol{w}_i\quad t_i)$。将它与 $\boldsymbol{\Phi}_{ui},\boldsymbol{\Phi}_{wi},\ddot{\boldsymbol{w}}_i$ 代入式(3.2－5)，求解该线性代数方程，得到 $\ddot{\boldsymbol{u}}_i$。

(4) 判断 $t_i<t_{end}$。如果是则返回(3)，否则计算结束。

[**例 3.2－1**] 图 3－2 所示的系统，令其参数为 $l_1=0.1\text{ m},l_2=0.4\text{ m},l_3=0.3\text{ m},d_1=0.4\text{ m},d_2=0.1\text{ m}$。杆 1 以定角速度 $\omega=2\pi$ rad/s 逆时针旋转，初始杆 1 的初始方位 φ_1 为 $\pi/4$ rad，要求分析 $t[0,2]$s 杆 2 与杆 3 的方位。

解：将系统的参数代入约束方程(3.1－6)，有

$$\left.\begin{aligned}0.1\cos\varphi_1+0.4\cos\varphi_2+0.3\cos\varphi_3-0.4&=0\\0.1\sin\varphi_1+0.4\sin\varphi_2+0.3\sin\varphi_3-0.1&=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

分离变量，$\boldsymbol{w}=(\varphi_1)$，$\boldsymbol{u}=(\varphi_2\ \varphi_3)^{\mathrm{T}}$，方程(1)，可改写成如下方程：

$$\left.\begin{aligned}0.4\cos\varphi_2+0.3\cos\varphi_3&=-0.1\cos\varphi_1+0.4\\0.4\sin\varphi_2+0.3\sin\varphi_3&=-0.1\sin\varphi_1+0.1\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

约束方程(1)的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{pmatrix}-0.1\sin\varphi_1 & -0.4\sin\varphi_2 & -0.3\sin\varphi_3\\0.1\cos\varphi_1 & 0.4\cos\varphi_2 & 0.3\cos\varphi_3\end{pmatrix}\tag{3}$$

其中，

$$\boldsymbol{\Phi}_u=\begin{pmatrix}-0.4\sin\varphi_2 & -0.3\sin\varphi_3\\0.4\cos\varphi_2 & 0.3\cos\varphi_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\Phi}_w=\begin{pmatrix}-0.1\sin\varphi_1\\0.1\cos\varphi_1\end{pmatrix}\tag{4}$$

加速度约束方程的右项为

$$\gamma = -(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 0.1\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1 + 0.4\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2 + 0.3\dot{\varphi}_3^2\cos\varphi_3 \\ 0.1\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 + 0.4\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2 + 0.3\dot{\varphi}_3^2\sin\varphi_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

将式(4)与(5)代入式(3.2−4)与(3.2−5)，得到系统的速度与加速度约束方程

$$\boldsymbol{\Phi}_u\begin{pmatrix}\dot{\varphi}_2\\ \dot{\varphi}_3\end{pmatrix} = -\boldsymbol{\Phi}_w\dot{\varphi}_1 \tag{6}$$

与

$$\boldsymbol{\Phi}_u\begin{pmatrix}\ddot{\varphi}_2\\ \ddot{\varphi}_3\end{pmatrix} = -\boldsymbol{\Phi}_w\ddot{\varphi}_1 + \boldsymbol{\gamma} \tag{7}$$

由已知条件，独立变量、速度与加速度的时间历程分别为 $\varphi_1 = \pi/4 + \omega t$，$\dot{\varphi}_1 = \omega$，$\ddot{\varphi}_1 = 0$。给定时间 t，φ_1 确定。预估 φ_2 与 φ_3 的近似值，由约束方程(3.2−7)进行迭代，得到 φ_2 与 φ_3 值。然后，将 φ_1，φ_2 与 φ_3 的当前值代入式(3.2−9)，计算 $\boldsymbol{\Phi}_u$ 与 $\boldsymbol{\Phi}_w$。由 $\dot{\varphi}_1 = \omega$ 解线性代数方程(6)得到 $\dot{\varphi}_2$，$\dot{\varphi}_3$。最后，将 φ_1，φ_2，φ_3 与 $\dot{\varphi}_1$，$\dot{\varphi}_2$，$\dot{\varphi}_3$ 的当前值代入式(5)，计算 γ。再由 $\ddot{\varphi}_1 = 0$ 解线性代数方程(7)得到 $\ddot{\varphi}_2$，$\ddot{\varphi}_3$。这就完成该系统时刻 t 的位置、速度与加速度的分析。表3.2−1给出了不同时刻的分析结果。

表3.2−1 图3−2所示系统的运动学分析

t/s	φ_1/rad	φ_2/rad	φ_3/rad	$\dot{\varphi}_1$/rad·s^{-1}	$\dot{\varphi}_2$/rad·s^{-1}	$\dot{\varphi}_3$/rad·s^{-1}	$\ddot{\varphi}_1$/rad·s^{-2}	$\ddot{\varphi}_2$/rad·s^{-2}	$\ddot{\varphi}_3$/rad·s^{-2}
0.000	0.785	0.915	−1.283	6.283	1.704	−0.333	0.000	7.811	20.809
0.200	2.042	0.742	−1.045	6.283	−0.088	2.066	0.000	6.814	2.679
0.400	3.299	0.853	−0.667	6.283	1.155	1.344	0.000	5.286	−8.242
0.600	4.555	1.145	−0.584	6.283	1.448	−0.564	0.000	−4.047	−10.066
0.800	5.812	1.255	−0.899	6.283	−0.781	−2.479	0.000	−15.880	−5.524
1.000	7.069	0.915	−1.283	6.283	−1.704	−0.333	0.000	7.811	20.809

3.2.2 附加驱动约束方法

对于有 n 个坐标，s 个独立约束方程的系统，若 δ 个独立坐标 $\boldsymbol{w}$ 为时间的已知函数，记

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(t) \tag{3.2-6}$$

上式可认为是对独立坐标 $\boldsymbol{w}$ 的一种非定常约束，称为**驱动约束**，δ 个驱动约束方程记为

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{q},t) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}(t) = 0 \tag{3.2-7}$$

为了有所区别，将原方程(3.1－9)称为**主约束方程**，表达式加上上标“K”。将驱动约束方程与主约束方程组合，构成刚体系的一组新的约束方程组

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{K}} \\ \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{D}} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.2-8}$$

显然，式(3.2－8)是含系统 n 个位形坐标的非线性方程组。该方程的个数为 n，参变量为时间 t，由此方程可解得系统位形坐标的时间历程。将式(3.2－8)对时间求一阶与二阶导数，得到相应的速度与加速度约束方程

$$\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{\Phi}_t \tag{3.2-9}$$

与

$$\boldsymbol{\Phi}_q \ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\gamma} \tag{3.2-10}$$

式(3.2－9)与(3.2－10)分别为关于速度与加速度的 n 阶线性代数方程组。式中

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}} \\ \hat{\boldsymbol{I}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_t^{\mathrm{K}} \\ -\dot{\boldsymbol{w}}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{K}} \\ \ddot{\boldsymbol{w}}(t) \end{pmatrix} \tag{3.2-11}$$

$\boldsymbol{\Phi}_q \in \mathscr{R}^{n\times n}$ 为附加驱动约束后的系统约束方程(3.2－8)的雅可比矩阵，式中矩阵 $\hat{\boldsymbol{I}} \in \mathscr{R}^{\delta\times n}$，该矩阵中与独立坐标对应列的元素为 1，其余为零。如果坐标已经按式(3.2－1)排列，$\boldsymbol{\Phi}_q$ 有如下的形式：

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_u^{\mathrm{K}} & \boldsymbol{\Phi}_w^{\mathrm{K}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_\delta \end{pmatrix} \tag{3.2-12}$$

例如有一系统，其坐标阵为

$$\boldsymbol{q} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4)^{\mathrm{T}}$$

系统的独立的主约束方程为

$$\begin{cases} a_1 q_1^2 + a_2 q_2 q_3 + a_3 q_1 q_4 = 0 \\ a_4 q_1 q_2 + a_5 q_2^2 + a_6 q_3 q_4 + a_7 q_3 = 0 \end{cases}$$

坐标中 q_2 与 q_4 为独立坐标，它们为时间的已知函数

$$\begin{cases} q_2 = b_2 \sin \omega t \\ q_4 = b_4 \cos \omega t \end{cases}$$

将其作为附加驱动约束，由式(3.2－8)，系统的约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t) = \begin{pmatrix} a_1 q_1^2 + a_2 q_2 q_3 + a_3 q_1 q_4 \\ a_4 q_1 q_2 + a_5 q_2^2 + a_6 q_3 q_4 + a_7 q_3 \\ q_2 - b_2 \sin\omega t \\ q_4 - b_4 \cos\omega t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

约束方程的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_1q_1+a_3q_4 & a_2q_3 & a_2q_2 & a_3q_1\\ a_4q_2 & a_4q_1+2a_5q_2 & a_6q_4+a_7 & a_6q_3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

速度与加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_t^{\mathrm{K}}\\ -\dot{\boldsymbol{w}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -b_2\omega\cos\omega t\\ b_4\omega\sin\omega t\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{K}}\\ \ddot{\boldsymbol{w}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a_1\dot{q}_1^2-2a_2\dot{q}_2\dot{q}_3-2a_3\dot{q}_1\dot{q}_4\\ -2a_5\dot{q}_2^2-2a_4\dot{q}_1\dot{q}_2-2a_6\dot{q}_3\dot{q}_4\\ -b_2\omega^2\sin\omega t\\ -b_4\omega^2\cos\omega t\end{pmatrix}$$

如果坐标阵按分离变量的形式公式(3.2－1)排列，即

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(q_1\quad q_3\quad q_2\quad q_4)^{\mathrm{T}}$$

约束方程的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_u^{\mathrm{K}} & \boldsymbol{\Phi}_w^{\mathrm{K}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_1q_1+a_3q_4 & a_2q_2 & a_2q_3 & a_3q_1\\ a_4q_2 & a_6q_4+a_7 & a_4q_1+2a_5q_2 & a_6q_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

应该指出，式(3.2－7)是驱动约束方程最简单的形式。如果考虑到更一般的情况，这 δ 个附加的驱动约束应为系统各坐标间需满足的 δ 个时间的已知函数，即驱动约束的一般的形式为

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{D}}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0}\tag{3.2－13}$$

这样，附加驱动约束方程的雅可比、速度与加速度约束方程的右项的一般形式为

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}\\ \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{D}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Phi}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_t^{\mathrm{K}}\\ \boldsymbol{\Phi}_t^{\mathrm{D}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{K}}\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{D}}\end{pmatrix}\tag{3.2－14}$$

式中，

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{D}}=-(\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{D}}\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}}-2\boldsymbol{\Phi}_{qt}^{\mathrm{D}}\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\Phi}_{tt}^{\mathrm{D}}\tag{3.2－15}$$

[例3.2－2]　利用附加驱动约束的方法写出例3.2－1系统的约束方程。

解： 根据例3.2－1的条件，其驱动约束方程为

$$\Phi^{\mathrm{D}}=\varphi_1-\omega t-\pi/4=0$$

附加到系统原约束方程例3.2－1的式(1)后，系统的新的约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}0.1\cos\varphi_1+0.4\cos\varphi_2+0.3\cos\varphi_3-0.4\\ 0.1\sin\varphi_1+0.4\sin\varphi_2+0.3\sin\varphi_3-0.1\\ \varphi_1-6.28t-0.785\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

约束方程的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{bmatrix} -0.1\sin\varphi_1 & -0.4\sin\varphi_2 & -0.3\sin\varphi_3 \\ 0.1\cos\varphi_1 & 0.4\cos\varphi_2 & 0.3\cos\varphi_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

速度与加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6.28 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0.1\dot\varphi_1^2\cos\varphi_1 + 0.4\dot\varphi_2^2\cos\varphi_2 + 0.3\dot\varphi_3^2\cos\varphi_3 \\ 0.1\dot\varphi_1^2\sin\varphi_1 + 0.4\dot\varphi_2^2\sin\varphi_2 + 0.3\dot\varphi_3^2\sin\varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

与坐标分离方法不同,在进行位置、速度与加速度分析时,附加驱动约束方法是按如下的步骤进行:

(1) 将时间区间$[t_0 \quad t_{end}]$离散,以步长 h 分为若干时间点,$t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n$,其中 $t_n = t_{end}$,$t_{i+1} = t_i + h$。

(2) 计数器 $i=0$,对于时间 t_0。

① 设定位形坐标 $\boldsymbol{q}$ 的迭代初值$\boldsymbol{q}_0^{(0)}$,利用 N-R 法,对于给定的迭代精度,对方程(3.2-8)经迭代得到时刻 t_0 坐标 $\boldsymbol{q}$ 的值$\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{q}(t_0)$。

② 将 t_0 与 $\boldsymbol{q}_0$ 代入式(3.2-14),计算 $\boldsymbol{\Phi}_{q_0} = \boldsymbol{\Phi}_q(\boldsymbol{q}_0 \quad t_0)$ 与 $\boldsymbol{\Phi}_{t_0} = \boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{q}_0 \ t_0)$。将它们代入式(3.2-9),求解该线性代数方程,得到 $\dot{\boldsymbol{q}}_0$。

③ 将 $t_0, \boldsymbol{q}_0$ 与 $\dot{\boldsymbol{q}}_0$ 代入式(3.2-14),计算 $\gamma_0 = \boldsymbol{\gamma}(\dot{\boldsymbol{q}}_0 \quad \boldsymbol{q}_0 \quad t_0)$。将它与 $\boldsymbol{\Phi}_{q_0}$ 代入式(3.2-10),求解该线性代数方程,得到 $\ddot{\boldsymbol{q}}_0$。

(3) 计数器 $i = i+1$,对于时刻 t_i

① 设定位形坐标 $\boldsymbol{q}$ 的迭代初值$\boldsymbol{q}_i^{(0)}$,通常可利用上一步的值作为初值,即令 $\boldsymbol{q}_i^{(0)} = \boldsymbol{q}_{i-1}(t_{i-1})$。然后利用 N-R 法,对于给定的迭代精度,对方程(3.2-8)经迭代得到时刻 t_i 坐标$\boldsymbol{q}$ 的值$\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}(t_i)$。

② 将 t_i 与 $\boldsymbol{q}_i$ 代入式(3.2-14),计算 $\boldsymbol{\Phi}_{qi} = \boldsymbol{\Phi}_q(\boldsymbol{q}_i \quad t_i)$与 $\boldsymbol{\Phi}_{ti} = \boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{q}_i \quad t_i)$。将它们代入式(3.2-9),求解该线性代数方程,得到 $\dot{\boldsymbol{q}}_i$。

③ 将 $t_i, \boldsymbol{q}_i$ 与$\dot{\boldsymbol{q}}_i$ 代入式(3.2-14),计算 $\gamma_i = \boldsymbol{\gamma}(\dot{\boldsymbol{q}}_i \quad \boldsymbol{q}_i \quad t_i)$。将它与 $\boldsymbol{\Phi}_{qi}$ 代入式(3.2-10),求解该线性代数方程,得到 $\ddot{\boldsymbol{q}}_i$。

(4) 判断 $t_i < t_{end}$。如果是则返回(3),否则计算结束。

比较两种运动学分析方法。坐标分离方法的约束方程个数为 s,方程的变量为独立坐标 $\boldsymbol{w}$,参变量为时间 t。附加驱动约束方法的约束方程个数为 n,与系统坐标数一致,方程的变量为系统的位形坐标 $\boldsymbol{q}$,方程的参变量为时间 t。尽管附加驱动约束方法处理的方程个数比分离变量方法的多,但是从计算机的实现、计算的效率与通用性的角度,后者还是比前者优越。

两种方法在位置分析时，应用 N－R 方法解位置约束方程均要求有较好的起始迭代值。在进行 t_i 时刻的位置分析时，对于坐标分离方法需要非独立坐标的迭代初值 $\boldsymbol{u}_i^{(0)}$。对于附加驱动约束方法需要系统位形坐标的迭代初值 $\boldsymbol{q}_i^{(0)}$。事实上，对于此种情况由驱动约束方程可得到此时刻独立坐标的准确值，即 $\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{w}(t_i)$。需要的还是非独立坐标的迭代初值 $\boldsymbol{u}_i^{(0)}$。考虑到刻点 t_{i-1}，$\boldsymbol{u}_{i-1}=\boldsymbol{u}(t_{i-1})$，$\dot{\boldsymbol{u}}_{i-1}=\dot{\boldsymbol{u}}(t_{i-1})$与 $\ddot{\boldsymbol{u}}_{i-1}=\ddot{\boldsymbol{u}}(t_{i-1})$已知。在位置分析时，在上述的计算步骤中均以 $\boldsymbol{u}_{i-1}$作为迭代初值。然而，在坐标变化比较大的情况，这样做并不理想。若由二阶泰勒(Taylor)展开式，可得到时刻 t_i 的位置的近似值为

$$\boldsymbol{u}_i \approx \boldsymbol{u}_{i-1} + (t_i - t_{i-1})\dot{\boldsymbol{u}}_{i-1} + \frac{1}{2}(t_i - t_{i-1})^2\ddot{\boldsymbol{u}}_{i-1} = \boldsymbol{u}_{i-1} + h\dot{\boldsymbol{u}}_{i-1} + \frac{1}{2}h^2\ddot{\boldsymbol{u}}_{i-1} \tag{3.2-16}$$

此值可用于起始迭代值。如果时间的增量不大，预期可达到快速收敛的目的。

3.2.3　冗余约束

在建立约束方程时，应注意约束方程的冗余问题。即防止在约束方程组中出现相容的多余的约束方程。例如图3－5a的机构，共有 4 根杆件，6 个转动铰。系统的笛卡尔坐标数 $n=3\times4=12$。如果按局部方法建立系统约束方程，每个铰有两个约束方程，系统约束方程数 $s=2\times6=12$，由式(3.1－12)，系统的自由度为零。这显然是错误的。问题是这 12 个约束方程有冗余。事实上，图 3－5a 的机构中有些约束是多余的。如按图 3－5b 解除一杆与两个铰，在运动学上两机构完全一致。对于此系统 $n=3\times3=9$，$s=2\times4=8$。系统的自由度为 1，符合实际情况。

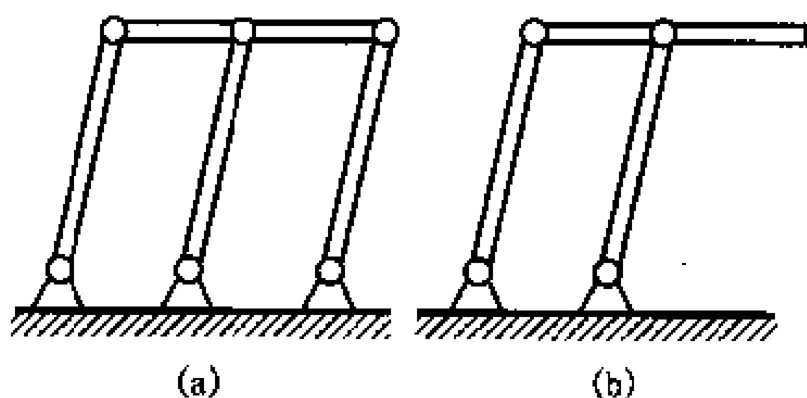


图 3－5　冗余约束的例了

由于系统的约束方程通常是通过局部方法组集得到，故约束方程中引入**冗余约束**的可能性较大，因此在对实际机械系统定义它的刚体系模型时应避免引入冗余约束。然而，对于比较复杂的系统。尤其是空间机械系统，比较难判断冗

余约束的存在，下面给出判断冗余约束的方法（详细的讨论见有关文献[①]）可借助于计算机，利用数值方法加以判断与排除。

当系统处在某位形 $\boldsymbol{q}$ 时，系统主约束方程的雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}$ 的秩小于约束方程的个数 s，即雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}$ 行不满秩，那么称该位形 $\boldsymbol{q}$ 为雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}$ 的**奇异点**。当该位形 $\boldsymbol{q}$ 稍有变化，雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}$ 将变为行满秩，那么称该位形 $\boldsymbol{q}$ 为雅可比 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{K}}$ 的**孤立奇异点**，反之称为**非孤立奇异点**。如果某位形 $\boldsymbol{q}$ 为雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}$ 的非孤立奇异点，那么可断定约束方程 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{K}}$ 有冗余约束，冗余约束的个数为约束方程个数与 $\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}$ 秩的差。

下面用此方法来判断上述例子的冗余约束。为了讨论方便将上述机构简化为如图 3－6 所示。它由三刚体构成，几何尺寸如图。A 与 B 间的连杆由一长度为 1 m 的等距约束等效。如图建立连体基与公共基，系统的笛卡尔坐标为

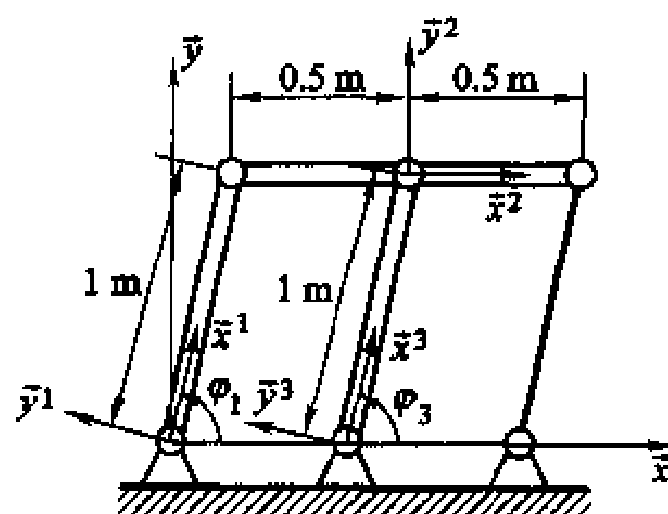


图 3－6　冗余约束的判断

$$\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}},$$

由图不难得到系统的主约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{K}}(\boldsymbol{q})=\begin{pmatrix} x_2-\cos\varphi_1-0.5\cos\varphi_2 \\ y_2-\sin\varphi_1-0.5\sin\varphi_2 \\ x_2-\cos\varphi_3-0.5 \\ y_2-\sin\varphi_3 \\ (x_2+0.5\cos\varphi_2-1)^2+(y_2+0.5\sin\varphi_2)^2-1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

约束方程的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}=\begin{pmatrix} \sin\varphi_1 & 1 & 0 & 0.5\sin\varphi_2 & 0 \\ -\cos\varphi_1 & 0 & 1 & -0.5\cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sin\varphi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\cos\varphi_3 \\ 0 & 2(x_2+0.5\cos\varphi_2-1) & 2(y_2+0.5\sin\varphi_2) & \begin{matrix}-\sin\varphi_2(x_2+0.5\cos\varphi_2-1)+\\ \cos\varphi_2(y_2+0.5\sin\varphi_2)\end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

对于位形为 $\boldsymbol{q}=(\pi/3 \quad 1 \quad 0.866 \quad 0 \quad \pi/3)^{\mathrm{T}}$，代入上式，有

$$\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}(\boldsymbol{q})=\begin{pmatrix} 0.866 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.866 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1.732 & 0.866 & 0 \end{pmatrix}$$

① 洪嘉振．计算多体系统动力学．北京：高等教育出版社，1999 年。

利用高斯消元法(见附录B1),上述矩阵可变换为

$$\boldsymbol{\Phi}_q^K(\boldsymbol{q}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.866 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见最后一行均为零,说明该矩阵行秩为4,比矩阵行阶小一,故有一个冗余的约束方程。在作此结论前需判断 $\boldsymbol{q}=(\pi/3\quad 1\quad 0.866\quad 0\quad \pi/3)^T$ 是否是非孤立奇异点。事实上只要另外任意给一个位形,作上述类似处理均可得到矩阵行秩为4。可见不仅 $\boldsymbol{q}=(\pi/3\quad 1\quad 0.866\quad 0\quad \pi/3)^T$ 而且所有的位形均为非孤立奇异点,有一个约束方程冗余的结论是正确的。得到此结论后,可将约束方程中的一个删除,通常将上式中最后的全零行对应的第5个约束方程去掉,余下4个约束方程相互独立。

应该指出上述冗余约束的分析是对主约束方程进行的。这对动力学分析是必须的(见第7章)。对于运动学分析,将用到主约束方程与驱动约束方程。故在判断与删除主约束方程的冗余约束后,还需将独立的主约束方程与驱动约束方程一起进行冗余约束的判断。如果有冗余约束,将其删除。需要注意的是此时应该删除的是冗余的驱动约束。

3.2.4　奇异构型

本节将考察在运动学分析中可能会出现的一种情况。

在对刚体系进行位置、速度与加速度分析时通常可得到它们的时间历程,即 $\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$ 是关于时间的连续解。然而,对某些机械系统进行运动学分析时,在某个时刻,可能出现不连续或者会有多个解的情况。系统的这种位形称为刚体系的**奇异构型**。下面以一曲柄－滑块机构为例来分析这种构型。

如图3－7所示一曲柄－滑块机构的刚体系运动学模型。此模型不计滑块的质量。曲柄的杆长为 l_1,连杆长为 l_2。又令 $\alpha=l_2/l_1$。为了分析简洁,将系统的笛卡尔坐标取为 $\boldsymbol{q}=(\varphi_1\quad d)^T$,其中 d 为铰点 O_1 与 O_3 的距离,由余弦定理 $l_2^2=l_1^2+d^2-2l_1 d\cos\varphi_1$,两边除 l_1^2,令 $\delta=d/l_1=d$,可得约束方程

$$\Phi(\boldsymbol{q}) = d^2 - 2d\cos\varphi_1 + (1-\alpha^2) = 0 \qquad (3.2-17)$$

由此方程可解得坐标 d 与 φ_1 的关系为

$$d = \cos\varphi_1 \pm \sqrt{\cos^2\varphi_1 + (\alpha^2-1)} \qquad (3.2-18)$$

图3－8给出了上式以 α 为参数的函数图。

对于 $\alpha>1$(此处令 $l_2=2$ m),图中有上下两个独立的分支。当初始(φ_1,d)

落在其中的一个分支上时，随着 φ_1 的增加或减小，变量 d 将在那个分支上与 φ_1 一一对应，且随 φ_1 连续变化，不发生奇异构型。

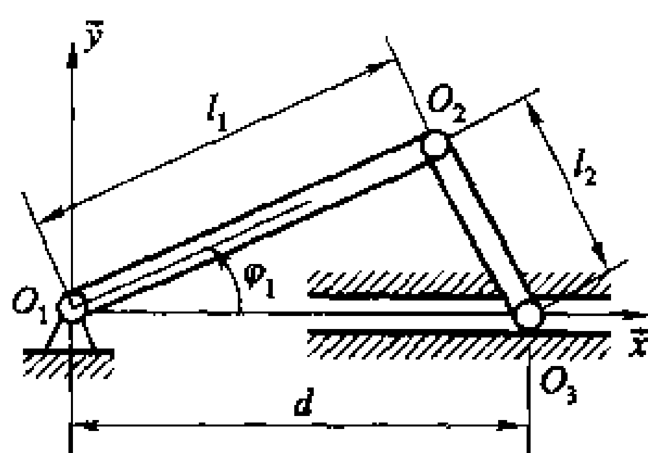


图 3-7 曲柄-滑块机构

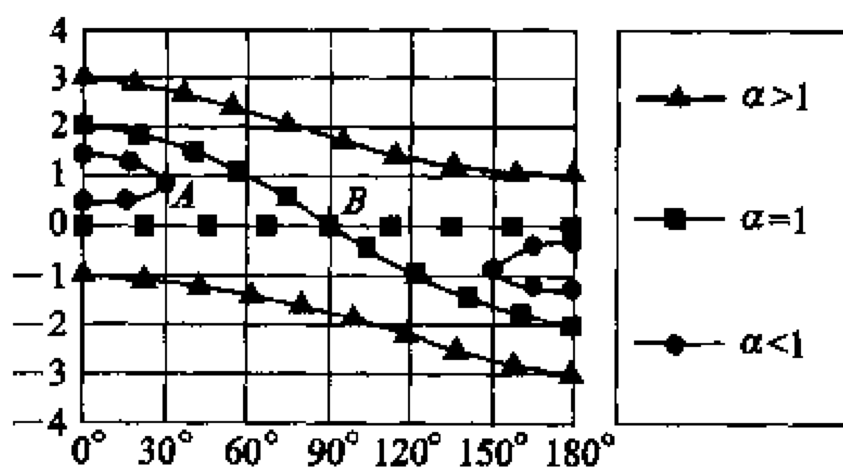


图 3-8 曲柄-滑块机构 d 与 φ_1 的关系

对于 $\alpha<1$（此时令 $l_2=0.5$ m），当 φ_1 由零增加时，图中两个分支在点 $A(\pi/6,\sqrt{3}/2)$ 相交。可见当 φ_1 在零与 $\pi/6$ 之间变化时，情况如同 $\alpha>1$ 的情况。即当初始（φ_1, d）落在某个分支上，随着 φ_1 的增加或减小，变量 d 均与 φ_1 一一对应，且随 φ_1 连续变化，机构运行正常。但对于 $\varphi_1>\pi/6$，d 无解，即机构不允许 $\varphi_1>\pi/6$，故 $\varphi_1=\pi/6$ 为一锁定构型（如图 3-9b）。如果从此点开始 φ_1 减小，d 出现多值，即或走上一分支或走下一分支趋于零（见图 3-8），分别与图 3-9a 的两种情况对应，此时 $\varphi_1=\pi/6$ 为一分叉构型。

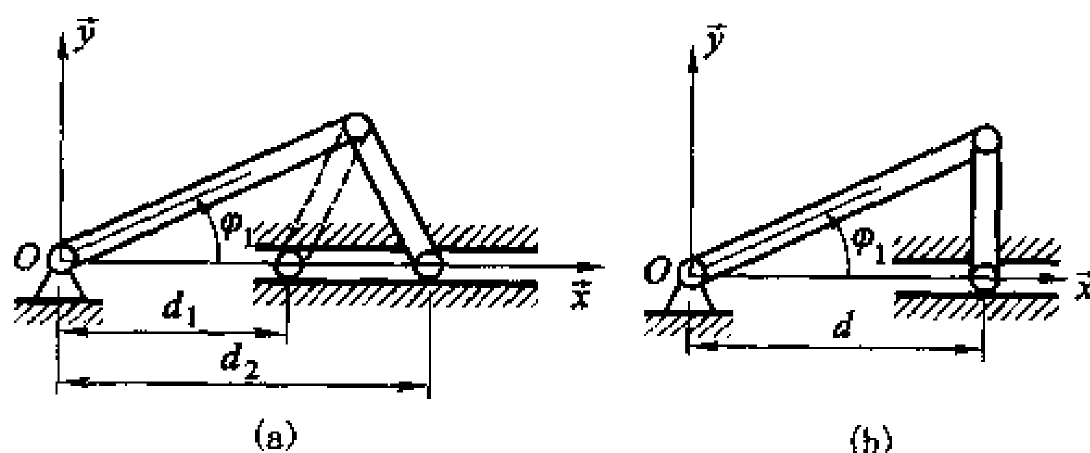


图 3-9 曲柄-滑块机构的奇异构型 $\alpha<1$

再讨论 $\alpha=1$（此处令 $l_2=1$ m）的情况。图 3-8 中两根曲线相交于点 $B(\pi/2,0)$。当 φ_1 由零增加到 $\pi/2$，机构呈图 3-10a 所示。再增加时，d 出现多值，或走上一分支（$d=0$）或走下一分支（见图 3-8）。它们分别出现如图 3-10b 与图 3-10c 所示的两种可能。当 φ_1 减小时，同样 d 为多值，或走上一分支（$d=0$）或走下一分支（见图 3-8）。可见与 $\alpha<1$ 的情况不同，无论 φ_1 增大与减小，奇异点 B 均为分叉构型。

从上例可知，如果由约束方程可得到坐标间的解析表达式，可利用上述方法

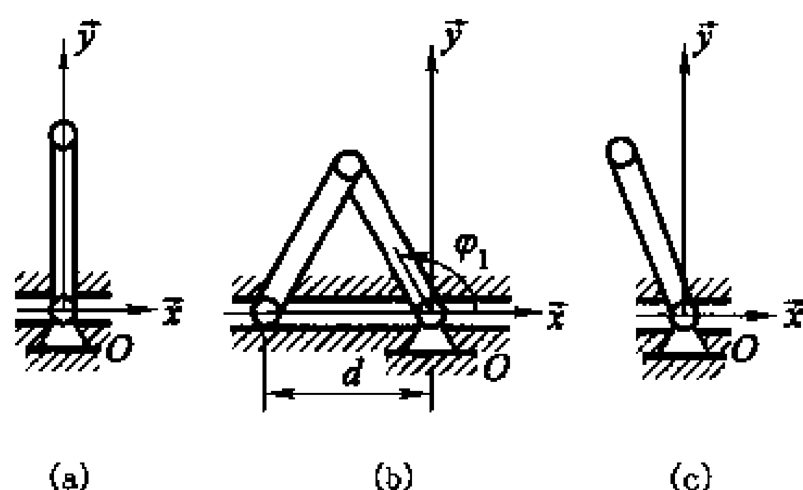


图3-10 曲柄-滑块机构的奇异构型 $\alpha=1$

进行奇异构型的分析。遗憾的是这种可能性比较小,尤其对于复杂的机构系统几乎是不可能得到坐标间的解析表达式。下面给出判断奇异构型的方法(详细的讨论见有关文献①)可借助于计算机利用数值方法进行。

在运动学分析时系统的约束方程为式(3.2-8),即

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0}$$

它是由 n 个约束方程组成。如果它们是独立的(无冗余约束),那么给定时间 t,由高等代数的隐函数定理知,此式可以解得系统的位形 $\boldsymbol{q}(t)$ 唯一解的条件是约束方程的雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 非奇异。故可以这样认为,系统的奇异构型 $\boldsymbol{q}(t)$ 是系统约束方程的雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 为奇异矩阵。

考虑上面的例子。如果曲柄的驱动规律为 $\varphi_1=\pi t$。由式(3.2-8),系统的约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\begin{pmatrix} d^2-2d\cos\varphi_1+(1-\alpha^2) \\ \varphi_1-\pi t \end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \qquad (3.2-19)$$

它是变量为 $\boldsymbol{q}=(\varphi_1 \quad d)^{\mathrm{T}}$ 的两个约束方程。方程的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{pmatrix} 2d\sin\varphi_1 & 2d-2\cos\varphi_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.2-20)$$

这 2×2 的方阵的满秩为 2。当

$$d=\cos\varphi_1 \qquad (3.2-21)$$

时,方阵的秩减为 1,雅可比矩阵为奇异矩阵。将式(3.2-21)代入(3.2-19)的第一式,有

$$\cos^2\varphi_1=1-\alpha^2 \qquad (3.2-22)$$

即由此式解得位形坐标 φ_1,将使雅可比矩阵为奇异矩阵。当 $\alpha>1$ 时,式(3.2-22)无解,即此时不可能出现奇异构型。当 $\alpha=1$ 时,由式(3.2-22)可解得

① 洪嘉振,计算多体系统动力学.北京:高等教育出版社,1999年。

$\varphi_1=\pi/2$，代入式(3.2－21)，有 $d=0$。即 $\boldsymbol{q}=(\pi/2\quad 0)^{\mathrm{T}}$ 为奇异构型。当 $\alpha<1$ 时，由式(3.2－22)可解得 $\varphi_1=\arccos(1-\alpha^2)$，代入式(3.2－21)，有 $d=\sqrt{1-\alpha^2}$。即 $\boldsymbol{q}=(\arccos(1-\alpha^2)\quad 1-\alpha^2)^{\mathrm{T}}$ 为奇异构型。如果 $\alpha=0.5<1$，奇异构型发生在 $\boldsymbol{q}=(\pi/6\quad \sqrt{3}/2)^{\mathrm{T}}$。分析的结果与前面分析的一致。

通过上述分析且考虑到上节有关冗余约束的分析可知，当在某时刻 t，该时刻的位形 $\boldsymbol{q}(t)$ 为系统的约束方程(3.2－8)雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 的孤立奇异点时，则位形 $\boldsymbol{q}(t)$ 为奇异构型。如果位形 $\boldsymbol{q}(t)$ 为雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 的非孤立奇异点，则此时约束方程出现冗余。

3.3 常见平面运动约束的约束方程

由上节可知，运动学分析的一般方法归结为对位置、速度与加速度三个层次约束方程的处理。这样对于一个具体的对象如果得到了描述该系统的约束方程，那么运动学分析都将以统一的数学方式加以处理。因此利用运动学分析的一般方法处理运动学问题的关键是正确建立机械系统的运动学模型及其约束方程。

由于利用局部方法建立刚体系的约束方程具有程式化的特点。由上节的例子已经可以看到，对于某一种铰，其邻接两个刚体的约束方程具有相同的形式。如果能得到机械系统中的一些常见的运动副的约束方程，那么一个实际的机械系统的约束方程就可直接调用这些约束方程进行组集而不必重新推导。

本节将建立一些常见运动副的约束方程。从其推导的过程，读者可掌握建立运动副通用约束方程的一般方法。如有需要读者自己可建立一些运动副约束方程。

3.3.1 绝对约束

在实际的机械系统中将有一个或几个刚体与公共基相连。如果将公共基也作为系统中的一个刚体，与该刚体建立约束方程将增加系统总约束方程的个数，动力学方程的个数(后续章节将要介绍)也因刚体个数的增加而增加，给数值计算带来很多困难。为此，推导一些刚体与公共基间的约束方程是必要的。此类约束通称为**绝对约束**。具体又分为绝对位置约束、绝对角约束与绝对等距约束。

1. 绝对位置约束

如果刚体 B_α 上的给定点 P 只能在平行于公共基的 y 轴(或 x 轴)的一滑槽内滑动(见图 3－11)，称为刚体关于点 P 的**绝对 x(或 y)位置约束**。如图建立公共基 $\vec{e}=(\vec{x}\quad \vec{y})^{\mathrm{T}}$ 与连体基 $\vec{e}^{\alpha}=(\vec{x}^{\alpha}\quad \vec{y}^{\alpha})^{\mathrm{T}}$，基点分别为 O 与 C。刚体 B_α 上给定点 P 矢径间的关系为

$$\vec{r}_\alpha^P = \vec{r}_\alpha + \vec{\rho}_\alpha^P \qquad (3.3-1)$$

根据点 P 的绝对 x 位置约束的定义，在运动的过程中点 P 到 y 轴距离始终保持不变，如令该距离为 c_x 即有

$$\vec{x} \cdot \vec{r}_\alpha^P = c_x \qquad (3.3-2)$$

该式在公共基的坐标式即为点 P 的绝对 x 位置约束的约束方程，考虑到表1.2-1与式(2.4-25)，有

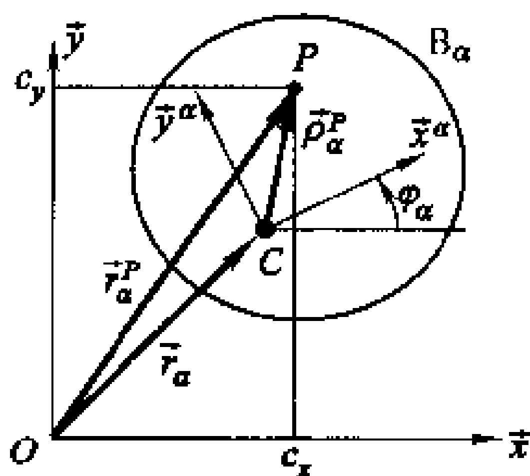


图3-11　绝对 x(或 y)位置约束

$$\Phi^{(ax)} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha^{\prime P}) - c_x = 0 \qquad (3.3-3)$$

上标(ax)表示该约束的类型为绝对 x 位置约束。

同理，由点 P 的绝对 y 位置约束的定义，有

$$\vec{y} \cdot \vec{r}_\alpha^P = c_y \qquad (3.3-4)$$

式中，c_y 为常数。点 P 的绝对 y 位置约束的约束方程为

$$\Phi^{(ay)} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha^{\prime P}) - c_y = 0 \qquad (3.3-5)$$

基矢量 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的坐标阵分别为 $\boldsymbol{x} = (1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{y} = (0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$。令刚体 B_α 连体基基点 C 的矢径 $\boldsymbol{r}_\alpha$ 的坐标阵为

$$\boldsymbol{r}_\alpha = (x_\alpha \quad y_\alpha)^{\mathrm{T}} \qquad (3.3-6)$$

点 P 矢径 $\vec{\rho}_\alpha^P$ 在连体基的坐标阵为

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha^{\prime P} = (x_\alpha^{\prime P} \quad y_\alpha^{\prime P})^{\mathrm{T}} \qquad (3.3-7)$$

考虑到刚体 B_α 相对于公共基的方向余弦阵为

$$\boldsymbol{A}^\alpha = \begin{pmatrix} \cos\varphi_\alpha & -\sin\varphi_\alpha \\ \sin\varphi_\alpha & \cos\varphi_\alpha \end{pmatrix}$$

则绝对 x 与 y 位置约束的约束方程(3.3-3)与(3.3-5)的展开式分别为

$$\Phi^{(ax)} = x_\alpha + x_\alpha^{\prime P}\cos\varphi_\alpha - y_\alpha^{\prime P}\sin\varphi_\alpha - c_x = 0 \qquad (3.3-3')$$

$$\Phi^{(ay)} = y_\alpha + x_\alpha^{\prime P}\sin\varphi_\alpha + y_\alpha^{\prime P}\cos\varphi_\alpha - c_y = 0 \qquad (3.3-5')$$

两约束的约束方程个数分别只有1个，故刚体 B_α 的自由度为 $3-1=2$。约束方程(3.3-3)与式(3.3-5)中的变量为刚体 B_α 的位形坐标阵

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_\alpha = (\boldsymbol{r}_\alpha^{\mathrm{T}} \quad \varphi_\alpha)^{\mathrm{T}} \qquad (3.3-8)$$

两约束方程的参数为 α，$\boldsymbol{\rho}_\alpha^{\prime P} = (x_\alpha^{\prime P} \quad y_\alpha^{\prime P})^{\mathrm{T}}$ 与 c_x(或 c_y)。

将约束方程式(3.3-3)与(3.3-5)对时间求导，考虑到 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 为常值阵与式(1.4-11)，分别可得到点 P 的绝对 x 与 y 位置约束的速度约束方程为

$$\dot{\Phi}^{(ax)} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha^{\prime P}\dot{\varphi}_\alpha) = 0 \qquad (3.3-9)$$

$$\dot{\Phi}^{(ay)} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}'^P_\alpha \dot{\varphi}_\alpha) = 0 \tag{3.3-10}$$

读者不难得到它们的展开式,即

$$\dot{\Phi}^{(ax)} = \dot{x}_\alpha - (x'^P_\alpha \sin\varphi_\alpha + y'^P_\alpha \cos\varphi_\alpha)\dot{\varphi}_\alpha = 0 \tag{3.3-9'}$$

$$\dot{\Phi}^{(ay)} = \dot{y}_\alpha + (x'^P_\alpha \cos\varphi_\alpha - y'^P_\alpha \sin\varphi_\alpha)\dot{\varphi}_\alpha = 0 \tag{3.3-10'}$$

将式(3.3-9)与式(3.3-10)和速度约束方程的标准形式(3.1-13)比较,约束方程(3.3-3)与式(3.3-5)的雅可比矩阵与速度约束方程右项分别为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(ax)}_{q_\alpha} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}'^P_\alpha) \tag{3.3-11}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(ay)}_{q_\alpha} = (\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}'^P_\alpha) \tag{3.3-12}$$

$$\Phi^{(ax)}_t = \Phi^{(ay)}_t = 0 \tag{3.3-13}$$

由式(3.3-11)与式(3.3-12)或由式(3.3-9′)与式(3.3-10′)读者不难得到雅可比的展开式

$$\boldsymbol{\Phi}^{(ax)}_{q_\alpha} = (1 \quad 0 \quad -x'^P_\alpha \sin\varphi_\alpha - y'^P_\alpha \cos\varphi_\alpha) \tag{3.3-11'}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(ay)}_{q_\alpha} = (0 \quad 1 \quad x'^P_\alpha \cos\varphi_\alpha - y'^P_\alpha \sin\varphi_\alpha) \tag{3.3-12'}$$

将式(3.3-9)与(3.3-10)对时间求导,考虑到式(1.4-11),(1.4-9)与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 为常值阵,分别可得到点 P 的绝对 x 与 y 位置约束的加速度约束方程为

$$\ddot{\Phi}^{(ax)} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\ddot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}'^P_\alpha \ddot{\varphi}_\alpha - \boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}'^P_\alpha \dot{\varphi}^2_\alpha) = 0 \tag{3.3-14}$$

$$\ddot{\Phi}^{(ay)} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\ddot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}'^P_\alpha \ddot{\varphi}_\alpha - \boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}'^P_\alpha \dot{\varphi}^2_\alpha) = 0 \tag{3.3-15}$$

将式(3.3-14)与(3.3-15)和加速度约束方程的标准形式(3.1-16)比较,加速度约束方程右项分别为

$$\gamma^{(ax)} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}'^P_\alpha \dot{\varphi}^2_\alpha \tag{3.3-16}$$

$$\gamma^{(ay)} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}'^P_\alpha \dot{\varphi}^2_\alpha \tag{3.3-17}$$

读者不难得到它们的展开式,即

$$\gamma^{(ax)} = (x'^P_\alpha \cos\varphi_\alpha - y'^P_\alpha \sin\varphi_\alpha)\dot{\varphi}^2_\alpha \tag{3.3-16'}$$

$$\gamma^{(ay)} = (x'^P_\alpha \sin\varphi_\alpha + y'^P_\alpha \cos\varphi_\alpha)\dot{\varphi}^2_\alpha \tag{3.3-17'}$$

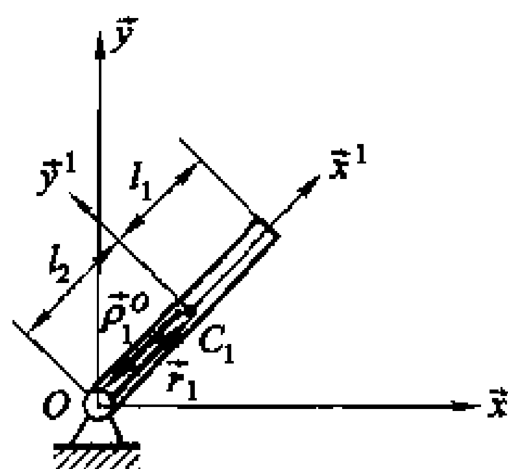
至此,我们完成了绝对位置约束三个层次上的约束方程的推导。这些方程的通用性表现在:

(1) 约束方程的变量为刚体的位形坐标;

(2) 约束方程的参数(均为常数)已经约定,它们涉及刚体的标号(即下标 α)、标志点在刚体上的位置(即点 P 在连体基的坐标)以及其他的一些常数(如 c_x, c_y)。

对于一个具体的机械系统,如果有上述类型的约束,只要按约定定义约束方程参数,代入约束方程的标准形式,即已完成了约束方程的推导。见下面的例子。

[例 3.3－1]　图示一曲柄，它可绕支座旋转。如果将支座作为惯性基 $\vec{e}$，建立曲柄与惯性基间约束方程，雅可比与速度与加速度约束方程的右项。



例 3.3－1 图

解：定义曲柄为刚体 B_1。在中点 C_1 建立如图所示的连体基 $\vec{e}^1$。由于刚体 B_1 上的点 O 在惯性基上为一定点，故存在点 O 的绝对 x 与 y 位置约束。

按约定定义参数，有 $\alpha = 1$，$\boldsymbol{\rho}_\alpha'^O = (-l_2 \quad 0)^T$，$c_x=0$ 与 $c_y=0$ 代入式(3.3－3′)与(3.3－5′)，即得到约束方程为

$$\Phi^{(ax)} = x_1 - l_2\cos\varphi_1 = 0$$

$$\Phi^{(ay)} = y_1 - l_2\sin\varphi_1 = 0$$

至此得到了两个以曲柄笛卡尔坐标 $\boldsymbol{q}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^T$ 为变量的约束方程，它们相互独立，曲柄的自由度为 1。

将参数代入式(3.3－11′)与(3.3－12′)，即得到约束方程的雅可比为

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_1}^{(ax)} = (1 \quad 0 \quad l_2\sin\varphi_1), \quad \boldsymbol{\Phi}_{q_1}^{(ay)} = (0 \quad 1 \quad -l_2\cos\varphi_1)$$

将参数代入式(3.3－13)，(3.3－16′)与(3.3－17′)，即得到速度与加速度约束方程的右项，

$$\Phi_t^{(ax)} = \Phi_t^{(ay)} = 0$$

$$\gamma^{(ax)} = -l_2\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^2, \quad \gamma^{(ay)} = -l_2\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^2$$

2. 绝对角约束

刚体在公共基上姿态保持不变的约束称为**绝对角约束**，约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(a\varphi)} = \varphi_\alpha - c_\varphi = 0 \qquad (3.3-18)$$

式中 c_φ 为常数。此约束方程个数只有一个，故刚体 B_α 的自由度为 $3-1=2$。方程中的参数为 α 与 c_φ。

不难得到约束方程雅可比与速度及加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(a\varphi)} = (\boldsymbol{0}^T \quad 1), \quad \Phi_t^{(a\varphi)} = 0, \quad \gamma^{(a\varphi)} = 0 \qquad (3.3-19)$$

3. 绝对等距约束

刚体上某点 P 到公共基的定点 D 距离保持不变的约束(见图 3－12)称之为**绝对等距约束**。令 $\vec{l}$ 为定点 D 指向点 P 的矢量，有

$$\vec{l} = \vec{r}_\alpha + \vec{\rho}_\alpha^P - \vec{r}_D$$

式中 $\vec{r}_D$ 为定点 D 关于点 O 的矢径。上式的坐标阵为

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_\alpha + \mathbf{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha'^P - \boldsymbol{r}_D \qquad (3.3-20)$$

将其对时间求导，考虑到 $\boldsymbol{r}_D$ 为常值阵与式(1.4－11)，有

$$\dot{\boldsymbol{l}} = \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha\dot{\varphi}_\alpha \tag{3.3-21}$$

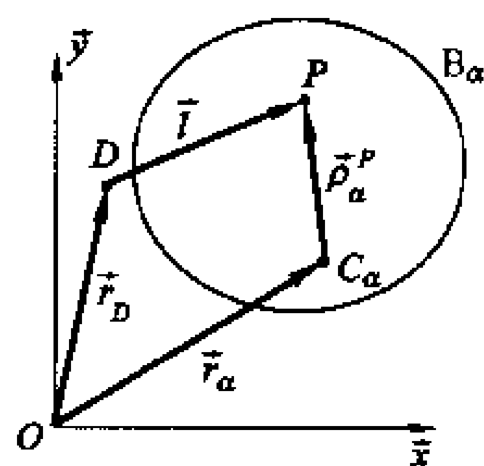


图 3－12　绝对等距约束

根据绝对等距约束的定义，在刚体的运动过程中，点 P 到定点 D 的距离保持不变，如果令其为 c，有约束方程为

$$\Phi^{(ad)} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} - c^2 = 0 \tag{3.3-22}$$

此约束方程个数为 1，故刚体 B_α 的自由度为 $3-1=2$。将式(3.3－20)代入上式，可知方程的变量为刚体 B_α 的位形坐标阵公式(3.3－8)，方程中的参数为 α，$\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha = (x'^P_\alpha \quad y'^P_\alpha)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{r}_D = (x_D \quad y_D)^{\mathrm{T}}$ 与 c。

将式(3.3－22)对时间求导，考虑到式(3.3－21)，得到速度约束方程为

$$\dot{\Phi}^{(ad)} = 2\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{l}} = 2\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha\dot{\varphi}_\alpha) = 0 \tag{3.3-23}$$

与式(3.1－13)比较，约束方程雅可比与速度约束方程的右项分别为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(ad)}_{\boldsymbol{q}_\alpha} = 2(\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha) \tag{3.3-24}$$

$$\Phi^{(ad)}_t = 0 \tag{3.3-25}$$

将式(3.3－23)对时间求导，得到加速度约束方程为

$$\ddot{\Phi}^{(ad)} = 2\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{l}} + 2\dot{\boldsymbol{l}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{l}} = 0 \tag{3.3-26}$$

考虑到式(3.3－20)与式(3.3－21)，经整理，与式(3.1－16)比较，得到加速度约束方程的右项为

$$\gamma^{(ad)} = 2(\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha\dot{\varphi}^2_\alpha - \dot{\boldsymbol{l}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{l}}) \tag{3.3-27}$$

需要注意的是上述约束要求 $c>0$。如果 $c=0$，即 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{0}$，由式(3.3－24)知，雅可比为零，出现奇异。

3.3.2　转动铰

图 3－13 所示为一**转动铰**与其邻接刚体 B_α 和 B_β 关系的示意图。刚体 B_α 上给定的铰点 P 与刚体 B_β 上给定的铰点 Q 在运动过程中始终重合是转动铰的特征。

令图中点 C_α 与 C_β 分别为刚体 B_α 与 B_β 连体基的基点。矢径 $\vec{\rho}^P_\alpha(\overrightarrow{C_\alpha P})$ 为铰点 P 在刚体 B_α 上的连体矢径，它描述了点 P 在刚体 B_α 上的位置。矢径 $\vec{\rho}^Q_\beta$ $(\overrightarrow{C_\beta Q})$ 为铰点 Q 在刚体 B_β 上的连体矢径，它描述了点 Q 在刚体 B_β 上的位置。由图可知，有如下矢量关系式：

$$\vec{r}^P_\alpha = \vec{r}_\alpha + \vec{\rho}^P_\alpha \tag{3.3-28}$$

$$\vec{r}_\beta^Q = \vec{r}_\beta + \vec{\rho}_\alpha^Q \tag{3.3-29}$$

根据旋转铰的特征，如下矢量关系式在刚体的运动过程中必须满足：

$$\vec{r}_\alpha^P - \vec{r}_\beta^Q = \vec{0} \tag{3.3-30}$$

该式在公共基的坐标式即为旋转铰的约束方程，考虑式(2.4-25)，有

$$\boldsymbol{\Phi}^{(r)} = \boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha'^P - \boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{A}^\beta \boldsymbol{\rho}_\beta'^Q = \boldsymbol{0} \tag{3.3-31}$$

此约束方程的变量为邻接刚体 B_α 和 B_β 的位形坐标阵，即

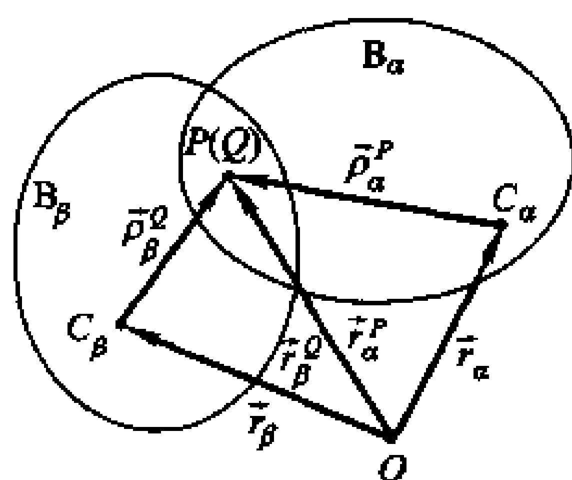


图 3-13 转动铰

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_\alpha^T \quad \boldsymbol{q}_\beta^T)^T = (\boldsymbol{r}_\alpha^T \quad \varphi_\alpha \quad \boldsymbol{r}_\beta^T \quad \varphi_\beta)^T \tag{3.3-32}$$

式中，

$$\boldsymbol{r}_\alpha = (x_\alpha \quad y_\alpha)^T, \quad \boldsymbol{r}_\beta = (x_\beta \quad y_\beta)^T \tag{3.3-33}$$

约束方程的参数为 $\alpha, \beta, \boldsymbol{\rho}_\alpha'^P$ 与 $\boldsymbol{\rho}_\beta'^Q$。如果令

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha'^P = (x_\alpha'^P \quad y_\alpha'^P)^T, \quad \boldsymbol{\rho}_\beta'^Q = (x_\beta'^Q \quad y_\beta'^Q)^T \tag{3.3-34}$$

约束方程的展开式为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(r)} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi_\alpha & -\sin\varphi_\alpha \\ \sin\varphi_\alpha & \cos\varphi_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha'^P \\ y_\alpha'^P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\varphi_\beta & -\sin\varphi_\beta \\ \sin\varphi_\beta & \cos\varphi_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\beta'^Q \\ y_\beta'^Q \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.3-31'}$$

约束方程式(3.3-31)或(3.3-31′)含2个超越方程。方程中的变量个数为6，故两刚体对公共基的自由度为6-2=4，即两刚体的位形坐标中有4个独立变量。如果令刚体 B_β 的位形坐标为独立变量，那么余下的1个自由度描述的是两个刚体相对转动的自由度。

[例 3.3-2] 建立图3-4所示三杆系统的约束方程。

解：首先对系统的刚体与铰进行编号，令杆 CA 为 B_1，杆 AB 为 B_2，杆 BD 为 B_3。机座不作刚体处理，定义为公共参考基，基点在 C，基矢量如图所示。定义旋转铰 A 为铰1，记为 H_1，旋转铰 B 为 H_2，旋转铰 C 可定义为两个绝对位置约束分别记为 H_3 与 H_4，同样旋转铰 D 也可定义为两个绝对位置约束分别记为 H_5 与 H_6。

根据各铰约束方程对参数的约定，对照图3-4所示的几何关系，可得到各铰的参数，现列入表3.3-1 将参数分别代入相应约束的约束方程式(3.3-31)，(3.3-3)与(3.3-5)可得到8个约束方程，其中：铰 H_1 的约束方程即为式

(3.1－18a)；铰 H_2 的约束方程即为式(3.1－18b)；约束 H_3 与 H_4 的约束方程即为式(3.1－18c)；约束 H_5 与 H_6 的约束方程即为式(3.1－18d)。

表 3.3－1　图 3－4 所示三杆机构约束参数表

H_i		B_α		B_β		
i	类	α	ρ'^{P}_{α}	β	ρ'^{Q}_{β}	c
1	(r)	2	$l_2/2 \quad 0$	1	$l_1/2 \quad 0$	
2	(r)	3	$-l_3/2 \quad 0$	2	$l_2/2 \quad 0$	
3	(ax)	1	$-l_1/2 \quad 0$			0
4	(ay)	1	$-l_1/2 \quad 0$			0
5	(ax)	3	$l_3/2 \quad 0$			d_1
6	(ay)	3	$l_3/2 \quad 0$			d_2

将式(3.3－31)对时间求导，考虑到式(1.4－11)，可得到旋转铰的速度约束方程为

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(r)} = \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha\dot{\varphi}_\alpha - \dot{\boldsymbol{r}}_\beta - \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta\dot{\varphi}_\beta = \boldsymbol{0} \qquad (3.3-35)$$

将式(3.3－35)与速度约束方程的标准形式(3.1－13)比较，考虑到坐标变量式(3.3－32)的排列，旋转铰约束方程的雅可比为

$$\boldsymbol{\Phi}_q^{(r)} = (\boldsymbol{I}_2 \quad \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha \quad -\boldsymbol{I}_2 \quad -\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta) \qquad (3.3-36)$$

考虑到 $\boldsymbol{\Phi}_q^{(r)}$ 可写成分块矩阵的形式，即 $\boldsymbol{\Phi}_q^{(r)} = (\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(r)} \quad \boldsymbol{\Phi}_{q_\beta}^{(r)})$，有

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(r)} = (\boldsymbol{I}_2 \quad \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha),\boldsymbol{\Phi}_{q_\beta}^{(r)} = (-\boldsymbol{I}_2 \quad -\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta) \qquad (3.3-37)$$

速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}_t^{(r)} = 0 \qquad (3.3-38)$$

将式(3.3－35)对时间求二阶导数，利用式(2.4－30)，得到旋转铰的加速度约束方程为

$$\ddot{\boldsymbol{\Phi}}^{(r)} = \ddot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha\ddot{\varphi}_\alpha - \boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha\dot{\varphi}_\alpha^2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_\beta - \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta\ddot{\varphi}_\beta + \boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta\dot{\varphi}_\beta^2 = \boldsymbol{0} \qquad (3.3-39)$$

与式(3.1－16)比较，可得旋转铰加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\gamma}^{(r)} = \boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha\dot{\varphi}_\alpha^2 - \boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta\dot{\varphi}_\beta^2 \qquad (3.3-40)$$

3.3.3　滑移铰

图 3－14 为一**滑移铰**与其邻接刚体 B_α 和 B_β 关系的示意图。滑移铰的特征是两刚体各自沿同一条直线作平行移动。该直线称为移动轴(图3－14中的

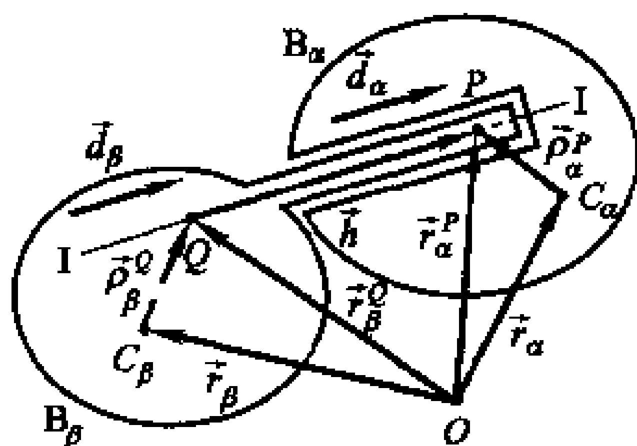


图 3-14　滑移铰

Ⅰ-Ⅰ)。如果在移动轴上定义两个铰点 P 与 Q 分别固结在刚体 B_α 和 B_β，定义矢量 $\vec{h}=\overrightarrow{QP}$ 描述两刚体的相对移动。另外在刚体 B_α 和 B_β 上分别定义连体单位矢量 $\vec{d}_\alpha$ 和 $\vec{d}_\beta$ 与移动轴平行。这样滑移铰的约束条件为在运动过程中矢量 $\vec{h}$ 与矢量 $\vec{d}_\beta$ 始终保持平行，即有矢量关系式

$$\vec{d}_\beta \times \vec{h} = \vec{0} \tag{3.3-41}$$

同时矢量 $\vec{d}_\alpha$ 与 $\vec{d}_\beta$ 也始终保持平行，有矢量关系式

$$\vec{d}_\beta \times \vec{d}_\alpha = \vec{0} \tag{3.3-42}$$

根据式(1.4-7)，以上两式在公共基的坐标式构成滑移铰的约束方程，即

$$\boldsymbol{\Phi}^{(t)} = \begin{pmatrix} (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{d}'_\beta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \\ (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{d}'_\beta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{d}'_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{d}'_\beta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \\ -\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_\beta\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{d}'_\alpha \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.3-43}$$

式中，$\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{d}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{d}_\beta$ 为上述三矢量在公共基下的坐标阵。其中第二式的推导用到了式(1.4-9)，(1.4-12)与下式

$$\boldsymbol{A}^{\beta\alpha} = \boldsymbol{A}^{\beta\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_\alpha-\varphi_\beta) & -\sin(\varphi_\alpha-\varphi_\beta) \\ \sin(\varphi_\alpha-\varphi_\beta) & \cos(\varphi_\alpha-\varphi_\beta) \end{pmatrix} \tag{3.3-44}$$

它是 B_α 关于 B_β 的方向余弦阵。类似式(1.4-11)，有

$$\dot{\boldsymbol{A}}^{\beta\alpha} = \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}(\dot{\varphi}_\alpha-\dot{\varphi}_\beta) \tag{3.3-45}$$

考虑到式(3.3-28)与(3.3-29)或由图 3-14，矢量 $\vec{h}$ 可表示为

$$\vec{h} = \vec{r}^P_\alpha - \vec{r}^Q_\beta$$

该式在公共基的坐标式为

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha - \boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta \tag{3.3-46}$$

将其代入约束方程式(3.3-43)，可见约束方程的变量为两刚体的位形坐标阵，即式(3.3-32)，方程的参数为 $\alpha,\beta,\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha$ 与 $\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta,\boldsymbol{d}'_\alpha$ 与 $\boldsymbol{d}'_\beta$。约束方程组式(3.3-43)含两个超越方程。这样两个刚体的相对自由度为 3-2=1。

将式(3.3-43)第一式对时间求导，考虑到式(1.4-11)，有

$$(\tilde{I}A^{\beta}d'_{\beta})^{T}\dot{h} - (A^{\beta}d'_{\beta})^{T}h\dot{\varphi}_{\beta} = 0 \tag{3.3-47}$$

将式(3.3－46)对时间求导，考虑到式(1.4－11)，可得

$$\dot{h} = \dot{r}_{\alpha} + \tilde{I}A^{\alpha}\rho'^{P}_{\alpha}\dot{\varphi}_{\alpha} - \dot{r}_{\beta} - \tilde{I}A^{\beta}\rho'^{Q}_{\beta}\dot{\varphi}_{\beta} \tag{3.3-48}$$

将其与式(3.3－46)代入式(3.3－47)，考虑到式(1.4－9)与(3.3－44)，经整理，有

$$\begin{aligned}&(\tilde{I}A^{\beta}d'_{\beta})^{T}\dot{r}_{\alpha} - (\tilde{I}A^{\beta}d'_{\beta})^{T}\dot{r}_{\beta} + d'^{T}_{\beta}A^{\beta\alpha}\rho'^{P}_{\alpha}\dot{\varphi}_{\alpha}\\&\quad - d'^{T}_{\beta}[A^{\beta\alpha}\rho'^{P}_{\alpha} + A^{\beta T}(r_{\alpha} - r_{\beta})]\dot{\varphi}_{\beta} = 0\end{aligned} \tag{3.3-49}$$

将式(3.3－43)的第二式对时间求导，考虑到式(1.4－9)与(3.3－44)，有

$$d'^{T}_{\beta}A^{\beta\alpha}d'_{\alpha}(\dot{\varphi}_{\alpha} - \dot{\varphi}_{\beta}) = 0 \tag{3.3-50}$$

有此式可得

$$\dot{\varphi}_{\alpha} - \dot{\varphi}_{\beta} = 0 \tag{3.3-51}$$

可见，在运动过程中两刚体的角速度相等，可推得角加速度也相等。式(3.3－49)与(3.3－50)为滑移铰的速度约束方程。将它们与速度约束方程的标准形式(3.1－13)比较，考虑到坐标变量式(3.3－32)的排列，可得滑移铰约束方程的雅可比矩阵为

$$\Phi^{(t)}_{q_{\alpha}} = \begin{pmatrix}(\tilde{I}A^{\beta}d'_{\beta})^{T} & d'^{T}_{\beta}A^{\beta\alpha}\rho'^{P}_{\alpha}\\ 0^{T} & d'^{T}_{\beta}A^{\beta\alpha}d'_{\alpha}\end{pmatrix} \tag{3.3-52a}$$

$$\Phi^{(t)}_{q_{\beta}} = \begin{pmatrix}-(\tilde{I}A^{\beta}d'_{\beta})^{T} & -d'^{T}_{\beta}[A^{\beta\alpha}\rho'^{P}_{\alpha} + A^{\beta T}(r_{\alpha} - r_{\beta})]\\ 0^{T} & -d'^{T}_{\beta}A^{\beta\alpha}d'_{\alpha}\end{pmatrix} \tag{3.3-52b}$$

速度约束方程的右项为

$$\Phi^{(t)}_{t} = 0 \tag{3.3-53}$$

将式(3.3－49)与(3.3－50)对时间求导，考虑到式(1.4－11)与(3.3－45)，经整理有加速度约束方程

$$\ddot{\Phi}^{(t)} = \begin{pmatrix}(\tilde{I}A^{\beta}d'_{\beta})^{T}\ddot{h} - (A^{\beta}d'_{\beta})^{T}h\ddot{\varphi}_{\beta} - (\tilde{I}A^{\beta}d'_{\beta})^{T}h\dot{\varphi}^{2}_{\beta} - 2(A^{\beta}d'_{\beta})\dot{h}\dot{\varphi}_{\beta}\\ d'^{T}_{\beta}A^{\beta\alpha}d'_{\alpha}(\ddot{\varphi}_{\alpha} - \ddot{\varphi}_{\beta}) + d'^{T}_{\beta}\tilde{I}A^{\beta\alpha}d'_{\alpha}(\dot{\varphi}_{\alpha} - \dot{\varphi}_{\beta})^{2}\end{pmatrix} = 0 \tag{3.3-54}$$

将式(3.3－48)对时间求导，利用式(2.4－30)，可得

$$\ddot{h} = \ddot{r}_{\alpha} + \tilde{I}A^{\alpha}\rho'^{P}_{\alpha}\ddot{\varphi}_{\alpha} - A^{\alpha}\rho'^{P}_{\alpha}\dot{\varphi}^{2}_{\alpha} - \ddot{r}_{\beta} - \tilde{I}A^{\beta}\rho'^{Q}_{\beta}\ddot{\varphi}_{\beta} + A^{\beta}\rho'^{Q}_{\beta}\dot{\varphi}^{2}_{\beta} \tag{3.3-55}$$

将其与式(3.3－46)，(3.3－48)代入式(3.3－54)第一式，可得第一式的加速度约束方程的展开式，其右项为

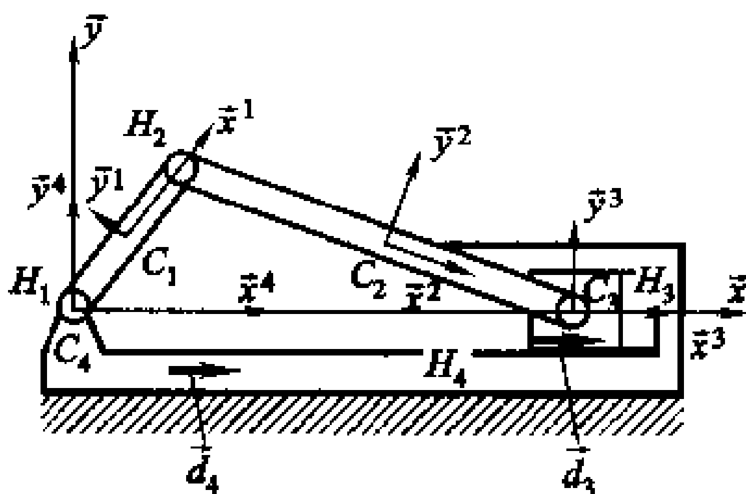
$$d'^{T}_{\beta}[(\tilde{I}A^{\beta})^{T}(r_{\alpha} - r_{\beta})\dot{\varphi}^{2}_{\beta} + 2A^{\beta T}(\dot{r}_{\alpha} - \dot{r}_{\beta})\dot{\varphi}_{\beta} - \tilde{I}A^{\beta\alpha}\rho'^{P}_{\alpha}(\dot{\varphi}_{\alpha} - \dot{\varphi}_{\beta})^{2}] \tag{3.3-56}$$

注意到式(3.3－51)，上式的最后一项为零。此外，式(3.3－54)的第二式也为

零，故滑移铰加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{d}}'^{\mathrm{T}}_{\beta}[(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_{\alpha} - \boldsymbol{r}_{\beta})\dot{\varphi}_{\beta}^{2} + 2\boldsymbol{A}^{\beta 1}(\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha} - \dot{\boldsymbol{r}}_{\beta})\dot{\varphi}_{\beta}] \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3-57}$$

[例 3.3-3] 本例图 1 所示一曲柄－滑块机构。图中分别对刚体与铰进行标号。在该机构的刚体系模型中刚体个数为 $N=4$，它们分别为曲柄(B_1)、连杆(B_2)，滑块(B_3)与支座－滑槽(B_4)。试建立系统的约束方程。



例 3.3-3 图 1

解： 如图建立各刚体的连体基 $\vec{e}^{i}(i=1,2,3,4)$与公共基 $\vec{e}$。

转动铰(H_1-H_3)有 3 个，其中 H_1 与 B_4 和 B_1 关联，H_2 与 B_1 和 B_2 关联，H_3 与 B_2 和 B_3 关联，约束方程数为 2×3。与 B_3 和 B_4 关联的滑移铰(H_4)一个，连体单位矢量分别为 $\vec{d}_3$ 与 $\vec{d}_4$(如图所示)，方程数为 2×1。还有 B_4 关于公共基的绝对约束共 3 个，它们是 C_4 的两个绝对位置约束与两个基始终保持平行的绝对角约束。这样约束方程的总数 $s=11$。系统的笛卡尔位形坐标个数为 $n=3\times4=12$。机构的自由度 $\delta=12-11=1$。

根据各铰约束方程对参数的约定，对照图 1 所示的几何关系，可得到各铰的参数。令曲柄长为 2m，连杆长为 4m。约束方程参数表如表 3.3-2 所示。

表 3.3-2 曲柄－连杆机构约束方程参数表

H_i		B_α			B_β			
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{PT}_{\alpha}$	$\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}$	β	$\boldsymbol{\rho}'^{QT}_{\beta}$	$\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\beta}$	c
1	(r)	1	-1 0		4	0 0		
2	(r)	2	-2 0		1	1 0		
3	(r)	3	0 0		2	2 0		
4	(t)	3	0 0	1 0	4	0 0	1 0	
5	(ax)	4	0 0					0
6	(ay)	4	0 0					0
7	(aφ)	4						0

将表中的参数代入上述推得的相应的约束方程式(3.3－31),(3.3－43),(3.3－3),(3.3－5)与(3.3－18),将所有的约束方程组集构成系统的主约束方程,有如下的形式:

$$\boldsymbol{\Phi}^{K} = (\boldsymbol{\Phi}_1^{(r)T} \quad \boldsymbol{\Phi}_2^{(r)T} \quad \boldsymbol{\Phi}_3^{(r)T} \quad \boldsymbol{\Phi}_4^{(t)T} \quad \boldsymbol{\Phi}_5^{(ax)} \quad \boldsymbol{\Phi}_6^{(ay)} \quad \boldsymbol{\Phi}_7^{(a\varphi)})^{T} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

式中下标号为对应的铰号。将式(1)展开有如下11个方程:

$$\left.\begin{aligned}
& x_1 - \cos\varphi_1 - x_4 = 0 \\
& y_1 - \sin\varphi_1 - y_4 = 0 \\
& x_2 - 2\cos\varphi_2 - x_1 - \cos\varphi_1 = 0 \\
& y_2 - 2\sin\varphi_2 - y_1 - \sin\varphi_1 = 0 \\
& x_3 - x_2 - 2\cos\varphi_2 = 0 \\
& y_3 - y_2 - 2\sin\varphi_2 = 0 \\
& -(x_3 - x_4)\sin\varphi_4 + (y_3 - y_4)\cos\varphi_4 = 0 \\
& \sin(\varphi_3 - \varphi_4) = 0 \\
& x_4 = 0 \\
& y_4 = 0 \\
& \varphi_4 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

调用各个铰的雅可比矩阵为式(3.3－36),(3.3－52),(3.3－11),(3.3－12)与(3.3－19),按系统坐标阵的排列次序 $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{T} \quad \boldsymbol{q}_2^{T} \quad \boldsymbol{q}_3^{T} \quad \boldsymbol{q}_4^{T})^{T}$ 可构成系统主约束方程的雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q^{K}$,各铰的雅可比在其中的位置如本例图2所示。类似地,各铰的加速度约束方程右项式(3.3－39),(3.3－57′),(3.3－16),(3.3－17)与(3.3－19),可组集成主约束加速度约束方程的右项 $\boldsymbol{\gamma}^{K}$ 如本例图2所示。

$$\begin{array}{c}
\\ \boldsymbol{\Phi}_1^{(r)} \\ \boldsymbol{\Phi}_2^{(r)} \\ \boldsymbol{\Phi}_3^{(r)} \\ \boldsymbol{\Phi}_4^{(t)} \\ \boldsymbol{\Phi}_5^{(ax)} \\ \boldsymbol{\Phi}_6^{(ay)} \\ \boldsymbol{\Phi}_7^{(a\varphi)}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3 & \boldsymbol{q}_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{\Phi}_{1q_1}^{(r)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{1q_4}^{(r)} \\
\boldsymbol{\Phi}_{2q_1}^{(r)} & \boldsymbol{\Phi}_{2q_2}^{(r)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{3q_2}^{(r)} & \boldsymbol{\Phi}_{3q_3}^{(r)} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{4q_3}^{(t)} & \boldsymbol{\Phi}_{4q_4}^{(t)} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{5q_5}^{(ax)} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{6q_5}^{(ay)} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{7q_5}^{(a\varphi)}
\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{\Phi}_q^{K}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\
\begin{pmatrix}
\gamma_1^{(r)} \\ \gamma_2^{(r)} \\ \gamma_3^{(r)} \\ \gamma_4^{(t)} \\ \gamma_5^{(ax)} \\ \gamma_6^{(ay)} \\ \gamma_7^{(a\varphi)}
\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{\gamma}^{K}
\end{array}$$

例3.3－3图2

主约束方程的雅可比矩阵与加速度约束方程的右项 $\boldsymbol{\gamma}^{K}$ 经展开有

$\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}} =$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & \sin\varphi_1 & 1 & 0 & 2\sin\varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -\cos\varphi_1 & 0 & 1 & -2\cos\varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2\sin\varphi_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2\cos\varphi_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi_4 & \cos\varphi_4 & 0 & \sin\varphi_4 & -\cos\varphi_4 & \begin{matrix} -(x_3-x_4)\cos\varphi_4- \\ (y_3-y_4)\sin\varphi_4 \end{matrix} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi_3-\varphi_4) & 0 & 0 & -\cos(\varphi_3-\varphi_4) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\tag{3}
$$

$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{K}} =$

$$
\begin{pmatrix}
-\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 \\
-\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 \\
-2\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2^2-\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 \\
-2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^2-\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 \\
-2\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 \\
-2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 \\
[-(x_3-x_4)\sin\varphi_4+(y_3-y_4)\cos\varphi_4]\dot{\varphi}_4^2+2[(\dot{x}_3-\dot{x}_4)\cos\varphi_4+(\dot{y}_3-\dot{y}_4)\sin\varphi_4]\dot{\varphi}_4 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{pmatrix}
\tag{4}
$$

考虑到式(2)最后三式，由式(2)的后五式可得 $y_3=0,\varphi_3=0,x_4=0,y_4=0,\varphi_4=0$。约束方程式(2)可化简为

$$
\left.\begin{aligned}
x_1-\cos\varphi_1 &= 0 \\
y_1-\sin\varphi_1 &= 0 \\
x_2-2\cos\varphi_2-x_1-\cos\varphi_1 &= 0 \\
y_2-2\sin\varphi_2-y_1-\sin\varphi_1 &= 0 \\
x_3-x_2-2\cos\varphi_2 &= 0 \\
y_2+2\sin\varphi_2 &= 0
\end{aligned}\right\}
\tag{5}
$$

即保留式(2)的前 6 个独立的约束方程，这些方程有 7 个位形坐标变量，即 $\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\quad x_3)^{\mathrm{T}}$。该方程的雅可比与加速度方程的右项可由式(3)与(4)截取，有

$$
\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & \sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & \sin\varphi_1 & 1 & 0 & 2\sin\varphi_2 & 0\\
0 & -1 & -\cos\varphi_1 & 0 & 1 & -2\cos\varphi_2 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2\sin\varphi_2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2\cos\varphi_2 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{K}}=\begin{bmatrix}
-\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^2\\
-\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^2\\
-2\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2^2-\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^2\\
-2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^2-\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^2\\
-2\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2^2\\
-2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^2
\end{bmatrix}
$$

由此例可知,利用局部方法建立约束方程时,约束方程的规模比较大。然而,由约束方程直接可得到系统位形坐标中的一些笛卡尔坐标为常数,这样可将系统的笛卡尔坐标进行缩并,只保留时变的坐标,从而压缩了约束方程的规模。

3.3.4 滑移-旋转铰

图 3-15 所示为一种组合铰。图中有三个刚体,中间的 T 形刚体一端为一个滑移铰与 B_β 关联,另一端为一个旋转铰与 B_α 关联。当中间的 T 形刚体的质量可忽略不计时,上述约束可理解为一**滑移-旋转铰**。在刚体 B_β 定义连体单位

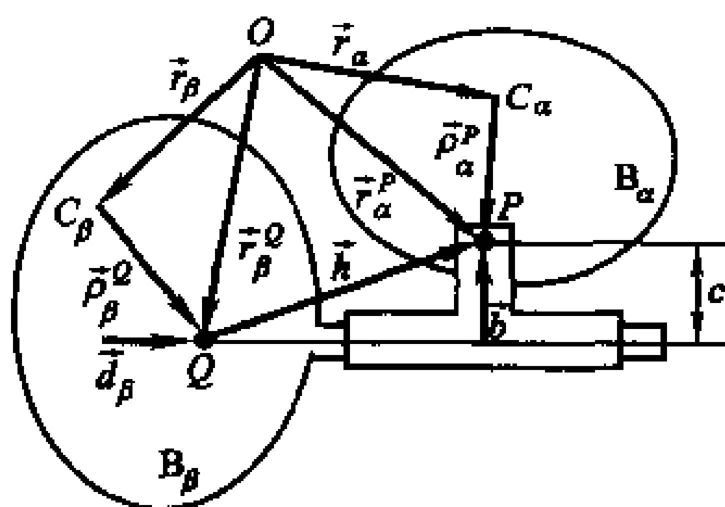


图 3-15 滑移-旋转组合铰

矢量 $\vec{d}_\beta$ 沿滑移轴线,在刚体 B_α 转轴上定义点 P ,过点 P 垂直滑移轴线指向 P 的单位矢量记为 $\vec{b}$。考虑到矢量 $\vec{b}$ 与矢量 $\vec{d}_\beta$ 垂直,由式(1.4-8),它们的坐标阵有如下关系:

$$\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta} \tag{3.3-58}$$

在运动过程中点 P 到滑移轴的距离始终保持常数 c(见图3-15)为此约束条件。定义矢量 $\vec{h}=\overrightarrow{QP}$,该约束条件可写为 $\vec{b}\cdot\vec{h}=c$,其在公共基的坐标阵就是滑移-旋转组合铰的约束方程,利用式(3.3-58),有

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{tr})} = (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} - c = 0 \tag{3.3-59}$$

根据 $\vec{h}$ 的定义,它的坐标阵为式(3.3-46)。将其代入上式,该方程的变量为 B_{α} 与 B_{β} 的位形阵式(3.3-32),方程的参数为 $\alpha,\beta,\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta},\boldsymbol{d}'_{\beta}$ 与常数 c。方程(3.3-59)含一个超越方程。这样两个刚体的相对自由度为 $3-1=2$。

将上式对时间求导,考虑到式(1.4-11)与(1.4-9),有滑移-旋转组合铰的速度约束方程

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(\mathrm{tr})} = (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{h}} - (\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\dot{\varphi}_{\beta} = 0 \tag{3.3-60}$$

与滑移铰速度约束方程第一式(3.3-47)比较,两者相同。类似地推导,利用式(3.3-52)与(3.3-53)的结果,可得滑移-旋转组合铰约束方程的雅可比矩阵、速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{tr})}_{\boldsymbol{q}_{\alpha}} = \left((\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\beta}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}\right) \tag{3.3-61a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{tr})}_{\boldsymbol{q}_{\beta}} = \left(-(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}} \quad -\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\beta}[\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\rho'^{P}_{\alpha} + \boldsymbol{A}^{\beta\alpha\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_{\alpha}-\boldsymbol{r}_{\beta})]\right) \tag{3.3-61b}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{tr})}_{t} = 0 \tag{3.3-62}$$

同样,对式(3.3-60)求导可得滑移-旋转组合铰的速度约束方程,它如同式(3.3-54)的第一式,由于不存在条件(3.3-51),应用式(3.3-56)可得该铰的加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\gamma}^{(\mathrm{tr})} = \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\beta}[(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_{\alpha}-\boldsymbol{r}_{\beta})\dot{\varphi}^{2}_{\beta} + 2\boldsymbol{A}^{\beta\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha}-\dot{\boldsymbol{r}}_{\beta})\dot{\varphi}_{\beta} - \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}(\dot{\varphi}_{\alpha}-\dot{\varphi}_{\beta})^{2}] \tag{3.3-63}$$

3.3.5　相对等距约束(连杆)

图3-16为**相对等距约束(连杆)**与该铰相关联的刚体 B_{α} 和 B_{β} 的示意图。实际上图中有3个刚体,2个转动铰。当中间的连杆的质量可忽略不计时,上述连杆约束可理解为一旋转-旋转组合铰。该组合铰的特征为铰点间的距离始终保持为连杆的长度 c。同样定义矢量 $\vec{h}=\overrightarrow{QP}$,连杆的约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{rr})} = \vec{h}\vec{h} - c^{2} = \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} - c^{2} = 0 \tag{3.3-64}$$

根据 $\vec{h}$ 的坐标阵为式(3.3-46)。将其代入上式,该方程的变量为 B_{α} 与 B_{β} 的位形阵式(3.3-32),方程的参数为 $\alpha,\beta,\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}$ 与常数 c。方程(3.3-64)含1个超越方程。这样两个刚体的相对自由度为 $3-1=2$。

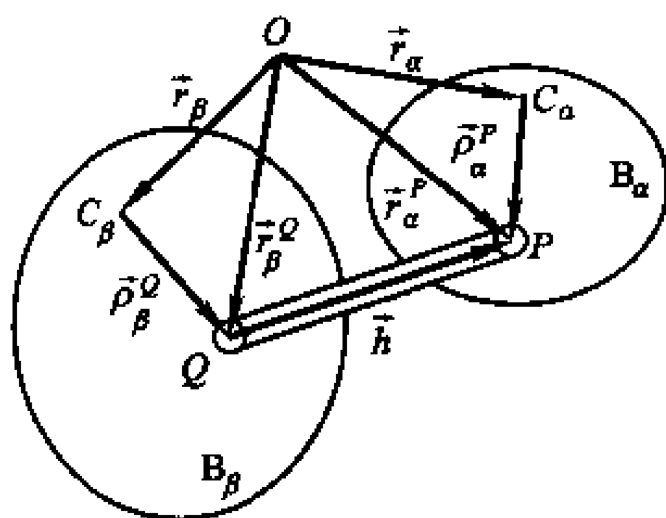


图 3-16 相对等距约束

将上式对时间求导，有连杆的速度约束方程

$$\dot{\Phi}^{(rr)} = 2\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{h}} = 0 \tag{3.3-65}$$

将式(3.3-48)代入上式，有

$$2\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha\dot{\varphi}_\alpha - \dot{\boldsymbol{r}}_\beta - \bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta\dot{\varphi}_\beta) = 0 \tag{3.3-66}$$

将其与速度约束方程的标准形式(3.1-13)比较，考虑到坐标变量式(3.3-32)的排列，可得连杆约束方程的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(rr)} = 2(\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha) \tag{3.3-67a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_\beta}^{(rr)} = 2(-\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \quad -\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta) \tag{3.3-67b}$$

速度约束方程的右项为

$$\Phi_t^{(rr)} = 0 \tag{3.3-68}$$

将式(3.3-65)对时间求导、将式(3.3-55)代入，经整理后，加速度约束方程的右项有

$$\gamma^{(rr)} = 2\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha\dot{\varphi}_\alpha^2 - \boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta\dot{\varphi}_\beta^2) - 2\dot{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{h}} \tag{3.3-69}$$

式中，$\boldsymbol{h}$ 与 $\dot{\boldsymbol{h}}$ 的表达式见式(3.3-46)与(3.3-48)。

3.3.6 齿轮副

图 3-17 所示一对外接齿轮 B_α 和 B_β，两转轴分别为 P 与 Q。啮合的节圆半径分别记为 R_α 与 R_β。由于齿轮 B_α 和 B_β 啮合的必要的几何条件为中心距 $c = R_\alpha + R_\beta$ 保持不变，故上节的连杆约束为**齿轮副**约束条件之一。本节将要给出其另一个约束方程。

如图 3-17 所示，将连接两转轴的刚体记为 B_γ。定义 φ_γ 为 B_γ 的姿态角。考虑两齿轮的相对运动，令齿轮 B_β 不动，B_γ 绕 Q 转过的角度 θ_β。齿轮 B_α 由 B_γ 带动，其中心由初始的 P' 到达 P。两齿轮的初始啮合点为 D_β 与 D'。当前的啮

合点为 D。齿轮 B_α 上的 D' 转到 D_α。θ_α 为 B_α 转过的角度。定义 ψ_α 为 PD_α 与

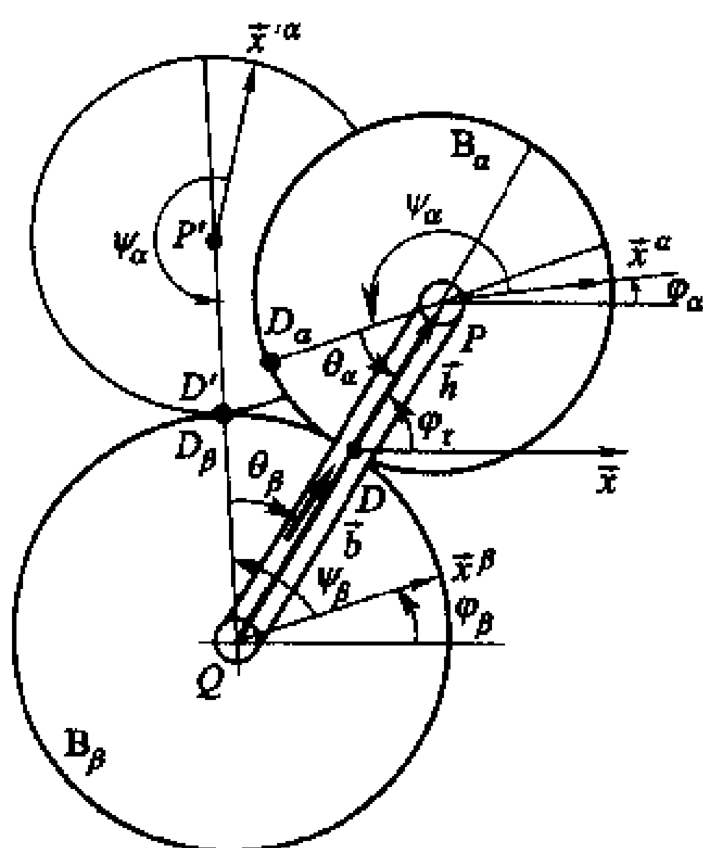


图 3-17　齿轮副

齿轮 B_α 连体基基矢量 $\vec{x}^\alpha$ 的夹角，即 $P'D'$ 与基矢量 $\vec{x}'^\alpha$ 的夹角。定义 ψ_β 为 QD_β 与齿轮 B_β 连体基基矢量 $\vec{x}^\beta$ 的夹角。由图 3-17 可得到如下几何关系：

$$\varphi_\alpha + \psi_\alpha + \theta_\alpha = \varphi_\gamma + \pi$$

$$\varphi_\beta + \psi_\beta - \theta_\beta = \varphi_\gamma$$

$$\delta_\alpha R_\alpha = \delta_\beta R_\beta$$

由上面三式可得动体 B_γ 的姿态角为

$$\varphi_\gamma = k_\alpha \varphi_\alpha + k_\beta \varphi_\beta + c_\gamma \tag{3.3-70}$$

式中

$$k_i = R_i / c (i = \alpha, \beta), \qquad c_\gamma = k_\alpha(\psi_\alpha - \pi) + k_\beta \psi_\beta \tag{3.3-71}$$

由图可知，由于 $\psi_\alpha, \psi_\beta, R_\alpha$ 与 R_β 均为常数，故式(3.3-71)定义的参数为常数。

定义矢量 $\vec{h}$ 由 B_β 上的点 Q 指向 B_α 上的点 P。如果连杆 B_γ 上点 Q 指向点 P 的单位矢量记为 $\vec{b}$。在运动过程中矢量 $\vec{h}$ 与 $\vec{b}$ 平行，即有约束条件 $\vec{b} \times \vec{h} = \vec{0}$，此约束条件的坐标式就是齿轮附加的约束方程，由式(1.4-7)得

$$\Phi^{(g)} = (\tilde{I}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} = 0 \tag{3.3-72}$$

这个附加约束方程与连杆约束方程构成的齿轮约束方程，共有方程两个，两刚体的相对自由度为 1。由于矢量 $\vec{h}$ 在公共基的坐标式为式(3.3-46)。另外由图 3.3-16 知，单位矢量 $\vec{b}$ 在公共基的坐标式为

$$\boldsymbol{b} = (\cos \varphi_\gamma \quad \sin \varphi_\gamma)^{\mathrm{T}} \tag{3.3-73}$$

式中，φ_γ 由式(3.3－70)给出。将它们代入式(3.3－72)可知，约束方程的坐标为两刚体的位形坐标。该方程与连杆的参数(即齿轮约束方程的参数)为 α,β，$\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha},\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta},R_\alpha,R_\beta,\psi_\alpha$ 与 ψ_β。

下面推导附加约束方程式(3.3－72)的雅可比与速度加速度约束方程的右项。

将式(3.3－70)对时间求导，得到动体的绝对角速度为 $\dot\varphi_\gamma$ 为

$$\dot\varphi_\gamma = k_\alpha\dot\varphi_\alpha + k_\beta\dot\varphi_\beta \tag{3.3－74}$$

将式(3.3－73)对时间求导，考虑到上式，有如下表达式：

$$\dot{\boldsymbol{b}} = \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{b}\dot\varphi_\gamma = (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{b})(k_\alpha\dot\varphi_\alpha + k_\beta\dot\varphi_\beta) \tag{3.3－75}$$

将式(3.3－72)对时间求导，考虑到式(3.3－75)与(1.4－9)，有速度约束方程

$$\dot\Phi^{(g)} = (\tilde{\boldsymbol{I}}\dot{\boldsymbol{b}})^{\mathrm T}\boldsymbol{h} + (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{b})^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol{h}} = -\boldsymbol{b}^{\mathrm T}\boldsymbol{h}\dot\varphi_\gamma + (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{b})^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol{h}} = 0 \tag{3.3－76}$$

将式(3.3－74)与(3.3－48)代入上式，考虑到式(1.4－12)，经整理有约束方程的雅可比阵与速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(g)}_{\boldsymbol{q}_\alpha} = \left((\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{b})^{\mathrm T} \quad \boldsymbol{b}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha} - k_\alpha\boldsymbol{h})\right) \tag{3.3－77a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(g)}_{\boldsymbol{q}_\beta} = \left(-(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{b})^{\mathrm T} \quad -\boldsymbol{b}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta} + k_\beta\boldsymbol{h})\right) \tag{3.3－77b}$$

$$\Phi^{(g)}_t = 0 \tag{3.3－78}$$

将式(3.3－76)对时间求导，考虑到式(3.3－75)与(1.4－9)，得到加速度约束方程

$$\ddot\Phi^{(g)} = -\dot{\boldsymbol{b}}^{\mathrm T}\boldsymbol{h}\dot\varphi_\gamma - \boldsymbol{b}^{\mathrm T}\boldsymbol{h}\ddot\varphi_\gamma - \boldsymbol{b}^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol{h}}\,\dot\varphi_\gamma + (\tilde{\boldsymbol{I}}\dot{\boldsymbol{b}})^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol{h}} + (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{b})^{\mathrm T}\ddot{\boldsymbol{h}} = 0 \tag{3.3－79}$$

将式(3.3－74)，(3.3－75)，(3.3－48)与(3.3－55)代入上式，考虑到式(1.4－9)，经整理，可得加约束方程的右项为

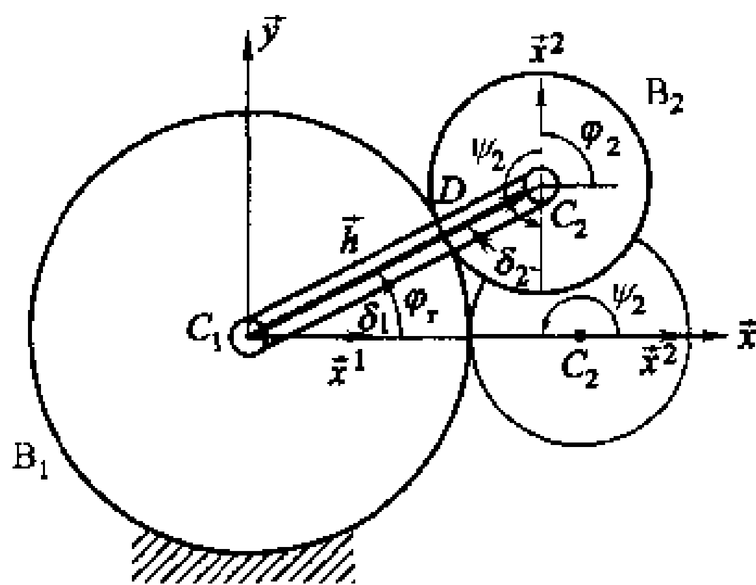
$$\gamma^{(g)} = 2\boldsymbol{b}^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol{h}}\,(k_\alpha\dot\varphi_\alpha + k_\beta\dot\varphi_\beta) + (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{b})^{\mathrm T}\left((\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha} - k_\alpha\boldsymbol{h})\dot\varphi_\alpha^2 - (\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\beta} - k_\beta\boldsymbol{h})\dot\varphi_\beta^2\right) \tag{3.3－80}$$

[例 3.3－4] 考虑如图所示的齿轮传动机构。齿轮 B_1 固定，齿轮 B_2 初始在水平位置，然后随连接杆在齿轮 B_1 上滚动。连接杆两端为齿轮各自的中心，两齿轮的节圆半径分别为 $R_1=2$ 与 $R_2=1$。试建立系统的约束方程。

解： 如图建立公共基与连体基(只画出基矢量 $\vec{e}$，$\vec{e}^1$ 与 $\vec{e}^2$)。不计连接杆的质量。系统为两刚体系统，位形坐标为

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{r}_1^{\mathrm T} \quad \varphi_1 \quad \boldsymbol{r}_2^{\mathrm T} \quad \varphi_2)^{\mathrm T}$$

齿轮 B_1 与公共基存在绝对位置约束与绝对角约束。由式(3.3－3)，(3.3－



例 3.3 -4 图

5)与(3.3－18)不难得到约束方程

$$\Phi_1 = x_1 = 0, \Phi_2 = y_1 = 0, \Phi_3 = \varphi_1 = 0$$

如图所示，$\vec{h} = \vec{r}_2$，$c = R_1 + R_2 = 3$，对于连杆约束式(3.3－64)，可得约束方程

$$\Phi_4 = x_2^2 + y_2^2 - 9 = 0$$

在写齿轮副的另一个约束方程时，还需定义参数 ψ_1 与 ψ_2。根据约定，由图的几何关系可知，$\psi_1 = 0$，$\psi_2 = \pi$。由式(3.3－71)得 $k_1 = 2/3$，$k_2 = 1/3$，$c_\gamma = 0$。由式(3.3－73)且考虑到约束方程 Φ_3，有 $\varphi_\gamma = \varphi_2/3$。因此，$\boldsymbol{b} = (\cos(\varphi_2/3) \quad \sin(\varphi_2/3))^{\mathrm{T}}$，代入式(3.3－72)得齿轮副的另一个约束方程

$$\Phi_5 = \Phi^{(g)} = (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} = -x_2\sin(\varphi_2/3) + y_2\cos(\varphi_2/3) = 0$$

读者由图不难验证此约束方程。系统共有 5 个约束方程，自由度为 1。

3.3.7　齿轮－齿条副

令**齿轮－齿条副**的两个部件分别为齿条 B_β 与齿轮 B_α，两刚体的相对运动如图 3－18 所示。令 Q 为齿轮 B_α 与齿条 B_β 的初始啮合点，当前的啮合点为 D。在运动的过程中齿轮的中心由初始的 P' 到达 P，它们到齿条的距离保持不变，等于 B_α 的节圆半径 R_α。与图 3－15 比较，不难看出此种约束是滑移－旋转铰的特殊情况。沿齿条 B_β 定义连体单位矢量 $\vec{d}_\beta$。式(3.3－59)中的 c 为 B_α 的节圆半径 R_α，有

$$\Phi^{(\mathrm{tr})} = (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta \boldsymbol{d}'_\beta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} - R_\alpha = 0 \tag{3.3-81}$$

本节将要推导齿轮－齿条约束另外一个约束方程。定义 PD 相对于 PD' 的转角为 θ_α，B_α 的移动距离为 s，它们满足如下关系：

$$s - \theta_\alpha R_\alpha = 0 \tag{3.3-82}$$

由图 3－18 不难得到 $s = \vec{d}_\beta \cdot \vec{h}$，即

$$s = (\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \tag{3.3-83}$$

图 3-18 齿轮-齿条

又令 ψ_{β} 为齿条的轴线与 B_{β} 连体基基矢量 $\vec{x}^{\beta}$ 的夹角；ψ_{α} 为 PD'（或 $P'Q$）与齿轮连体基基矢量 $\vec{x}^{\alpha}$ 的夹角：θ_{β} 为矢量 $\vec{d}_{\beta}$ 与矢量 $\overrightarrow{PD}$ 的夹角，根据图 3-18 所示，ψ_{α} 与 ψ_{β} 为常数，$\theta_{\beta}=3\pi/2$。且有如下几何关系：

$$\varphi_{\alpha}+\psi_{\alpha}+\theta_{\alpha}=\varphi_{\beta}+\psi_{\beta}+\theta_{\beta} \tag{3.3-84}$$

将式(3.3-84)中解得的 θ_{α} 与式(3.3-83)代入式(3.3-82)，可得齿轮-齿条约束另一个约束方程为

$$\Phi^{(rp)} = (\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} + (\varphi_{\alpha}-\varphi_{\beta}+c)R_{\alpha} = 0 \tag{3.3-85}$$

式中常数

$$c = \psi_{\alpha}-\psi_{\beta}-\theta_{\beta} \tag{3.3-86}$$

这样式(3.3-81)与(3.3-85)组成齿轮-齿条约束的两个约束方程，两邻接刚体的相对自由度为 1。根据 $\vec{h}$ 的定义，它的坐标阵为式(3.3-46)。将其代入式(3.3-85)，该方程的变量为 B_{α} 与 B_{β} 的位形阵式(3.3-32)，方程的参数为 α，β，$\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}$，$\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}$，$\boldsymbol{d}'_{\beta}$，$R_{\alpha}$ 与 c。

在将式(3.3-88)对时间求导，考虑到式(1.4-11)，有速度约束方程

$$\dot{\Phi}^{(rp)} = (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\dot{\varphi}_{\beta} + (\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{h}} + (\dot{\varphi}_{\alpha}-\dot{\varphi}_{\beta})R_{\alpha} = 0 \tag{3.3-87}$$

将式(3.3-46)与(3.3-48)代入，考虑到式(1.4-9)与(3.3-44)，可得速度约束方程的展开式，其中约束方程式(3.3-85)的雅可比和速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(rp)}_{\boldsymbol{q}_{\alpha}} = \left((\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\beta}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha} + R_{\alpha} \right) \tag{3.3-88a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(rp)}_{\boldsymbol{q}_{\beta}} = \left(-(\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}} \quad (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{d}'_{\beta})^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha} + \boldsymbol{A}^{\beta\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_{\alpha}-\boldsymbol{r}_{\beta})\right] - R_{\alpha} \right) \tag{3.3-88b}$$

$$\Phi_t^{(\text{rp})} = 0 \tag{3.3-89}$$

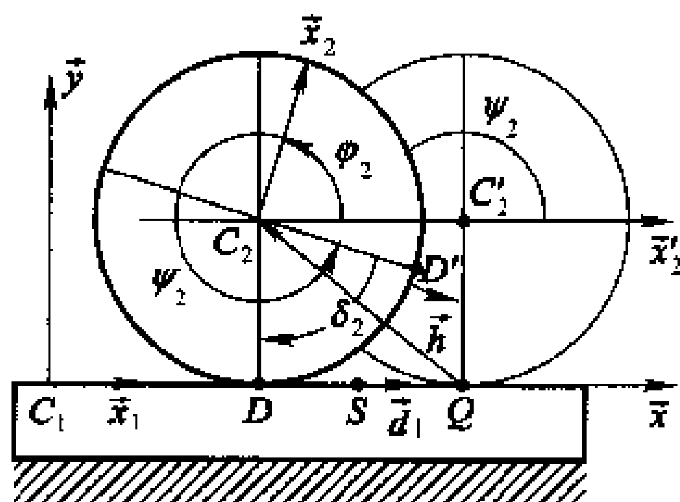
将式(3.3-87)对时间求导,考虑到式(1.4-9),有加速度约束方程

$$\ddot{\Phi}^{(\text{rp})} = (\tilde{I}A^{\beta}d'_{\beta})^{\text{T}}h\ddot{\varphi}_{\beta} + (\ddot{\varphi}_{\alpha} - \ddot{\varphi}_{\beta})R_{\alpha} + (A^{\beta}d'_{\beta})^{\text{T}}\ddot{h} + (A^{\beta}d'_{\beta})^{\text{T}}h\dot{\varphi}_{\beta}^{2} + 2(\tilde{I}A^{\beta}d'_{\beta})^{\text{T}}\dot{h}\dot{\varphi}_{\beta} = 0$$

将式(3.3-46),(3.3-48)与(3.3-55)代入,考虑到式(1.4-9)与(3.3-44),可得加速度约束方程的展开式,其右项为

$$\gamma^{(\text{rp})} = d'^{\text{T}}_{\beta}[A^{\beta\text{T}}(r_{\alpha} - r_{\beta})\dot{\varphi}_{\beta}^{2} - 2(\tilde{I}A^{\beta})^{\text{T}}(\dot{r}_{\alpha} - \dot{r}_{\beta})\dot{\varphi}_{\beta} - A^{\beta\alpha}\rho'^{P}_{\alpha}(\dot{\varphi}_{\alpha} - \dot{\varphi}_{\beta})^{2}] \tag{3.3-90}$$

[例 3.3-5] 考虑如图所示的一齿轮-齿条机构。齿轮 B_2 在齿条 B_1 上滚动。齿轮的节圆半径为 $R_2 = 1$,初始点 Q 离点 C_1 的距离为 3 m。试建立系统的约束方程,且求齿轮上啮合点 D 的速度。



例 3.3-5 图

解: 如图建立公共基与连体基(只画出基矢量 $\vec{x}$,$\vec{x}^1$ 与 $\vec{x}^2$)。齿条固结在公共基。系统为两刚体系统,坐标为

$$q = (r_1^{\text{T}} \quad \varphi_1 \quad r_2^{\text{T}} \quad \varphi_2)^{\text{T}}$$

齿条 B_1 与公共基存在绝对位置约束与绝对角约束。由式(3.3-3),(3.3-5)与(3.3-18)不难得到约束方程

$$\Phi_1 = x_1 = 0, \Phi_2 = y_1 = 0, \Phi_3 = \varphi_1 = 0$$

定义矢量 $\vec{d}_1$ 为沿 $\vec{x}^1$ 正向的单位矢量,有 $d_1 = (1 \quad 0)^{\text{T}}$。由图或由式(3.3-46)都可得 $h = (x_2 - 3 \quad y_2)^{\text{T}}$。由式(3.3-81)可得齿轮-齿条一个约束方程

$$\Phi_4 = y_2 - 1 = 0$$

由图所示,此时 $\psi_1 = 0$,$\psi_2 = 3\pi/2$,$\theta = 3\pi/2$,由式(3.3-86),常数 $c = 0$,这样由式

(3.3-85)可得齿轮-齿条另一个约束方程,即

$$\Phi_5 = (x_2 - 3) + \varphi_2 = 0$$

至此如图所示的机构共有约束方程5个,机构自由度为1。

由以上两式可得点 C_2 的速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_2 = (\dot{x}_2 \quad \dot{y}_2)^{\mathrm{T}} = (-\dot{\varphi}_2 \quad 0)^{\mathrm{T}}$。考虑到点 D 在公共基下的坐标为 $\boldsymbol{\rho}_2^D = (0 \quad -1)^{\mathrm{T}}$,由式(2.4-27)可得该点的速度为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_2^D = \dot{\boldsymbol{r}}_2 + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\rho}_2'^D\dot{\varphi}_2 = \dot{\boldsymbol{r}}_2 + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}_2^D\dot{\varphi}_2 = 0$$

可见这种机构的啮合点 D 的速度始终为零。

*3.3.8 凸轮-从动副[①]

凸轮-从动副的示意图如图3-20所示,它们是一种曲面与曲面接触的约束。在建立它的约束关系前,首先讨论凸轮表面曲线的描述。考虑如图3-19所示的凸轮,表面曲线的点 D 可用极坐标定义。在刚体上定义极点 P,它到边界上点 D 的矢径记为 $\vec{s}$。令其单位矢量为 $\vec{s}_0$,模为 s,故

$$\vec{s} = s\vec{s}_0$$

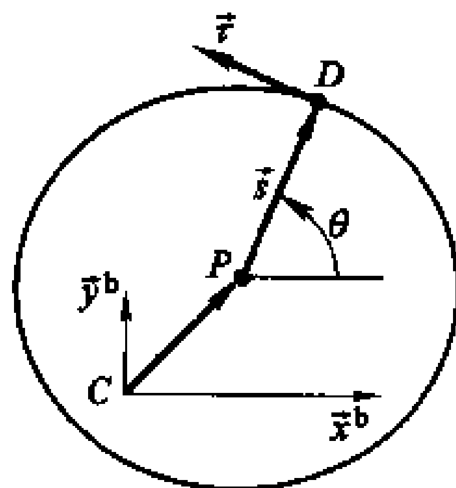


图3-19 极坐标描述物体表面曲线

该矢量在连体基上的坐标阵为

$$\boldsymbol{s}' = s\boldsymbol{s}_0' \tag{3.3-91}$$

式中,模 s 与单位矢量为 $\vec{s}_0$ 在连体基 $\vec{e}^b$ 的坐标阵 $\boldsymbol{s}_0'$ 均是 θ 的函数,即

$$s = s(\theta), \boldsymbol{s}_0' = (\cos\theta \quad \sin\theta)^{\mathrm{T}} \tag{3.3-92}$$

求式(3.3-91)对 θ 的一阶导数,有

$$\boldsymbol{\tau}' \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{s}' = s_\theta\boldsymbol{s}_0' + s\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{s}_0' \tag{3.3-93}$$

其中 $s_\theta = \mathrm{d}s/\mathrm{d}\theta$。$\boldsymbol{\tau}'$ 是点 D 的切矢量 $\vec{\tau}$(见图3-19)在连体基 $\vec{e}^b$ 的坐标阵。式(3.3-93)对 θ 的一阶导数为

$$\boldsymbol{\tau}_\theta' \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{\tau}' = (s_{\theta\theta} - s)\boldsymbol{s}_0' + 2s_\theta\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{s}_0' \tag{3.3-94}$$

式中 $s_{\theta\theta} = \mathrm{d}^2 s/\mathrm{d}\theta^2$。

图3-20所示的凸轮-从动副中,定义 B_β 为凸轮,B_α 为从动件,点 Q 与 P 分别为它们的极坐标的原点。点 D 为它们的接触点,在运动过程中两点允许滑动(与齿轮副不同),始终保持接触相互不脱离,有

① 带*的章节的内容作为选修的内容,下同。

$$\vec{r}_\alpha + \vec{\rho}_\alpha^P + \vec{s}_\alpha - (\vec{r}_\beta + \vec{\rho}_\beta^Q + \vec{s}_\beta) = \vec{0} \tag{3.3-95}$$

其中 $\vec{s}_\alpha$ 与 $\vec{s}_\beta$ 分别为 B_α 与 B_β 上接触点矢量。此外，在运动过程中，接触点 Q 与 P 处的切向量共线，即有

$$\vec{\tau}_\beta \times \vec{\tau}_\alpha = \vec{0} \tag{3.3-96}$$

矢量式(3.3－95)有两个坐标式。矢量式(3.3－96)与式(3.3－42)类似，有一个形如式(3.3－43)第二式的坐标式。这三个标量式构成凸轮－从动副的约束方程，即

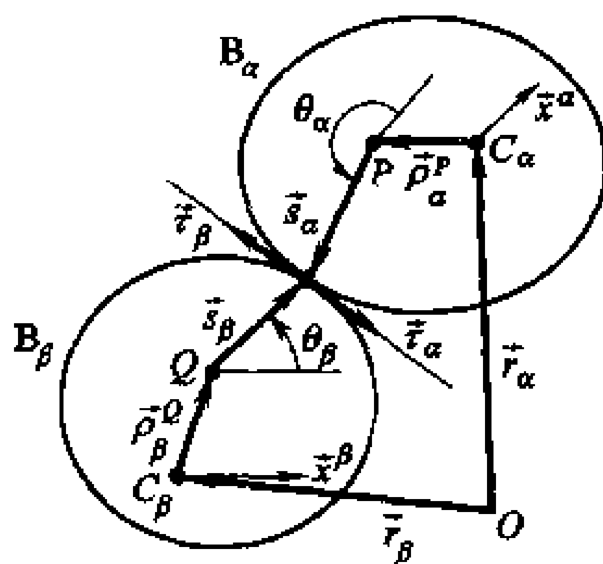


图 3－20　凸轮－从动副约束

$$\boldsymbol{\Phi}^{(cf)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{A}^\alpha(\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha + \boldsymbol{s}'_\alpha) - \boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta + \boldsymbol{s}'_\beta) \\ \boldsymbol{\tau}'^T_\beta \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_\alpha \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.3-97}$$

需要注意的是3个约束方程中的变量除了 B_α 与 B_β 的笛卡尔坐标 $\boldsymbol{q}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{q}_\beta$ 外，考虑到式(3.3－92)与(3.3－93)，还有附加的2个变量 θ_α 与 θ_β，即

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_\alpha^T \quad \boldsymbol{q}_\beta^T \quad \theta_\alpha \quad \theta_\beta)^T \tag{3.3-98}$$

8个变量。对于3个约束方程，故两邻接刚体的相对自由度为2。约束方程式(3.3－97)的参数除了凸轮副外形曲线的数据外，还有 $\alpha,\beta,\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha$ 与 $\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta$。

将约束方程式(3.3－97)对时间求导，考虑到式(1.4－11)与(3.3－45)，可得凸轮－从动副的速度约束方程

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha(\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha + \boldsymbol{s}'_\alpha)\dot{\varphi}_\alpha + \boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\tau}'_\alpha\dot{\theta}_\alpha - \dot{\boldsymbol{r}}_\beta - \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta + \boldsymbol{s}'_\beta)\dot{\varphi}_\beta - \boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\tau}'_\beta\dot{\theta}_\beta = \boldsymbol{0} \tag{3.3-99}$$

$$(\boldsymbol{\tau}'_\beta)^T_{\theta_\beta}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_\alpha\dot{\theta}_\beta - \boldsymbol{\tau}'^T_\beta\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_\alpha(\dot{\varphi}_\alpha - \dot{\varphi}_\beta) + \boldsymbol{\tau}'^T_\beta\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}(\boldsymbol{\tau}'_\alpha)^T_{\theta_\alpha}\dot{\theta}_\alpha = 0 \tag{3.3-100}$$

经整理可得约束方程的雅可比与速度约束方程右项为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(cf)}_{\boldsymbol{q}_\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha(\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha + \boldsymbol{s}'_\alpha) \\ \boldsymbol{0}^T & -\boldsymbol{\tau}'^T_\beta\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_\alpha \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi}^{(cf)}_{\boldsymbol{q}_\beta} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{I} & -\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta + \boldsymbol{s}'_\beta) \\ \boldsymbol{0}^T & \boldsymbol{\tau}'^T_\beta\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_\alpha \end{pmatrix} \tag{3.3-101a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(cf)}_{\theta_\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\tau}'_\alpha \\ \boldsymbol{\tau}'^T_\beta\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}(\boldsymbol{\tau}'_\alpha)^T_{\theta_\alpha} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi}^{(cf)}_{\theta_\beta} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\tau}'_\beta \\ (\boldsymbol{\tau}'_\beta)^T_{\theta_\beta}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_\alpha \end{pmatrix} \tag{3.3-101b}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(cf)}_t = \boldsymbol{0} \tag{3.3-102}$$

将式(3.3－99)与(3.3－100)对时间求导，考虑到式(1.4－11)与(3.3－45)，可得凸轮－从动副的加速度约束方程，经整理，可得其右项为

$$
\boldsymbol{\gamma}^{(\mathrm{cf})}=
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{A}^{\alpha}(\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}+\boldsymbol{s}'_{\alpha})\dot{\varphi}_{\alpha}^{2}-\boldsymbol{A}^{\beta}(\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}+\boldsymbol{s}'_{\beta})\dot{\varphi}_{\beta}^{2}-\boldsymbol{A}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}'_{\alpha})_{\theta_{\alpha}}\dot{\theta}_{\alpha}^{2}+\boldsymbol{A}^{\beta}(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})_{\theta_{\beta}}\dot{\theta}_{\beta}^{2}- \\
\quad 2\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{\tau}'_{\alpha}\dot{\varphi}_{\alpha}\dot{\theta}_{\alpha}+2\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta}\boldsymbol{\tau}'_{\beta}\dot{\varphi}_{\beta}\dot{\theta}_{\beta} \\
\boldsymbol{\tau}'^{\mathrm{T}}_{\beta}\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_{\alpha}(\dot{\varphi}_{\alpha}-\dot{\varphi}_{\beta})^{2}-\boldsymbol{\tau}'^{\mathrm{T}}_{\beta}\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}(\boldsymbol{\tau}'_{\alpha})^{\mathrm{T}}_{\theta_{\alpha}\theta_{\alpha}}\dot{\theta}_{\alpha}^{2}-(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})^{\mathrm{T}}_{\theta_{\beta}\theta_{\beta}}\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_{\alpha}\dot{\theta}_{\beta}^{2}- \\
\quad 2(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})^{\mathrm{T}}_{\theta_{\beta}}\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_{\alpha}(\boldsymbol{\tau}'_{\alpha})_{\theta_{\alpha}}\dot{\theta}_{\alpha}\dot{\theta}_{\beta}+2[(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})^{\mathrm{T}}_{\theta_{\beta}}\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\tau}'_{\alpha}\dot{\theta}_{\beta}+\boldsymbol{\tau}'^{\mathrm{T}}_{\beta}\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}(\boldsymbol{\tau}'_{\alpha})^{\mathrm{T}}_{\theta_{\alpha}}\dot{\theta}_{\alpha}](\dot{\varphi}_{\alpha}-\dot{\varphi}_{\beta})
\end{pmatrix}
\tag{3.3-103}
$$

[**例 3.3－6**] 图示为带有凸轮－从动副的一机构，共有两个刚体。一个为凸轮 B_1，绕与公共基固结的支座上的转动铰 O 旋转。另一个为相对公共基滑移的从动件 B_2。凸轮与从动副的外形曲线均为圆，圆心分别为点 Q 与点 P，半径分别为 10 m 与 2 m。凸轮 B_1 圆心 Q 偏置转轴 O，$OQ=4$。试写出系统的约束方程。

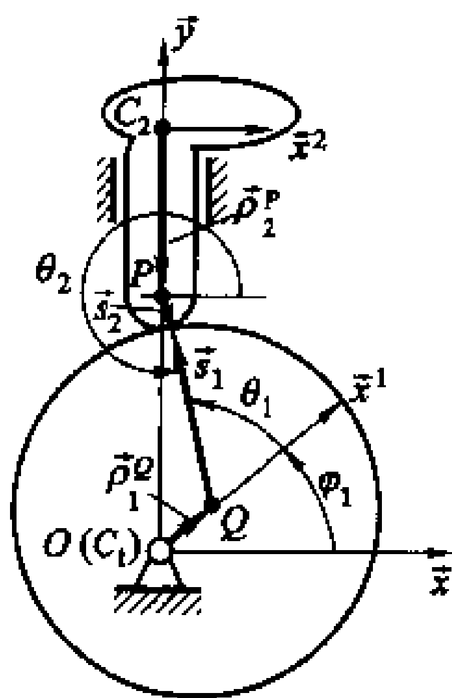
解： 建立两刚体的连体基与公共基如图所示。B_1 的基点 C_1 与点 O 重合。B_2 的基点 C_2 设在公共基的 y 轴上。显然，凸轮 B_1 与公共基有两个绝对位置约束，B_2 与公共基有一绝对位置约束与一绝对角约束，即

$$x_1=0,y_1=0,x_2=0,\varphi_2=0 \tag{1}$$

凸轮 B_1 与从动副 B_2 的约束方程有 3 个。两个刚体坐标加上外形曲线极坐标共 8 个，即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q}&=(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\quad \theta_1\quad \theta_2)^{\mathrm{T}}\\
&=(x_1\quad y_1\quad \varphi_1\quad x_2\quad y_2\quad \varphi_2\quad \theta_1\quad \theta_2)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

约束方程总共有 7 个，故图示机构自由度为 1。下面推导凸轮－从动副的约束方程。



例 3.3－6 图

令 $C_2P=6$ m。这样点 P 与点 Q 的当地坐标为 $\boldsymbol{\rho}'^{P}_{2}=(0\quad -6)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{1}=(4\quad 0)^{\mathrm{T}}$。凸轮与从动副外形曲线的极坐标方程为 $s_1(\theta_1)=10$，$s_2(\theta_2)=2$，代入式(3.3－91)～(3.3－94)有

$$\boldsymbol{s}'_1=10\boldsymbol{s}'_{01},\ \boldsymbol{s}'_2=2\boldsymbol{s}'_{02} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\tau}'_1=10\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{s}'_{01},\ \boldsymbol{\tau}'_2=2\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{s}'_{02} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\tau}'_{1\theta_1}=-10\boldsymbol{s}'_{01},\ \boldsymbol{\tau}'_{2\theta_2}=-2\boldsymbol{s}'_{02} \tag{4}$$

将式(2)～(4)代入(3.3－97)，考虑到与上面提到的约束方程式(1)，经整理有

$$2\cos\theta_2-4\cos\varphi_1-10\cos(\varphi_1+\theta_1)=0$$

$$y_2 + 2\sin\theta_2 - 4\sin\varphi_1 - 10\sin(\varphi_1 + \theta_1) - 6 = 0$$
$$20\sin(\varphi_1 + \theta_1 - \theta_2) = 0$$

它们是凸轮－从动副约束方程。事实上，这3个约束方程也是该机构缩并的主约束方程，对应的系统位形坐标阵为

$$\boldsymbol{q} = (\varphi_1 \quad y_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2)^{\mathrm{T}}$$

上述约束方程中存在变量 θ_1 与 θ_2，通过它们可以确定凸轮与从动副接触点的位置。由第三个方程可得 $\varphi_1 + \theta_1 - \theta_2 = -\pi$，对照图可知，它描述的是点 Q，点 P 以及接触点三点共线。

上面讨论的凸轮－从动副限于凸轮件与从动件的外形曲线均为凸曲线。图3－21为另一种凸轮－从动副，称为凸轮－平面从动副。定义 B_β 为凸轮件，外形曲线为凸曲线，点 Q 为极坐标的原点。B_α 为从动件通过一平面与凸轮接触。在接触平面上定义点 P 为参考点。点 D 为它们的接触点。定义矢量 $\vec{\delta}_\alpha$ 由 P 指向 D。由图3－21可得如下矢量式：

$$\vec{r}_\alpha + \vec{\rho}_\alpha^P + \vec{\delta}_\alpha = \vec{r}_\beta + \vec{\rho}_\beta^Q + \vec{s}_\beta$$

由此可写出矢量 $\vec{\delta}_\alpha$ 的坐标式

$$\boldsymbol{\delta}_\alpha = \boldsymbol{r}_\beta + \boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta + \boldsymbol{s}'_\beta) - \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha \tag{3.3-104}$$

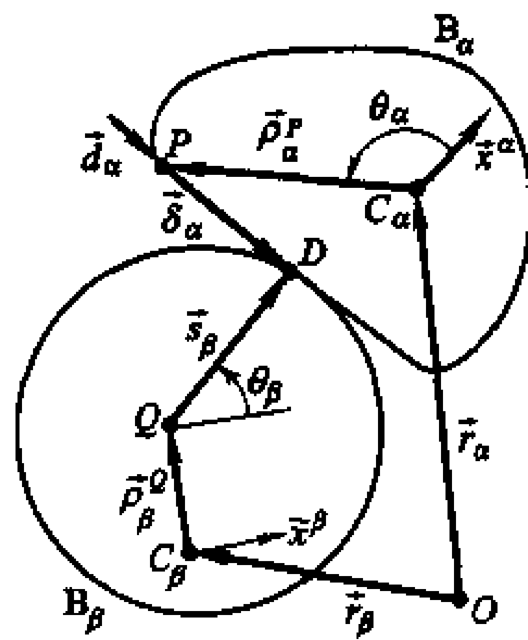


图3－21　凸轮－平面从动副

在接触平面上定义一单位矢量 $\vec{d}_\alpha$。凸轮－从动副限制邻接刚体运动的特征为：在运动过程中，矢量 $\vec{\delta}_\alpha$ 和凸轮接触点 D 的切线方向单位矢量 $\vec{\tau}_\beta$ 均与矢量 $\vec{d}_\alpha$ 始终保持共线，即有

$$\vec{d}_\alpha \times \vec{\delta}_\alpha = \vec{0} \tag{3.3-105}$$

$$\vec{d}_\alpha \times \vec{\tau}_\beta = \vec{0} \tag{3.3-106}$$

由式(1.4－5)，考虑到式(3.3－104)，(3.3－44)，(1.4－9)与(1.4－12)，式(3.3－105)的坐标式为

$$(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{d}'_\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_\alpha = (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{d}'_\alpha)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{r}_\alpha) - \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_\alpha\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta + \boldsymbol{s}'_\beta) - (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{d}'_\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}'^P_\alpha = 0 \tag{3.3-107}$$

由式(1.4－5)，类似于式(3.3－42)推导，式(3.3－106)的坐标式为

$$(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{d}'_\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\tau}'_\beta = -\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_\alpha\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}'_\beta = 0 \tag{3.3-108}$$

以上两式为凸轮－平面从动副的约束方程，可合并为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{cff})}=\begin{pmatrix}(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{d}'_{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_{\beta}-\boldsymbol{r}_{\alpha})-\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}+\boldsymbol{s}'_{\beta})-(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{d}'_{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}\\ \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}'_{\beta}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{3.3-109}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}'_{\beta}$ 的表达式为式(3.3-93)。不难看出,两个约束方程中的变量除了 B_α 与 B_β 的笛卡尔坐标 $\boldsymbol{q}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{q}_\beta$ 外,考虑到式(3.3-91)~(3.3-93),还有附加的一个变量 θ_β,即

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}_{\alpha}\quad \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}_{\beta}\quad \theta_{\beta})^{\mathrm{T}} \tag{3.3-110}$$

变量个数为 7,约束方程个数为 2,两刚体的相对自由度为 2。约束方程的参数除了凸轮外形曲线的数据外,还有 $\alpha,\beta,\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}$、$\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}$ 与 $\boldsymbol{d}'_{\alpha}$。

将式(3.3-107)与(3.3-108)对时间求导,考虑到式(3.3-93)与(3.3-45),可得凸轮-平面从动副的速度约束方程,即

$$(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{d}'_{\alpha})^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_{\beta}-\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha})-(\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{d}'_{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_{\beta}-\boldsymbol{r}_{\alpha})\dot{\varphi}_{\alpha}+\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}+\boldsymbol{s}'_{\beta})(\dot{\varphi}_{\beta}-\dot{\varphi}_{\alpha})-\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}'_{\beta}\dot{\theta}_{\theta}=0 \tag{3.3-111}$$

$$-\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}'_{\beta}(\dot{\varphi}_{\beta}-\dot{\varphi}_{\alpha})+\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})_{\theta_{\beta}}\dot{\theta}_{\beta}=0 \tag{3.3-112}$$

经整理可得约束方程的雅可比矩阵与速度约束方程右项为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{cff})}_{\boldsymbol{q}_{\alpha}}=\begin{pmatrix}-(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{d}'_{\alpha})^{\mathrm{T}} & -(\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{d}'_{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_{\beta}-\boldsymbol{r}_{\alpha})-\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}+\boldsymbol{s}'_{\beta})\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}'_{\beta}\end{pmatrix} \tag{3.3-113a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{cff})}_{\boldsymbol{q}_{\beta}}=\begin{pmatrix}(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{d}'_{\alpha})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}+\boldsymbol{s}'_{\beta})\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}'_{\beta}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{cff})}_{\theta_{\beta}}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}'_{\beta}\\ \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})_{\theta_{\beta}}\end{pmatrix} \tag{3.3-113b}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{cff})}_{t}=\boldsymbol{0} \tag{3.3-114}$$

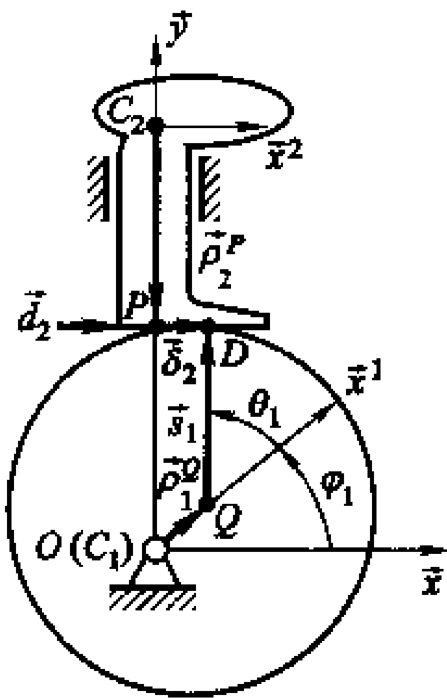
将式(3.3-111)与(3.3-112)对时间求导,可得凸轮-平面从动副的加速度约束方程,经整理可得其右项为

$$\boldsymbol{\gamma}^{(\mathrm{cff})}=\begin{pmatrix}(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{d}'_{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_{\beta}-\boldsymbol{r}_{\alpha})\dot{\varphi}^{2}_{\alpha}-\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}+\boldsymbol{s}'_{\beta})(\dot{\varphi}_{\beta}-\dot{\varphi}_{\alpha})^{2}+\\ \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})_{\theta_{\beta}}\dot{\theta}^{2}_{\beta}+2(\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{d}'_{\alpha})^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_{\beta}-\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha})\dot{\varphi}_{\alpha}-\\ 2\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}'_{\beta}(\dot{\varphi}_{\beta}-\dot{\varphi}_{\alpha})\dot{\theta}_{\beta}\\ \boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}'_{\beta}(\dot{\varphi}_{\alpha}-\dot{\varphi}_{\beta})^{2}-\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})_{\theta_{\beta}\theta_{\beta}}\dot{\theta}^{2}_{\beta}+\\ 2\boldsymbol{d}'^{\mathrm{T}}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})_{\theta_{\beta}}(\dot{\varphi}_{\beta}-\dot{\varphi}_{\alpha})\dot{\theta}_{\beta}\end{pmatrix} \tag{3.3-115}$$

式中 $(\boldsymbol{\tau}'_{\beta})_{\theta_{\beta}\theta_{\beta}}$ 可由式(3.3-94)求导得到,引入符号 $s_{\theta\theta\theta}=\mathrm{d}^{3}s/\mathrm{d}\theta^{3}$,有

$$(\boldsymbol{\tau}'_\beta)_{\theta_\beta\theta_\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_\beta}(\boldsymbol{\tau}'_\beta)_{\theta_\beta} = (s_{\theta_\beta\theta_\beta\theta_\beta} - 3s_{\theta_\beta})\boldsymbol{s}'_0 + (3s_{\theta_\beta\theta_\beta} - s)\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{s}'_0 \tag{3.3-116}$$

[例3.3-7]　图示为一带凸轮－平面从动副机构。类似例3.3-6凸轮－从动副机构,凸轮 B_1 绕与惯性基固结的支座上的转动铰 O 旋转。另一个为相对惯性基相对滑移的从动件 B_2。凸轮的外形曲线为圆心偏置的圆,半径为10 m。圆心偏置转轴 $C_1Q=4$ m。试建立系统约束方程。



例3.3-7图

解: 与例3.3-6一样建立连体基与公共基,同样有绝对约束方程

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \varphi_2 = 0 \tag{1}$$

凸轮 B_1 与从动副 B_2 的约束方程有2个,约束方程总共有6个。两个刚体坐标加上外形曲线极坐标共7个,即

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}} \quad \theta_1)^{\mathrm{T}}$$

故机构自由度为1。下面推导凸轮－平面从动副的约束方程。

令$C_2P=6$ m,这样点P与点Q的当地坐标为$\boldsymbol{\rho}'^P_2=(0\ -6)^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{\rho}'^Q_1=(4\ 0)^{\mathrm{T}}$。定义平面从动件的矢量 $\vec{d}_2$ 为单位矢量,其坐标阵 $\boldsymbol{d}'_2=\boldsymbol{d}_2=(1\ 0)^{\mathrm{T}}$。凸轮极坐标方程为 $s_1(\theta_1)=10$。代入式(3.3-91)与(3.3-93)有

$$\boldsymbol{s}'_1 = 10\,\boldsymbol{s}'_{01},\ \boldsymbol{\tau}'_1 = 10\,\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{s}'_{01} \tag{2}$$

将上述已知量代入式(3.3-104),有

$$\boldsymbol{\delta}_2 = \begin{bmatrix} 4\cos\varphi_1 + 10\cos(\varphi_1+\theta_1) \\ 4\sin\varphi_1 + 10\sin(\varphi_1+\theta_1) - y_2 + 6 \end{bmatrix}$$

再将上述已知量代入式(3.3-107)与(3.3-108),考虑到上面已有的约束方程式(1),经整理得到凸轮－平面从动件约束方程

$$4\sin\varphi_1 + 10\sin(\varphi_1+\theta_1) - y_2 + 6 = 0$$
$$10\cos(\varphi_1+\theta_1) = 0$$

事实上,这两个约束方程也是该机构缩并的主约束方程,对应的系统位形坐标阵为

$$\boldsymbol{q} = (\varphi \quad y_2 \quad \theta_1)^{\mathrm{T}}$$

上述约束方程中存在变量 θ_1,通过它们可以确定凸轮与从动副接触点的位置。

由第二个方程可得 $\varphi_1+\theta_1=\pi/2$,对照图,其几何意义是显而易见的。

*3.3.9 柱销-滑槽副

图 3-22 为一种柱销-滑槽副的示意图。定义 B_β 上有一滑槽,其曲线可类似凸轮曲线的定义方法,用极坐标 s_β 描述式(3.3-91),点 Q 为极坐标的原点。B_α 上的点 P 处有一柱销。柱销可在滑槽内滑动与转动。由图 3-22 可得如下矢量式:

$$\vec{r}_\alpha+\vec{\rho}_\alpha^P=\vec{r}_\beta+\vec{\rho}_\beta^Q+\vec{s}_\beta$$

它的坐标式即为柱销-滑槽副的约束方程

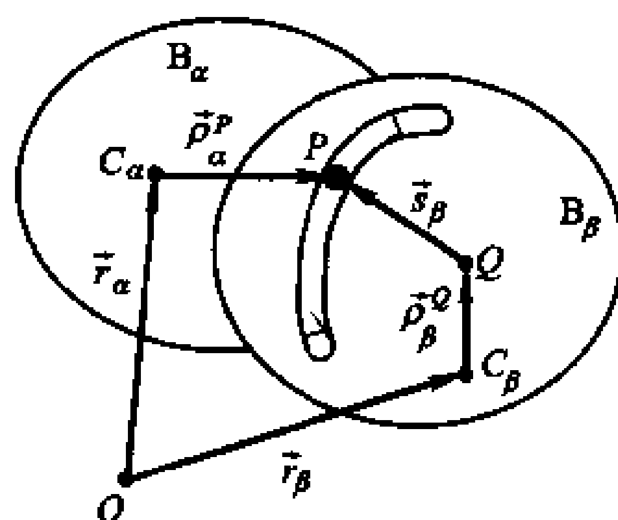


图 3-22 柱销-滑槽副约束

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{pf})}=\boldsymbol{r}_\alpha+\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha'^P-\boldsymbol{r}_\beta-\boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\rho}_\beta'^Q+\boldsymbol{s}_\beta')=\boldsymbol{0} \qquad (3.3-117)$$

不难看出,2 个约束方程中的变量除了 B_α 与 B_β 的笛卡尔坐标 $\boldsymbol{q}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{q}_\beta$ 外,考虑到式(3.3-92),还有附加的一个变量 θ_β,即

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}_\alpha^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_\beta^{\mathrm{T}}\quad \theta_\beta)^{\mathrm{T}} \qquad (3.3-118)$$

变量数为 7,约束方程(3.3-117)的个数为 2,两刚体的相对自由度为 2。约束方程的参数除了滑槽曲线的数据外,还有 $\alpha,\beta,\boldsymbol{\rho}_\alpha'^P$ 与 $\boldsymbol{\rho}_\beta'^Q$。

对式(3.3-117)求时间导数,考虑到式(1.4-11)与(3.3-93),有柱销-滑槽副速度约束方程为

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(\mathrm{pf})}=\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha+\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha'^P\dot{\varphi}_\alpha-\dot{\boldsymbol{r}}_\beta-\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\rho}_\beta'^Q+\boldsymbol{s}_\beta')\dot{\varphi}_\beta-\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\tau}_\beta'\dot{\theta}_\beta=\boldsymbol{0} \qquad (3.3-119)$$

经整理可得约束方程的雅可比与速度约束方程右项为

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}_\alpha}^{(\mathrm{pf})}=(\boldsymbol{I}\quad \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha'^P),\ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}_\beta}^{(\mathrm{pf})}=(-\boldsymbol{I}\quad -\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\rho}_\beta'^Q+\boldsymbol{s}_\beta')\dot{\varphi}_\beta) \qquad (3.3-120\mathrm{a})$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\theta_\beta}^{(\mathrm{pf})}=-\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\rho}_\beta'^Q+\boldsymbol{s}_\beta') \qquad (3.3-120\mathrm{b})$$

$$\boldsymbol{\Phi}_t^{(\mathrm{pf})}=\boldsymbol{0} \qquad (3.3-121)$$

将式(3.3-119)对时间求导,考虑到式(1.4-11)与(3.3-93),可得柱销-滑槽副的加速度约束方程,经整理可得其右项为

$$\boldsymbol{\gamma}^{(\mathrm{pf})}=\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha'^P\dot{\varphi}_\alpha^2-\boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\rho}_\beta'^Q+\boldsymbol{s}_\beta')\dot{\varphi}_\beta^2+\boldsymbol{A}^\beta(\boldsymbol{\tau}_\beta')_{\theta_\beta}\dot{\theta}_\beta^2+2\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{\tau}_\beta'\dot{\varphi}_\beta\dot{\theta}_\beta \qquad (3.3-122)$$

3.4 驱动约束

3.3 节推导了常见约束的约束方程及其雅可比以及它们的速度与加速度约

束方程的右项。作为一个机械系统，刚体间存在各种运动学约束。通过组集构成了系统的主约束方程，这些约束方程是刚体位形坐标的函数。如果系统有自由度，对于给定的一组独立坐标的值，通常系统位形坐标将唯一确定，系统的位形即给定。因此系统的主约束方程定义了系统构型。

如果系统受到力的作用，系统的独立坐标的变化应满足动力学的基本原理。这属于动力学分析范畴。另一类问题是运动学问题。即当独立坐标以时间已知的规律变化时，系统各刚体将作相应的运动。在运动学分析时不考虑引起上述运动的力的作用。正如3.2.2中介绍的，通用程式化比较好的运动学分析方法是附加驱动约束方法。为此本节将建立几种常见驱动约束的约束方程。

3.4.1　绝对驱动约束

类似于绝对约束，绝对驱动约束建立的是刚体相对于公共基的驱动约束。它包括绝对距离驱动约束、绝对位置驱动约束与绝对角驱动约束等。下面分别予以介绍。

绝对距离驱动约束是限制刚体上给定点与公共基某定点的距离为时间已知函数的约束。其背景是一端固定在公共基，另一端固定在刚体上某点的主动作动筒。此约束与图3-12所示的绝对等距约束相对应，不过 c 是时间的已知函数。对照式(3.3-22)，绝对距离驱动约束方程为

$$\Phi^{(\mathrm{add})} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} - c^2(t) = 0 \qquad (3.4-1)$$

式中 $\boldsymbol{l}$ 的表达式为式(3.3-20)。约束方程的参数如同绝对等距约束，不过 c 应为时间的已知函数 $c(t)$。将上式对时间求一、二阶导数，与绝对等距离约束的速度与加速度约束方程对照，可得到如下的速度与加速度约束方程：

$$\dot{\Phi}^{(\mathrm{add})} = \dot{\Phi}^{(\mathrm{ad})} - 2c(t)\dot{c}(t) = 0 \qquad (3.4-2)$$

$$\ddot{\Phi}^{(\mathrm{add})} = \ddot{\Phi}^{(\mathrm{ad})} - 2c(t)\ddot{c}(t) - 2\dot{c}^2(t) = 0 \qquad (3.4-3)$$

不难看出绝对距离驱动约束方程的雅可比以及速度与加速度约束方程的右项与绝对等距约束的分别有如下的关系：

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}_\alpha}^{(\mathrm{add})} = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}_\alpha}^{(\mathrm{ad})}, \quad \Phi_t^{(\mathrm{add})} = -2c(t)\dot{c}(t), \quad \gamma^{(\mathrm{add})} = \gamma^{(\mathrm{ad})} + 2c(t)\ddot{c}(t) + 2\dot{c}^2(t) \qquad (3.4-4)$$

与3.3.1的关于公共基的绝对位置约束与绝对角约束相对应，如果式(3.3-3)，(3.3-5)与(3.3-18)中的常数为时间已知函数时，即构成平行于 x (y)轴的**绝对位置驱动约束**与**绝对角驱动约束**。相应的驱动约束方程分别为

$$\Phi^{(\mathrm{axd})} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}) - c_x(t) = 0 \qquad (3.4-5)$$

$$\Phi^{(\mathrm{ayd})} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}) - c_y(t) = 0 \qquad (3.4-6)$$

$$\Phi^{(\mathrm{a\varphi d})} = \varphi_\alpha - c_\varphi(t) = 0 \qquad (3.4-7)$$

3 个约束方程的参数分别与绝对位置约束，与绝对角约束的一致，不过相应的 3 个常数应改为时间的函数。将以上三式对时间求一，二阶导数，得到速度与加速度约束方程，不难得到绝对位置驱动约束与绝对角驱动约束的雅可比以及速度与加速度约束方程右项。它们与绝对位置约束与绝对角驱动约束的分别有如下的关系：

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(\mathrm{axd})}=\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(\mathrm{ax})},\quad \Phi_t^{(\mathrm{axd})}=-\dot{c}_x(t),\quad \gamma^{(\mathrm{axd})}=\gamma^{(\mathrm{ax})}+\ddot{c}_x(t) \tag{3.4-8}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(\mathrm{ayd})}=\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(\mathrm{ay})},\quad \Phi_t^{(\mathrm{ayd})}=-\dot{c}_y(t),\quad \gamma^{(\mathrm{ayd})}=\gamma^{(\mathrm{ay})}+\ddot{c}_y(t) \tag{3.4-9}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(\mathrm{a\varphi d})}=\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(\mathrm{a\varphi})},\quad \Phi_t^{(\mathrm{a\varphi d})}=-\dot{c}_\varphi(t),\quad \gamma^{(\mathrm{a\varphi d})}=\ddot{c}_\varphi(t) \tag{3.4-10}$$

3.4.2 相对驱动约束

上一节介绍的是被驱动刚体上的某点相对于公共基按给定的时间历程运动。在实际的工程机构中存在大量的一个构件相对于另一个构件的驱动，此种驱动构成相对驱动约束。如操作机械臂的各关节的驱动即属相对驱动约束。相对驱动约束有相对距离驱动约束、相对转动驱动约束与相对滑移驱动约束。下面分别进行介绍。

相对距离驱动约束是限制两刚体中某两点距离为时间函数的约束。其背景是工程中端点分别安装在两个刚体上的主动作动筒。不难看出，此驱动约束可与 3.3.3 的连杆约束(图 3-16)相对应。将约束方程式(3.3-64)的连杆长度改为时间已知函数，即为相对距离驱动约束的约束方程

$$\Phi^{(\mathrm{rrd})}=\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}-c^2(t)=0 \tag{3.4-11}$$

约束方程的参数如同连杆约束，不过 c 应为时间的已知函数 $c(t)$。其速度与加速度约束方程可对上式求导得到，考虑到连杆约束速度与加速度约束方程，有

$$\dot{\Phi}^{(\mathrm{rrd})}=\dot{\Phi}^{(\mathrm{rr})}-2c(t)\dot{c}(t)=0 \tag{3.4-12}$$

$$\ddot{\Phi}^{(\mathrm{rrd})}=\ddot{\Phi}^{(\mathrm{rr})}-2c(t)\ddot{c}(t)-2\dot{c}^2(t)=0 \tag{3.4-13}$$

可见，相对距离驱动约束的约束方程雅可比、速度与角速度约束方程的右项分别为

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(\mathrm{rrd})}=\boldsymbol{\Phi}_{q_\alpha}^{(\mathrm{rr})},\ \boldsymbol{\Phi}_{q_\beta}^{(\mathrm{rrd})}=\boldsymbol{\Phi}_{q_\beta}^{(\mathrm{rr})} \tag{3.4-14}$$

$$\Phi_t^{(\mathrm{rrd})}=-2c(t)\dot{c}(t),\gamma^{(\mathrm{rrd})}=\gamma^{(\mathrm{rr})}+2c(t)\ddot{c}(t)+2\dot{c}^2(t) \tag{3.4-15}$$

与连杆约束的限制一样，要求 $c(t)>0$，不能为零。

相对转动驱动约束是在转动铰上限制两刚体中相对转角 θ 为时间函数的约束。其背景是工程中大量的电动机。如图 3-23 所示，刚体 B_α 和 B_β 上分别定义矢量 $\vec{s}_\alpha$ 与 $\vec{s}_\beta$ 作为两刚体相对转动的参考，它们与各自的连体基的基矢量 $\vec{x}^\alpha$ 与 $\vec{x}^\beta$ 的夹角分别为 θ_α 与 θ_β。根据定义，相对转动驱动约束方程为

$$\Phi^{(rd)}=(\varphi_\alpha+\theta_\alpha)-(\varphi_\beta+\theta_\beta)-c(t)=0 \quad (3.4-16)$$

此约束方程的参数为 $\alpha,\beta,\theta_\alpha$ 与 θ_β。

将式(3.4-16)对时间求一,二阶导数有

$$\dot{\Phi}^{(rd)}=\dot{\varphi}_\alpha-\dot{\varphi}_\beta-\dot{c}(t)=0 \quad (3.4-17)$$

$$\ddot{\Phi}^{(rd)}=\ddot{\varphi}_\alpha-\ddot{\varphi}_\beta-\ddot{c}(t)=0 \quad (3.4-18)$$

约束方程的雅可比、速度与加速度约束方程的右项分别为

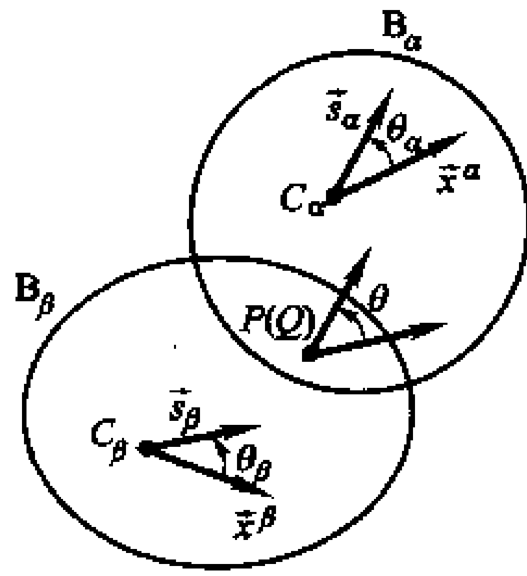


图3-23　相对转动驱动约束

$$\Phi_{q_\alpha}^{(rd)}=(\mathbf{0}^T \quad 1),\Phi_{q_\beta}^{(rd)}=(\mathbf{0}^T \quad -1),$$

$$\Phi_t^{(rd)}=-\dot{c}(t),\gamma^{(rd)}=\ddot{c}(t) \quad (3.4-19)$$

相对滑移驱动约束是加在滑移铰上的驱动约束,即沿滑移轴两刚体相对滑移距离为时间函数。其背景是工程中移动电动机。如图3-14所示,如果在移动轴上定义两个铰点 P 与 Q 分别固结在刚体 B_α 和 B_β,矢量 $\vec{h}$ 描述刚体的 B_α 相对 B_β 移动。根据定义,相对滑移驱动约束特征之一为矢量 $\vec{h}$ 与 $\vec{d}_\beta$ 始终保持平行,这由滑移铰的约束方程(3.3-40)描述。特征之二为其移动的距离是时间的已知函数 $c(t)$,即

$$\vec{d}_\beta\cdot\vec{h}=(\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T\mathbf{h}=c(t)$$

故滑移驱动约束的约束方程为

$$\Phi^{(td)}=(\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T\mathbf{h}-c(t)=0 \quad (3.4-20)$$

将其对时间求导,

$$\dot{\Phi}^{(td)}=(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T\mathbf{h}\dot{\varphi}_\beta+(\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T\dot{\mathbf{h}}-\dot{c}(t)=0$$

将式(3.3-46)与(3.3-48)代入,考虑到式(3.3-51),有

$$\dot{\Phi}^{(td)}=(\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T[\dot{\mathbf{r}}_\alpha-\dot{\mathbf{r}}_\beta-\tilde{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta)\dot{\varphi}_\beta]-\dot{c}(t)=0 \quad (3.4-21)$$

可得雅可比与速度约束方程的右项

$$\Phi_{q_\alpha}^{(td)}=((\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T \quad 0),\quad \Phi_{q_\beta}^{(td)}=(-(\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T \quad (\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta)) \quad (3.4-22)$$

$$\Phi_t^{(td)}=-\dot{c}(t) \quad (3.4-23)$$

将式(3.4-21)对时间求导,得到加速度约束方程,经整理有其右项为

$$\gamma^{(td)}=(\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta)\dot{\varphi}_\beta^2-2(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{A}^\beta\mathbf{d}'_\beta)^T(\dot{\mathbf{r}}_\alpha-\dot{\mathbf{r}}_\beta)\dot{\varphi}_\beta-\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\rho}_\alpha'^P(\dot{\varphi}_\alpha-\dot{\varphi}_\beta)^2+\ddot{c}(t) \quad (3.4-24)$$

3.5　平面机械系统刚体系运动学模型的定义

工程实际中的机械系统是由若干构件、运动副与驱动部件组成。在运动学分析时，首先应将一个实际系统抽象为一个刚体系。这个过程称为**定义机械系统刚体系运动学模型或机械系统运动学模化**。定义刚体系运动学模型是给出与实际系统等效的刚体、约束(铰)与驱动约束。所谓等效是与研究目的有关。对于系统的运动学分析，关心的是在某些主动构件的驱动下，讨论其它构件或构件上某些特征点的位置、速度与加速度的时间历程。不考虑产生此运动的力与构件的惯量等因素，而这些因素是动力学分析必须顾及的。因此系统的运动学模型注意的重点为系统的约束关系，不在于刚体系模型刚体的多少。本节将介绍以运动学分析为目的的机械系统运动学模型建立的方法。

机械系统运动学模化包括系统刚体、刚体间运动学约束与驱动约束的定义，要求系统独立的约束方程与驱动约束方程之和等于系统的坐标数。最后，根据系统的几何关系，完成系统约束方程式(3.2－8)及其速度与加速度约束方程的组集。

模化的第一步应仔细画出机械系统的刚体系模型中刚体与铰的连接示意。然后，再按以下步骤进行：

(1) 定义刚体。统计刚体的个数 N，对刚体进行编号，分别记为 B_i ($i=1,2,\cdots,N$)。建立公共基，在每一个刚体上定义一连体基，此连体基的基点可在刚体的质心，也可从运动学方程简洁的角度出发定义在其它的位置。

(2) 定义铰　对铰进行编号，分别记为 H_i ($i=1,2,\cdots$)。定义每个铰的类型与统计铰的约束方程个数 s。

上述两步通常应该综合考虑。由于系统模型的拓扑定义不是唯一的，为了减少运动学分析求解的规模，应该充分利用组合铰，减少模型中的刚体与铰的个数。

(3) 对模型进行初步的检查。先计算模型的总坐标个数 n。通常描述系统位形的坐标个数为 $3N$。应该注意对于一些特殊的铰(如凸轮副)有附加坐标，此时系统的总坐标数为它们两者之和。再计算自由度数 $\delta=n-s$。通过对原机械系统自由度直观的估计，对定义的模型进行初步的检查。如果模型的自由度数与原来的机械系统的一致，可初步认为此模型是合理的。如果自由度数大于或小于原来机械系统的自由度，说明可能引入了冗余约束或存在其它定义错误的问题，需排除。当然上述的初步检查对于简单的系统根据用户的经验是可实现的，对于复杂系统，冗余约束需通过数值计算由计算机来完成(见3.2.3的介绍)。

(4) 定义驱动约束方程。根据自由度数 δ 定义与其相等个数的独立驱动约束方程。

(5) 定义约束方程的参数。根据每一个铰的类型填写数据表,包括铰号、铰的类型、相关联刚体的刚体号与有关铰的其它参数。对于驱动约束定义给出相应的时间已知函数。

至此系统的模型定义结束。下面举几个例子来说明模型定义的过程。

[例 3.5-1] 考虑例 3.3-3 的曲柄滑块机构。如果曲柄以等角速度 ω 旋转,初始方位角为 $\pi/2$,试建立系统的运动学方程。

解: 根据例 3.3-3,系统定义为有四个刚体组成,$N=4$。系统的坐标个数为 $n=3\times4=12$。坐标阵为

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_4^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

定义转动铰三个($H_1\sim H_3$),滑移铰一个(H_4),两个绝对位置约束(H_5 与 H_6),一个绝对角约束(H_7)。主约束方程的总数 $s=11$。根据铰在刚体上的位置,系统的参数已在表 3.3-2 中给出。至此,曲柄-滑块机构的刚体系模型主约束方程定义结束。机构的自由度 $\delta=12-11=1$。此模型的自由度与机构的自由度一致。需增加一个驱动约束。此约束可定义为曲柄与支座相对转动的驱动约束。根据铰在刚体上的位置,相对旋转驱动约束参数如表 3.5-1 所示,且 $c(t)=\omega t+\pi/2$,有

表 3.5-1　相对旋转驱动约束

H_t		B_α		B_β	
t	类	α	θ_α	β	θ_β
8	(rd)	1	0	4	0

$$\Phi_8^{(\mathrm{rd})} = \varphi_1 - \varphi_4 - \omega t - \pi/2 = 0 \tag{1}$$

由式(3.4-19),此驱动约束方程的雅可比、速度与加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}_{8q_1}^{(\mathrm{rd})} = (\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \quad 1), \quad \boldsymbol{\Phi}_{8q_4}^{(\mathrm{rd})} = (\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \quad -1), \quad \Phi_{8t}^{(\mathrm{rd})} = -\omega, \gamma_8^{(\mathrm{rd})} = 0 \tag{2}$$

在此,系统的运动学模型定义结束。系统的主约束方程与附加驱动约束构成系统的运动学方程,即

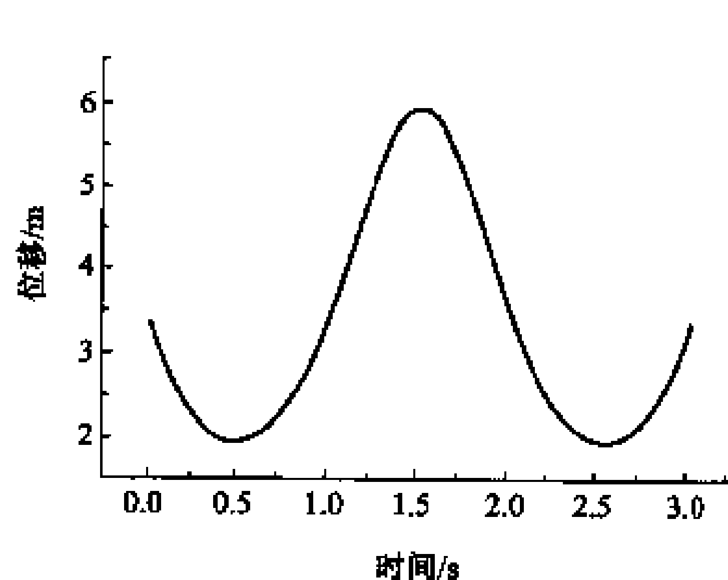
$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{K}} \\ \Phi_8^{(\mathrm{rd})} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

方程的雅可比和速度与加速度约束方程的右项分别为

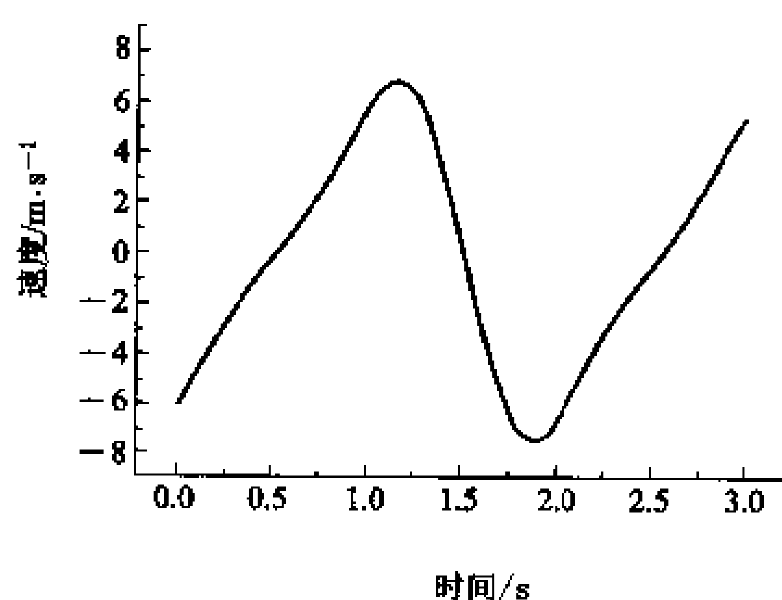
$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}} \\ \boldsymbol{\Phi}_{8q}^{(\mathrm{rd})} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_t^{\mathrm{K}} \\ \Phi_{8t}^{(\mathrm{rd})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{K}} \\ \gamma_8^{(\mathrm{rd})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{K}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

式(3)与(4)中的主约束方程 $\boldsymbol{\Phi}^{K}=\mathbf{0}$ 及其 $\boldsymbol{\Phi}_{q}^{K}$ 与 γ^{K} 分别见例 3.3－3 之式(2)～(4)。

直接利用《理论力学问题求解器》(见附录 C),将例 3.3－3 的曲柄滑块机构主约束方程的数据输入软件,首先进行自由度分析,得到回答为 1。然后将本例的驱动约束方程(令 $\omega=\pi$)的数据输入软件。计算机按数学模型进行仿真计算。用户可通过后处理以数表或曲线的形式观察系统各变量的时间响应,也可以动画的形式观察整个系统的运动情况。图 1 所示的是滑块 B_3 的位移曲线,图 2 所示的是 B_3 的速度曲线。



例 3.5－1 图 1

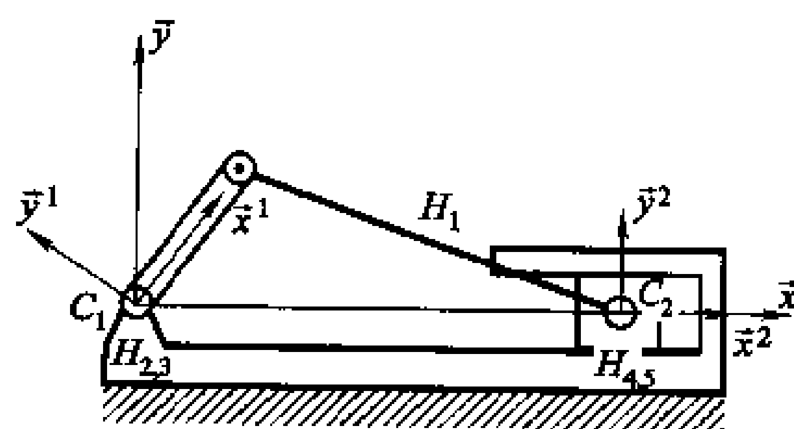


例 3.5－1 图 2

图 3 给出的曲柄－滑块机构的另一种运动学模型的示意图。此模型为两体模型。刚体 B_1 为曲柄,刚体 B_2 为滑块。坐标个数为 $n=3\times2=6$。连体基与公共基的定义如图所示。描述位形的坐标阵为

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

两刚体间有一个连杆约束式(3.3－64)记为 H_1,方程数为 1。曲柄与公共基有 2 个绝对位置约束式(3.3－3)与(3.3－5)记为 H_2 与 H_3,滑块与公共基有 1 个绝对位置约束式(3.3－3)记为 H_4 与一个绝对角约束式(3.3－18)记为 H_5,共 4 个绝对约束方程。根据铰在刚体上的位置,系统的约束方程的参数如表 3.5－2 所示。



例 3.5－1 图 3

表 3.5-2　曲柄连杆约束方程参数表

H_i		B_α		B_β		
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{PT}_{\alpha}$	β	$\boldsymbol{\rho}'^{QT}_{\beta}$	c
1	(rr)	2	0　0	1	1　0	4
2	(ax)	1	0　0			0
3	(ay)	1	0　0			0
4	(ay)	2	0　0			0
5	(aφ)	2				0

主约束方程的总数 $s=5$。主约束方程及其雅可比、速度与加速度约束方程的右项分别可组集成如下形式：

$$\boldsymbol{\Phi}^{K}=\begin{Bmatrix}\Phi_1^{(rr)}\\ \Phi_2^{(ax)}\\ \Phi_3^{(ay)}\\ \Phi_4^{(ay)}\\ \Phi_5^{(a\varphi)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(x_2-x_1-2\cos\varphi_1)^2+(y_2-y_1-2\sin\varphi_1)^2-16\\ x_1\\ y_1\\ y_2\\ \varphi_2\end{Bmatrix}=\mathbf{0} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_q^{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{1q_1}^{(rr)} & \boldsymbol{\Phi}_{1q_2}^{(rr)}\\ \boldsymbol{\Phi}_{2q_1}^{(ax)} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\Phi}_{3q_1}^{(ay)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{4q_2}^{(ay)}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{5q_2}^{(a\varphi)}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Phi}_t^{K}=\begin{Bmatrix}\Phi_{1t}^{(rr)}\\ \Phi_{2t}^{(ax)}\\ \Phi_{3t}^{(ay)}\\ \Phi_{4t}^{(ay)}\\ \Phi_{5t}^{(a\varphi)}\end{Bmatrix}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\gamma}^{K}=\begin{Bmatrix}\gamma_1^{(rr)}\\ \gamma_2^{(ax)}\\ \gamma_3^{(ay)}\\ \gamma_4^{(ay)}\\ \gamma_5^{(a\varphi)}\end{Bmatrix} \tag{6}$$

机构的自由度 $\delta=6-5=1$。此模型的自由度数与原机构一致。需附加一个驱动约束。根据图所示，此驱动约束为绝对旋转驱动约束式(3.4-7)。已知曲柄以等角速度 ω 旋转，初始方位角为 $\pi/2$，那么式(3.4-7)中的 $c_\varphi(t)=\omega t+\pi/2$，绝对旋转驱动约束

$$\Phi_6^{(a\varphi d)}=\varphi_1-\omega t-\pi/2=0 \tag{7}$$

由式(3.4-10)，此驱动约束方程的雅可比、速度与加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}_{6q_1}^{(a\varphi d)}=\boldsymbol{\Phi}_{6q_1}^{(a\varphi)}=(0^{\mathrm{T}}\quad 1),\quad \Phi_{6t}^{(a\varphi d)}=-\omega,\quad \gamma_6^{(a\varphi d)}=0 \tag{8}$$

在主约束方程上附加驱动约束构成系统的运动学方程

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{K}} \\ \Phi_6^{(\mathrm{a\varphi d})} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{9}$$

方程的雅可比、速度与加速度约束方程的右项有

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{K}} \\ \Phi_{6q}^{(\mathrm{a\varphi d})} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_t^{\mathrm{K}} \\ \Phi_{6t}^{(\mathrm{a\varphi d})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{K}} \\ \gamma_6^{(\mathrm{a\varphi d})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{K}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

比较曲柄－滑块机构两个刚体系运动学模型。例3.3－3模型的约束方程个数为12，本例模型的约束方程个数为6。显然此模型远比例3.3－3模型简洁。

与例3.3－3模型的约束方程可以缩并一样，上述模型也可以缩并。

如果将方程(5)的后四式代入第一式，主约束方程可化简为1个，即

$$\Phi_1^{(\pi)} = x_2^2 - 2x_2\cos\varphi_1 - 12 = 0$$

由此方程与驱动约束方程构成另一种更简洁的系统运动方程，即

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(\pi)} \\ \Phi_6^{(\mathrm{a\varphi d})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^2 - 2x_2\cos\varphi_1 - 12 \\ \varphi_1 - \omega t - \pi/2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

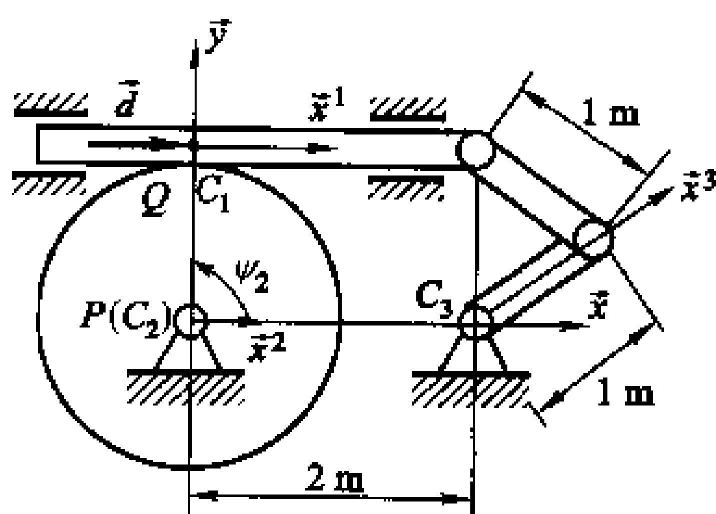
它是以笛卡尔坐标 $\boldsymbol{q} = (\varphi_1 \quad x_2)^{\mathrm{T}}$ 的系统运动方程，与运动学方程式(3)与(9)均等价。该方程的雅可比、速度与加速度约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} 2x_2\sin\varphi_1 & 2x_2 - 2\cos\varphi_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Phi}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} -2\dot{x}_2^2 - 2x_2\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

从此例可见，运动学方程的规模和复杂程度与系统的模化有关。另外与连体基的定义有关。如果连体基的基点能选在非时变的位置处，使描述系统的位形坐标的个数减少，从而使约束方程大大简化。下面再看几个例子。

[例3.5－2] 图示机构通过齿轮－齿条的运动实现曲柄的来回运动。齿轮的节圆半径为1，在图示位置以 $\sin(3.14t)$ 的规律左右来回转动。试建立系统的运动学方程。

解： 此机构可定义一个三刚体运动学模型与其等效。刚体 B_1 为齿条，刚体 B_2 为齿轮，刚体 B_3 为曲柄。在讨论运动学问题时曲柄与齿条的连接杆质量忽略不计。坐标个数为 $n = 3\times 3 = 9$。定义连体基与公共基如图所示。描述位形的



例3.5－2图1

坐标阵为

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

齿轮与公共基有两个绝对位置约束式(3.3－3)与(3.3－5)，记为 H_1 与 H_2。齿条与公共基有一个绝对位置约束式(3.3－3)与绝对角约束式(3.3－18)，记为 H_3 与 H_4。曲柄与公共基有两个绝对位置约束式(3.3－3)与(9.3－5)，记为 H_5 与 H_6。共6个绝对约束方程。齿轮－齿条副约条由滑移旋转铰式(3.3－59)与附加约束式(3.3－85)，记为H_7与H_8方程数为2。根据

表 3.5－3 齿轮－齿条机构约束方程参数表

H_i		B_α			B_β			
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{PT}_\alpha$	R_α	β	$\boldsymbol{\rho}'^{QT}_\beta$	$\boldsymbol{d}'^{T}_\beta$	c
1	(ax)	2	0 0					0
2	(ay)	2	0 0					0
3	(ay)	1	0 0					1
4	(aφ)	1						0
5	(ax)	3	0 0					2
6	(ay)	3	0 0					0
7	(tr)	2	0 0	1	1	0 0	1 0	1
7	(rp)	2	0 0	1	1	0 0	1 0	0
8	(rr)	3	1 0		1	2 0		1

约定，按图示几何尺寸有 $\psi_1=0$。$\psi_2=\pi/2$，$\theta=\pi/2$ 故有 $c=0$。齿条与曲柄间有一等距约束式(3.3－64)记为 H_9。约束方程的总数 $s=9$。根据铰的位置系统的参数表列在表 3.5－3。约束方程为

$$\Phi_1^{(ax)}=x_2=0 \tag{1}$$

$$\Phi_2^{(ay)}=y_2=0 \tag{2}$$

$$\Phi_3^{(ay)}=y_1-1=0 \tag{3}$$

$$\Phi_4^{(a\varphi)}=\varphi_1=0 \tag{4}$$

$$\Phi_5^{(ax)}=x_3-2=0 \tag{5}$$

$$\Phi_6^{(ay)}=y_3=0 \tag{6}$$

$$\Phi_7^{(tr)}=x_2-x_1+(\varphi_2-\varphi_1)=0 \tag{7}$$

$$\Phi_8^{(rp)}=y_2-y_1+1=0 \tag{8}$$

$$\Phi_9^{(rr)}=(x_2-x_1+\cos\varphi_3-2\cos\varphi_1)^2+(y_2-y_1+\sin\varphi_3-2\sin\varphi_1)^2-1=0 \tag{9}$$

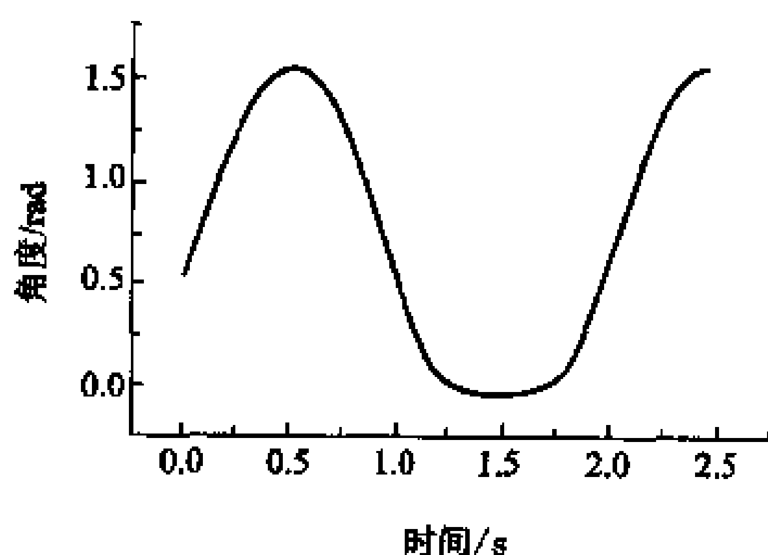
9个方程，9个坐标，系统运动学模型的自由度为零。显然模型定义有误。经检

查.上述方程中式(2),(3)与(8)中有 1 个冗余,现将式(8)去除。故上述 9 个主约束方程中有 8 个是独立的。机构的自由度 $\delta=9-8=1$。此模型的自由度数与原机构一致。需附加 1 个驱动约束。根据已知条件,此驱动约束为绝对旋转驱动约束式(3.4-7),有

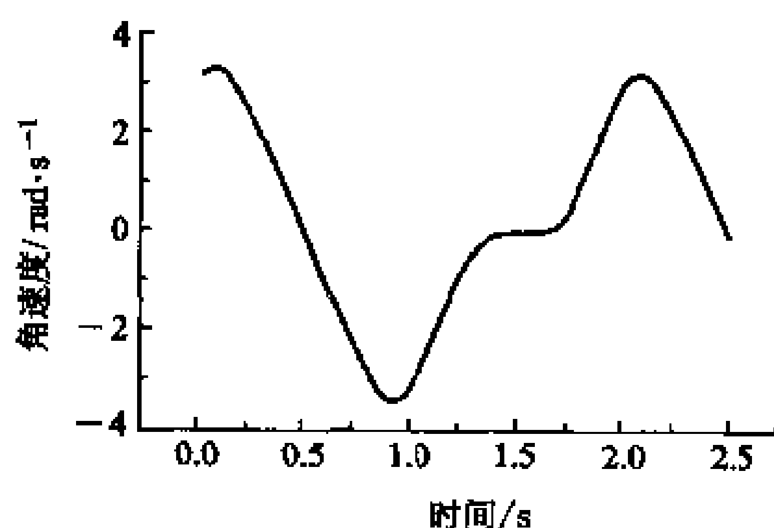
$$\Phi_{10}^{(a\varphi d)} = \varphi_2 - \sin(3.14t) = 0 \tag{10}$$

方程式(1)~(7),(9)与(10)构成系统的运动学方程。系统约束方程的雅可比、速度与加速度约束方程的右项可根据前几个例子的类似的方法调用各约束的约束方程雅可比、速度与加速度约束方程的右项进行组集。

直接利用《理论力学问题求解器》(见附录 C),将上述数据输入软件。软件首先进行自由度分析,得到回答为 1。然后将驱动约束条件输入,计算机按数学模型进行仿真计算。用户可通过后处理以数表或曲线的形式观察系统各变量的时间响应,也可以动画的形式观察整个系统的运动情况。图 2 所示的是构件 B_3 的角度曲线,图 3 所示的是 B_3 构件的角速度曲线。



例 3.5-2 图 2



例 3.5-2 图 3

如果不通过《理论力学问题求解器》,读者可首先对上述运动学方程进行缩并。解出式(1)~(6),代入式(7)与(9),得到由式(7),(9)与(10)等三个方程构成的系统运动学方程,即

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{Bmatrix} \Phi_7^{(tr)} \\ \Phi_9^{(tr)} \\ \Phi_{10}^{(a\varphi d)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_1 + \varphi_2 \\ (-x_1 + \cos\varphi_3 - 2)^2 + (-1 + \sin\varphi_3)^2 - 1 \\ \varphi_2 - \sin 3.14t = 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{11}$$

该运动学方程的笛卡尔坐标为

$$\boldsymbol{q} = (x_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3)^{\mathrm{T}}$$

方程(11)与原 10 个方程构成的运动学方程。通过对式(11)求一、二阶导数,可得到约束方程的雅可比、速度与加速度约束方程的右项为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2(x_1 - \cos\varphi_3 + 2) & 0 & 2x_1 + 4\sin\varphi_3 - 2\cos\varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

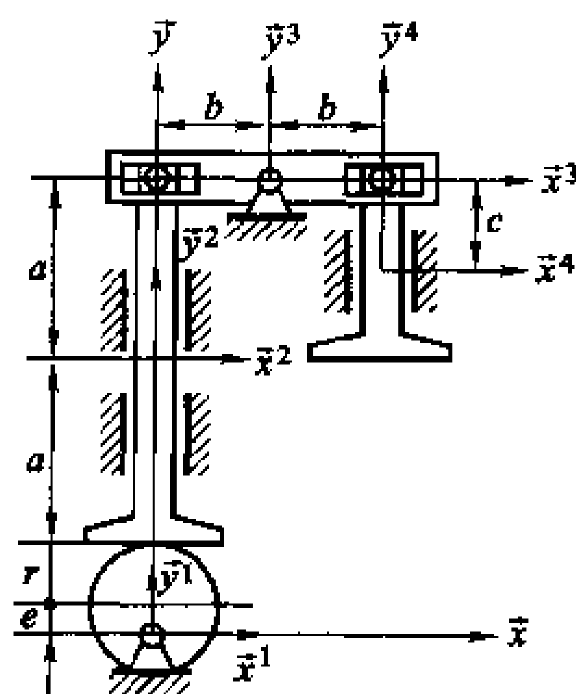
$$\boldsymbol{\Phi}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.14\cos 3.14t \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\dot{x}_1\dot{\varphi}_3\sin\varphi_3 - [2(x_1+2)\cos\varphi_3 - \sin\varphi_3]\dot{\varphi}_3^2 \\ 3.14^2\sin 3.14t \end{pmatrix} \tag{13}$$

由(11)～(13)同样可进行运动学分析，显然要方便得多。

[例 3.5－3]　图示机构为汽缸的配气系统。图中 $a=4$ cm，$b=3$ cm，$c=2$ cm。凸轮的外形曲线是半径为 $r=1$ cm 的圆，圆心偏置转轴 $e=0.25$ cm。试建立系统的运动学方程。

解：系统的刚体系模型可定义为 4 个刚体构成，它们分别为凸轮、顶杆、摇臂与气门，编号为 B_1 至 B_4。$N=4$，刚体笛卡尔坐标个数为 $3\times4=12$。建立连体基与公共基如图所示。支座（滑槽）固结在公共基。凸轮与支座有 2 个绝对位置约束式(3.3－3)与(3.3－5)，分别记为 H_1 与 H_2。顶杆与滑槽有 1 个绝对位置约束式(3.3－3)，1 个绝对角约束式(3.3－18)，分别记为 H_3 与 H_4。摇臂与支座有 2 个绝对位置约束式(3.3－3)与(3.3－5)分别记为 H_5 与 H_6。顶杆与滑槽和气门与滑槽各有 1 个绝对位置约束式(3.3－3)，1 个绝对角约束式(3.3－18)，分别记为 H_7 与 H_8。凸轮与顶杆间为凸轮－顶杆副，记为 H_9，外形曲线极坐标为 $s_1(\theta)=1$。有 2 个约束方程式(3.3－109)。顶杆与摇臂和气门与摇臂均为滑移－旋转铰式(3.3－59)，分别记为 H_{10} 与 H_{11}，共有 2 个约束方程。此模型有 11 个铰，共有约束方程 $s=12$ 个。根据铰的位置系统的参数表列在表 3.5－4。注意凸轮－顶杆副有 1 个描述凸轮外形的附加坐标 θ_1 式(3.3－110)，故系统的坐标个数为 $n=12+1=13$。坐标阵为



例 3.5－3 图

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_4^{\mathrm{T}} \quad \theta_1)^{\mathrm{T}}$$

表 3.5-4　汽缸的配气机构约束方程参数表

H_i		B_α			B_β			
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}$	$\boldsymbol{d}'^{T}_{\alpha}$	β	$\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}$	$\boldsymbol{d}'^{T}_{\beta}$	c
1	(ax)	1	0　0					0
2	(ay)	1	0　0					0
3	(ax)	2	0　0					0
4	(aφ)	2						0
5	(ax)	3	0　0					3
6	(ay)	3	0　0					9.25
7	(ax)	4	0　0					6
8	(aφ)	4						0
9	(cff)	2	0　-4	-1　0	1	0　0.25		
10	(tr)	2	0　4		3	0　0	1　0	0
11	(tr)	4	0　2		3	0　0	1　0	0

将表 3.5-4 中的参数代入相应的约束方程有

$$\Phi_1^{(ax)} = x_1 = 0 \tag{1}$$

$$\Phi_2^{(ay)} = y_1 = 0 \tag{2}$$

$$\Phi_3^{(ax)} = x_2 = 0 \tag{3}$$

$$\Phi_4^{(a\varphi)} = \varphi_2 = 0 \tag{4}$$

$$\Phi_5^{(ax)} = x_3 - 3 = 0 \tag{5}$$

$$\Phi_6^{(ay)} = y_3 - 9.25 = 0 \tag{6}$$

$$\Phi_7^{(ax)} = x_4 - 6 = 0 \tag{7}$$

$$\Phi_8^{(a\varphi)} = \varphi_4 = 0 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_9^{(cff)} = \begin{pmatrix} -(x_1 - x_2)\sin\varphi_2 + (y_1 - y_2)\cos\varphi_2 + \\ \qquad \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \theta_1) + 0.25\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 4 \\ -\cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \theta_1) \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{10}^{(tr)} = -(x_2 - x_3)\sin\varphi_3 + (y_2 - y_3)\cos\varphi_3 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{11}^{(tr)} = -(x_4 - x_3)\sin\varphi_3 + (y_4 - y_3)\cos\varphi_3 + 2\cos(\varphi_4 - \varphi_3) = 0 \tag{11}$$

上述 12 个方程为系统的主约束方程。模型的自由度 $\delta = 13 - 12 = 1$。此模型的自由度与机构的自由度一致，需增加一个驱动约束。此约束可定义为凸轮绕支座绝对旋转驱动约束式(3.4-7)。如果凸轮以等角速度 $\omega = \pi$ 旋转，初始位置如图所示。则有 $c_\varphi(t) = 3.14t$。

$$\Phi_{12}^{(a\varphi d)} = \varphi_1 - 3.14t = 0 \tag{12}$$

这样，方程组(1)~(12)成封闭的运动学方程。该方程的雅可比、速度与加速度

约束方程的右项可根据前几个例子的类似的方法调用各约束的约束方程雅可比、速度与加速度约束方程的右项进行组集。然后通过计算机进行运动学分析。

同样上述运动学约束方程可缩并。将式(1)～(8)代入式(9)～(11)，经整理，式(9)～(11)可简化为

$$\boldsymbol{\Phi}_9^{(\mathrm{cdf})} = \begin{pmatrix} -y_2 + \sin(\varphi_1 + \theta_1) + 0.25\cos\varphi_1 + 4 \\ -\cos(\varphi_1 + \theta_1) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{13}$$

$$\Phi_{10}^{(\mathrm{tr})} = 3\sin\varphi_3 - (y_2 - 5.25)\cos\varphi_3 = 0 \tag{14}$$

$$\Phi_{11}^{(\mathrm{tr})} = -3\sin\varphi_3 + (y_4 - 7.25)\cos\varphi_3 = 0 \tag{15}$$

其中式(13)中的第二式可写为

$$\varphi_1 + \theta_1 - \pi/2 = 0 \tag{16}$$

对照图示读者不难验证约束方程(14)～(16)的正确性。将式(16)代替式(13)的第二式，方程(13)～(15)与驱动方程(12)可构成以坐标为

$$\boldsymbol{q} = (\varphi_1 \quad y_2 \quad \varphi_3 \quad y_4 \quad \theta)^{\mathrm{T}}$$

的运动学方程，即

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_9^{(\mathrm{cdf})} \\ \Phi_{10}^{(\mathrm{tr})} \\ \Phi_{11}^{(\mathrm{tr})} \\ \Phi_{12}^{(\mathrm{a\varphi d})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 + \sin(\varphi_1 + \theta_1) + 0.25\cos\varphi_1 + 4 \\ \varphi_1 + \theta_1 - 1.57 \\ 3\sin\varphi_3 + (y_2 - 5.25)\cos\varphi_3 \\ -3\sin\varphi_3 + (y_4 - 7.25)\cos\varphi_3 \\ \varphi_1 - 3.14t \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{17}$$

此方程与原运动学方程等价。由此可解出 $\varphi_1, y_2, y_4, \varphi_3$ 与 θ_1 的时间历程。通过对式(17)求一，二阶导数，可得到约束方程的雅可比、速度与加速度约束方程的右项，它们分别为

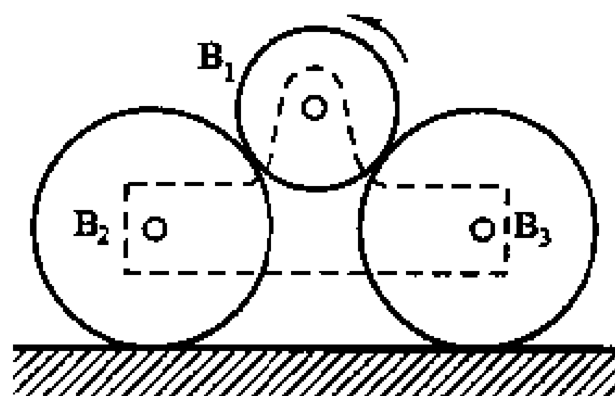
$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \theta_1) - 0.25\sin\varphi_1 & -1 & 0 & 0 & \cos(\varphi_1 + \theta_1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos\varphi_3 & 3\cos\varphi_3 - (y_2 - 5.25)\sin\varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3\cos\varphi_3 - (y_4 - 7.25)\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.14 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} (\varphi_1 + \theta_1)^2\sin(\varphi_1 + \theta_1) + 0.25\varphi_1^2\cos\varphi_1 \\ 0 \\ 3\varphi_3^2\sin\varphi_3 + (y_2 - 5.25)\varphi_3^2\cos\varphi_3 + 2\dot{y}_2\varphi_3^2\sin\varphi_3 \\ -3\varphi_3^2\sin\varphi_3 - (y_4 - 7.25)\varphi_3^2\cos\varphi_3 + 2\dot{y}_4\varphi_3^2\sin\varphi_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

习　题

3-1　对于一曲柄滑块机构，建立三个不同但等效的运动学模型并且写出它们的参数表。

3-2　题图所示一小铁轨车由齿轮驱动。驱动齿轮为 B_1，从动齿轮为 B_2 与 B_3。B_1 的节圆半径为 0.15 m，B_2 与 B_3 节圆半径为 0.375 m。当 B_1 以等角加速度 10π rad/s^2 由静止驱动到角速度为 20π rad/s 时，试用分离变量法或附加驱动约束法求小车的位移、速度和加速度。



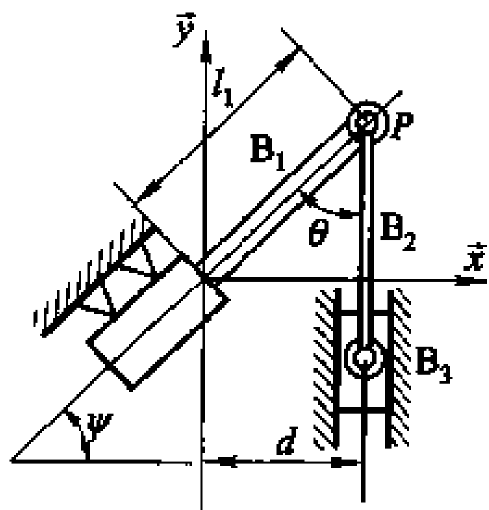
题 3-2 图

3-3　推导出齿轮-齿条副约束方程的雅可比矩阵和加速度约束方程右项。

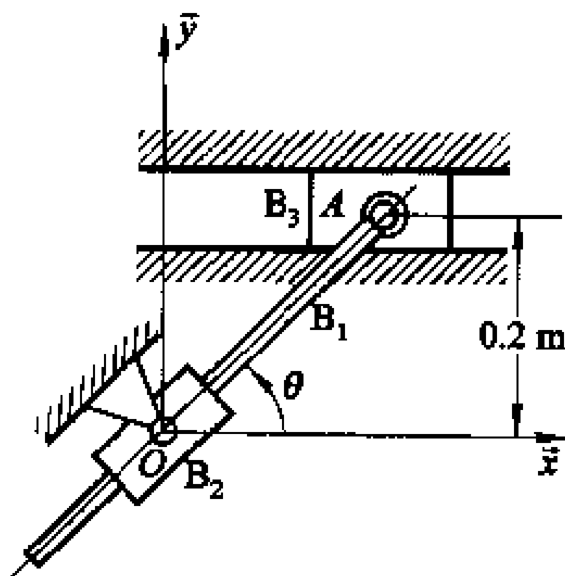
3-4　推导凸轮-从动副约束方程的雅可比矩阵和加速度约束方程右项。

3-5　推导凸轮-平面从动副约束方程的雅可比矩阵和加速度约束方程右项。

3-6　题图所示机构由液压缸的活塞 B_1 驱动，通过连杆 B_2 带动滑块 B_3 上下运动。图中 $d=0.32$ m。连杆 B_2 的长度 $l_2=0.32$ m。活塞缸固结于地面，倾角 $\psi=45°$。活塞 B_1 的驱动规律为 $l_1=l_0+0.08t$（t 的单位为 s，l_0 和 l_1 的单位为 m）推动点 P。试用分离变量法或附加驱动约束法求当 $\theta=45°$时滑块 B_3 的位移、速度和加速度。



题 3-6 图



题 3-7 图

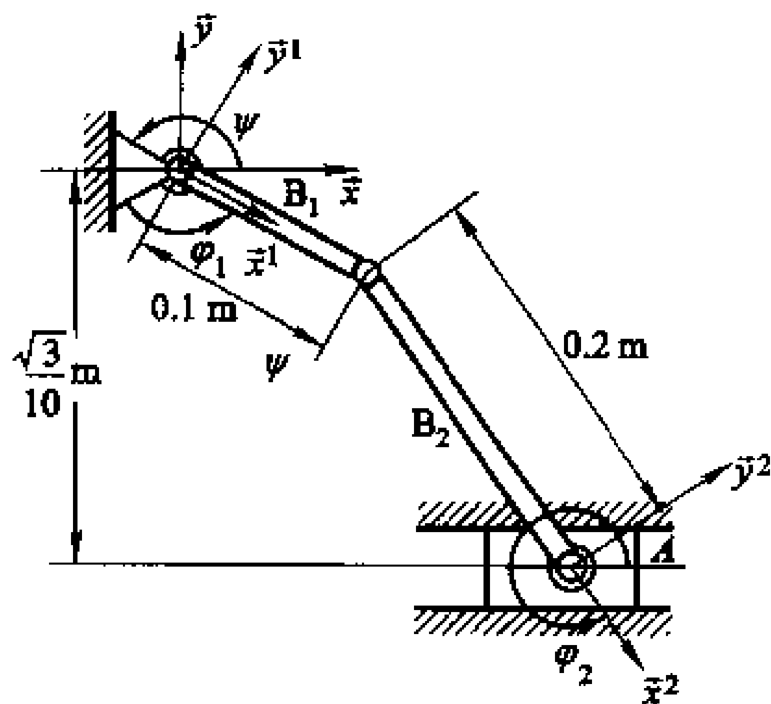
3-7　题图所示套筒 B_2 可绕点 O 转动，杆 B_1 通过在套筒 B_2 中的滑动，带动滑块 B_3 左右运动。套筒 B_2 的转动规律为 $\theta=\pi/3+0.25t-t^2$（t 的单位为 s，θ 的单位为 rad），试求当

$t=0.25$ s 时点 A 的位移、速度和加速度。

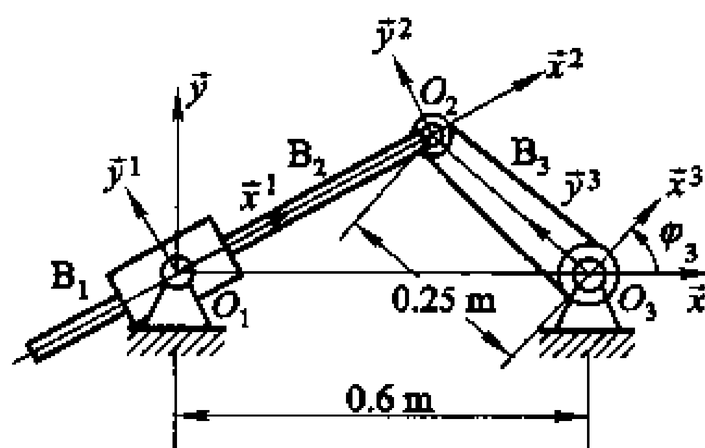
3-8 题图所示二连杆机构，构件 B_1 和 B_2 之间的相对角被驱动，驱动规律为 $\varphi_1-\varphi_2=\pi t/18(t\in[0,8]\ \text{s})$。求当 $t=6$ s 时点 A 的位移、速度和加速度。

3-9 题图所示机构由三个构件组成，即套筒 B_1，杆 B_2 与曲柄 B_3。公共基与各构件的连体基如图所示。杆 B_2 相对于套筒 B_1 有相对滑动，令矢量 $\vec{h}=\overrightarrow{O_1O_2}$，如果该相对滑动受控，其驱动规律为：$\vec{e}_1^1\cdot\vec{h}=0.1t-0.4(t\in[7.5,12]\ \text{s})$。求当 $\varphi_3=0$ 时 $\dot{\varphi}_3$ 和 $\ddot{\varphi}_3$ 的值。

3-10 一机构的连体基与公共基如题图所示。构件 B_1 的转动驱动规律已知，即 $\varphi_1=\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{15}t$（$t$的单位为s，$\varphi_1$的单位为rad）。设机构的位形坐标为$\boldsymbol{q}=(x_1\quad y_1\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$，利用



题 3-8 图

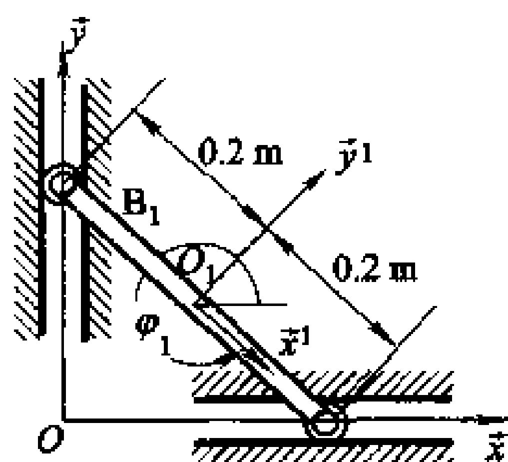


题 3-9 图

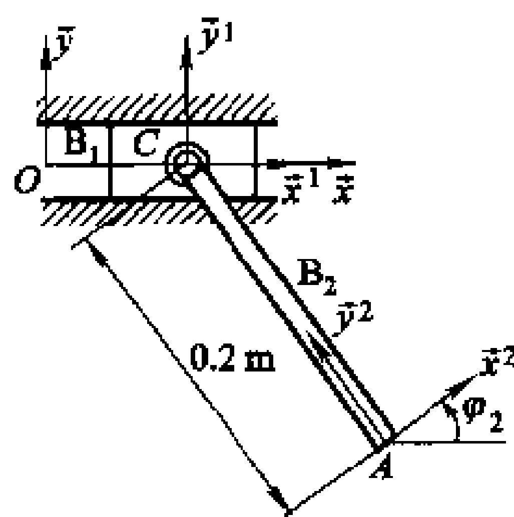
附加驱动约束法的计算步骤（见 3.2.2）计算 $t=0$ 和 $t=0.1$ 两时刻的 $\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$。求位形坐标值时，采用 N-R 方法（见附录 B.2），令 $t=0$ 的迭代初值 $\boldsymbol{q}_0^{(0)}=\boldsymbol{q}^{(0)}(0)=(0.105\quad 0.173\quad 5\pi/3)^{\mathrm{T}}$，计算精度定为 $\varepsilon_c=\varepsilon_s=0.000\,1$。

3-11 题图所示机构为一长度为 0.2m 的单摆悬挂在滑块上。机构的连体基与公共基如图所示。滑块和摆分别由绝对和转动驱动件所驱动，其规律为 $x_1=\frac{2}{10}t,\varphi_2=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{10}t$（$t$的单位为 s，$\varphi_2$ 的单位为 rad）。设机构的位形坐标为 $\boldsymbol{q}=(x_1\quad \varphi_1\quad x_2\quad y_2\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$，利用附加驱动约束法的计算步骤（见 3.2.2）计算 $t=0$ 和 $t=0.1$ 两时刻的 $\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$。求位形坐标值时，采用 N-R 方法（见附录 B.2），令 $t=0$ 的迭代初值为 $\boldsymbol{q}_0^{(0)}=\boldsymbol{q}^{(0)}(0)=(0\quad 0.001\quad 0.15\quad -0.173\quad \pi/6)^{\mathrm{T}}$，计算精度定为 $\varepsilon_c=\varepsilon_s=0.000\,1$。

3-12 题图所示为一薄板切割机构，它由四个构件组成：曲柄 1、刀臂 2、摇臂 3 和机架 4，分别由旋转铰连接。公共基与每个构件的连体基如图所示。曲柄 1 长 0.04 m。铰 B 与铰 C 的间距为0.28m，铰 D 与铰C的间距为0.4m。刀片 P 在刀臂2连体基上的坐标为



题 3－10 图



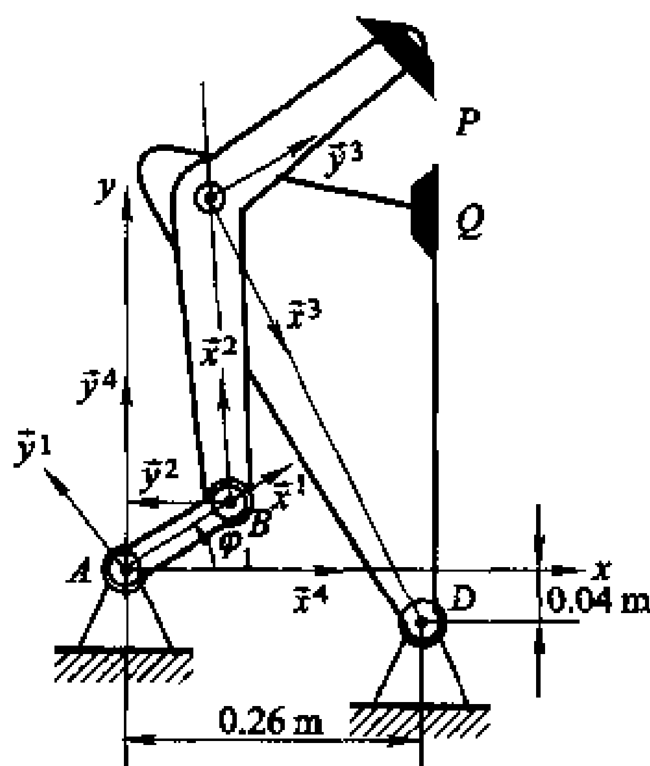
题 3－11 图

(0.32 m　-0.24 m)，刀片 Q 在摇臂 3 连体基上的坐标为(0.14m　0.2m)。尖端位置点 P 与 Q 的 x 方向的速度具有特殊意义。在实际的机构中，一张张纤维板或金属板进给到两刀片之间，而两刀片周期性地合拢来切断薄板。两刀刃的 x 方向的速度与送板速度要非常准确地协调配合。现曲柄 1 以转速 $n=60$ r/min 按逆时针驱动。令初始时曲柄处在水平位置。

(1) 对系统进行运动学模型的定义，计算广义坐标和约束的数目，以求出自由度数。并从物理上进行校核。

(2) 建立机构约束方程的参数表，利用《理论力学问题求解器》进行计算，令 $t\in[0,3]$s。

(3) 利用求解器的动画显示，观测点 P 和 Q 的运动轨迹。



题 3－12 图

3－13　考虑如题图所示的机构，由四个构件组成：即曲柄 1、齿轮 2、齿条 3 和机架 4。如图建立了公共基与连体基。齿轮的节圆半径为 0.01 m，以转速 $n=60$ r/min 按顺时针方向驱动。令初始时曲柄处在水平位置。

(1) 对系统进行运动学模型的定义，计算广义坐标和约束的数目，以求出自由度数，并从物理上进行校核。

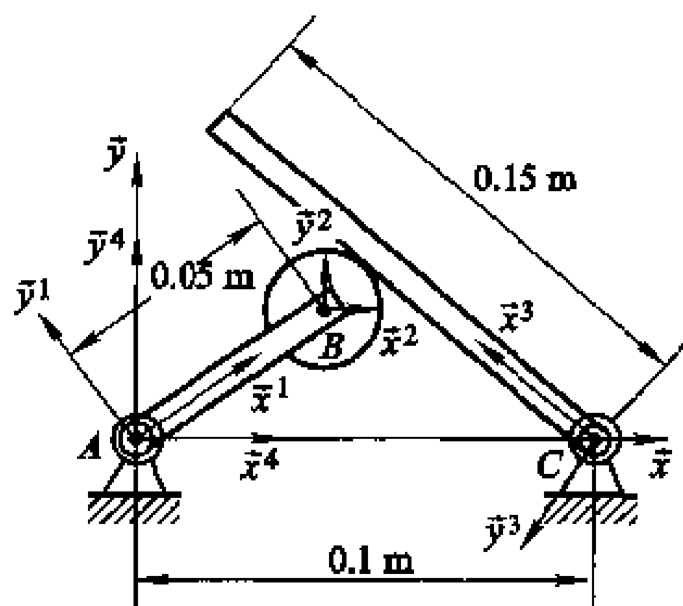
(2) 建立铰的参数表，利用《理论力学问题求解器》进行计算，令 $t\in[0,2]$ s。

(3) 利用求解器的运动曲线输出观测：

(a) 齿轮质心的位移、速度和加速度的时间历程。

(b) 曲柄的角位移、角速度和角加速度的时间历程。

(c) 齿条的角位移、角速度和角加速度的时间历程。



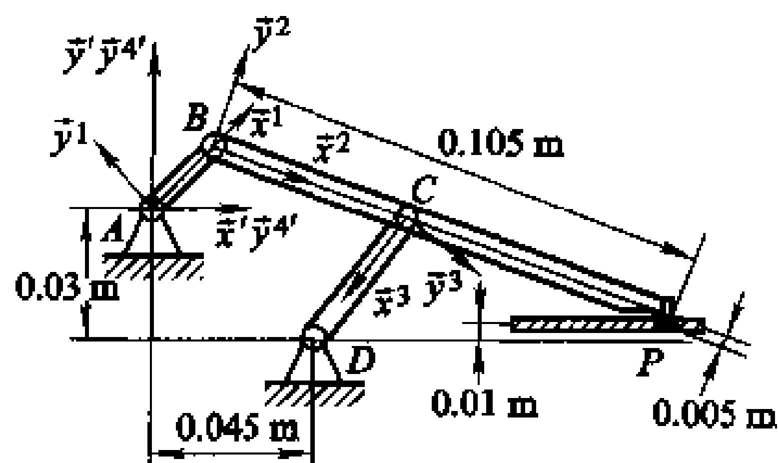
题 3－13 图

3－14　题图所示为一胶片随动机构，它由四个构件组成：曲柄 1、从动杆 2、摇臂 3 和机架 4，分别由旋转铰连接。公共基与每个构件的连体基如图所示。曲柄 1 与摇臂 3 长分别为 0.015 m 与 0.03 m。铰 B 与铰 C 的间距为 0.05 m，其他尺寸见图。从动杆 2 上的点 P 起拉胶片移动的作用。现曲柄 1 以转速 $n=1\ 000$ r/min 按逆时针驱动。令初始时曲柄处在水平位置。

(1) 对系统进行运动学模型的定义，计算广义坐标和约束的数目，以求出自由度数。并从物理上进行校核。

(2) 建立机构约束方程的参数表，利用《理论力学问题求解器》进行计算，令 $t\in[0,3]$ s。

(3) 利用求解器的动画显示，观测点 P 的运动轨迹。



题 3－14 图

第4章　矢量动力学基础

第2章与第3章介绍了点、刚体与刚体系运动学及其分析的方法。作为一个存在约束的刚体系，描述它位形的独立坐标个数是唯一的，运动学的问题是在已知独立坐标运动的情况下研究系统各刚体的位形、速度与加速度，在此基础上可得到刚体上给定点的运动学。在进行运动学分析时不考虑系统外物体对其力的作用和刚体相互之间力的作用。事实上存在独立坐标的系统，在受力的情况下，物体的运动与施加在其上的力有关，建立力与运动的关系是动力学研究的任务。此外，这种关系与物体的惯性有关，故在处理动力学问题时还必须考虑物体的质量分布，这也是动力学与运动学不同之处。

质点、质点系(包括刚体与刚体系)动力学的基本问题有三类：

(1) 已知系统所受的力，求它们的运动规律，称为**动力学正问题**。

(2) 已知系统的运动规律，求产生该运动所作用于系统上的力，称为**动力学逆问题**。作为特殊情况，当系统处于静止时，动力学问题退化为**静力学问题**。

(3) 已知系统的部分刚体所受的力与部分刚体的运动规律，求整个系统的运动规律与受力情况，称为**动力学混合问题**。

如同运动学分析一样，在研究机械系统的动力学问题时，首先应定义该系统的**力学模型**，如质点、质点系、刚体或刚体系。然后，根据力学的基本原理建立起该力学模型的力与系统运动的关系，即运动微分方程，它是该力学模型的**数学模型**。这样，动力学正问题与混合问题成为对运动微分方程进行积分运算的数学问题。动力学逆问题成为对运动方程进行微分运算的数学问题。建立动力学数学模型的方法有矢量动力学与分析动力学两种。本章将介绍矢量动力学基础，分析动力学基础安排在第6章。

矢量动力学的基础是由伽利略(G. Galilei)奠定的。他建立了以观察与实验为基础的科学研究方法。牛顿继续了他的工作，1687年牛顿在他的名著《自然哲学的数学原理》中对矢量动力学作了系统的叙述。据此，矢量力学又称为牛顿力学。牛顿力学是质点动力学的理论基础，它的组成部分为著名的牛顿三定律以及作为这三定律补充的"力的作用的互不相关定律"。牛顿三定律叙述如下：

第一定律　惯性定律。如质点不受力的作用，则永远保持静止，或作匀速直线运动。

第二定律　力与加速度关系定律。质点受一力作用而产生加速度，其方向

与作用力相同,其大小与力的大小成正比。

如果定义质点的质量为 m,作用于质点的力矢量为 $\vec{F}$,质点的瞬时加速度矢量为 $\vec{a}$,则此定律的表达式为

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

第三定律 作用与反作用定律。有一个作用力必存在另一个反作用力,其大小与作用力相等,方向与作用力相反。

需要强调的是作用与反作用力是分别出现在两个相互作用的质点上。

本章将根据牛顿的基本定律建立适用于质点系、刚体或刚体系的动力学基本定理,为解决机械系统的动力学分析打下基础。这些基本定理是动量定理、动量矩定理与动能定理,简称为矢量动力学的三大定理。由于动量定量、动量矩定理在处理刚体与刚体系动力学问题上占用重要的地位,在下一章中还将详细介绍应用这两个基本定理处理系统动力学问题的方法。

4.1 力

4.1.1 力与力系

在物理学中读者已经学过有关力的概念,本节将作简要的回顾与拓展。

力是物体之间的相互的作用,能使物体的运动状态发生改变,或使物体变形。在理论力学中讨论的主要对象为质点或刚体,则力的作用只改变其运动状态。在国际单位制中,力的单位为 N。力具有如下性质:

(1) 力对物体的作用效果取决于力的大小、方向与作用点。此性质称为**力的三要素**。可用一个有向线段来描述其方向与大小,用该有向线段的起点或终点描述其作用点。线段所在的直线称为**力的作用线**。

(2) 在同一个作用点,两个力的效应可由一个称为两力的合力等效。该合力的作用点不变,合力的大小与方向由表示两力的有向线段为边构成的平行四边形的对角线确定此性质称为**力的平行四边形法则**。表明力的合成符合矢量求和法则。力的上述性质表明力是一个矢量。

作为一种特殊情况,如果作用在一刚体上的两个力大小相等、方向相反,且作用线在同一条直线上,其合力为零,刚体处于平衡或作匀速直线运动。

考虑如图 4-1a 所示刚体上的点 A 受到力 $\vec{F}$。点 B 为该力作用线上的另一点。在点 A 与 B 上分别加上大小相等方向相反的一对力 $\vec{F}'$ 与 $\vec{F}''$,如图 4-1b 所示。由于它们的合力为零,故刚体上增加这对力不改变原力 $\vec{F}$ 对刚体作用的效果。如果力 $\vec{F}'$ 的大小与 $\vec{F}$ 的相等,作用在点 A 的一对力的合力为零。显然根据同一个原理,去除这对力对刚体的运动无影响。由此可知力在刚体上的作

用点可沿作用线延至刚体内的任意点而不改变该力对刚体作用的效果。此性质称为**力的可传性**。故对于刚体而言，力是一个可在作用线上滑移的**滑移矢量**。考虑到这个性质，力的三要素可改为大小、方向与作用线。注意对于变形体，力的作用效果与作用点有密切关系，作用点的位置不能随意改变。此时力是一个**固定矢量**

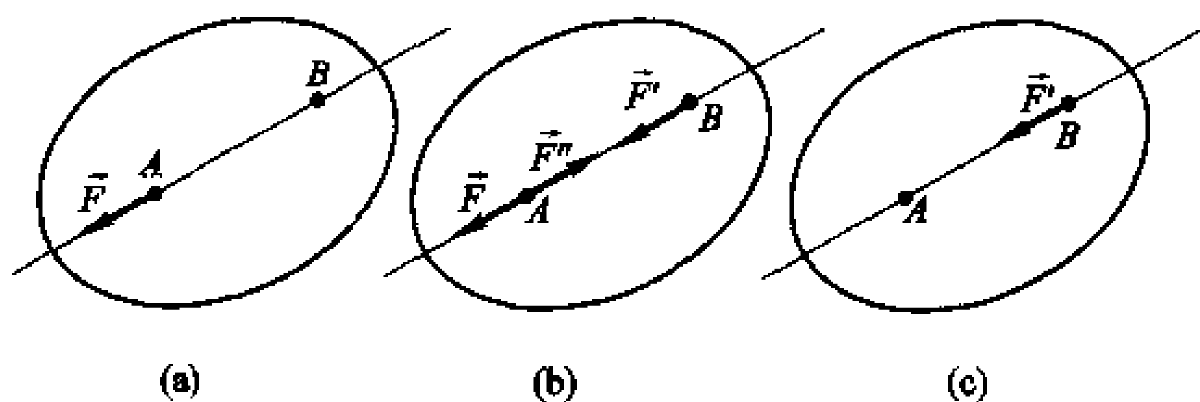


图 4-1 力的可传性

(3) 作用力与反作用力同时存在，大小相等、方向相反，沿同一作用线分别作用在不同的物体上。

根据上述分析，对于作空间运动质点 P 的力 $\vec{F}$，可按三维矢量几何描述，它在某个基的坐标阵为 $\boldsymbol{F}=(F_x \quad F_y \quad F_z)^{\mathrm{T}}$。如果质点 P 作平面运动，作用在该点上垂直该运动平面(约定为 z 方向)的合力为零，故作用于该点的力 $\vec{F}$ 在该方向的分量不必考虑。因此，可将该力作平面矢量处理，其坐标阵为二维，即 $\boldsymbol{F}=(F_x \quad F_y)^{\mathrm{T}}$。

如果有 n 个质点 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上，作用有 n 个力 $\vec{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$，它们构成一个**力系**，记为 $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)$。如果这些力的作用线可以汇交于一点，该力系称为**汇交力系**。作用线相互平行的力系称为**平行力系**。作用线均在同一个平面的力系称为**平面力系**，作用线在三维空间分布的力系称为**空间力系**。

由力的性质(2)，现将力系中 n 个力 $\vec{F}_i$ 的矢量和称为该力系的**主矢**，记为

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \tag{4.1-1}$$

4.1.2 力矩

为了描述刚体运动的转动效应，需引入抽象的力**对点的矩**(简称为**力矩**)的概念。将作用在质点 P 的力 $\vec{F}$ 对某点 O 的矩记为 $\vec{M}_O(\vec{F})$，它的定义为

$$\vec{M}_O(\vec{F}) \overset{\mathrm{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F} \tag{4.1-2}$$

式中：点 O 称为**力**矩的**矩心**；$\vec{r}$ 为质点 P 关于矩心 O 的矢径。显然，力矩为一矢量，它的方向垂直于由矢量 $\vec{r}$ 与 $\vec{F}$ 组成的平面，大小记为 $M_O(\vec{F})$，即

$$M_O(\vec{F}) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{M}_O(\vec{F})| = Fr\sin\theta = Fd \qquad (4.1-3)$$

式中：F 与 r 分别为矢量 $\vec{F}$ 与 $\vec{r}$ 的模；θ 为两矢量的夹角；d 为矩心到力 $\vec{F}$ 作用线的距离（见图4-2）。显然力矩是一固定矢量，其作用点为矩心。如果有一个参考基，由式(4.1-2)，力矩在该基的坐标式可表示为

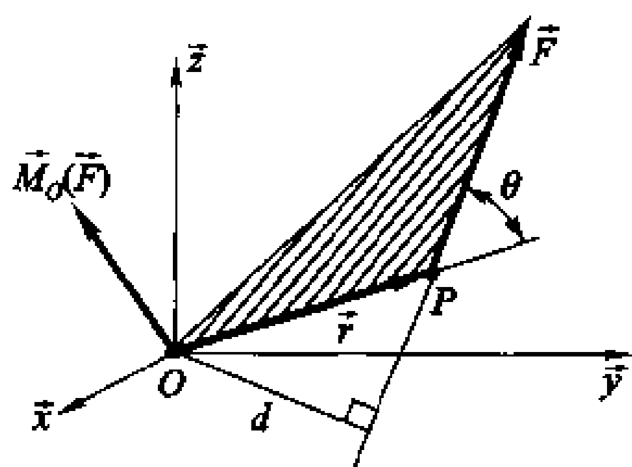


图4-2 对 O 点的力矩

$$\boldsymbol{M}_O(\vec{F}) = \tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F} \qquad (4.1-4)$$

令 $\mathrm{r} = (x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}}$，经展开有

$$M_{Ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y \qquad (4.1-4'\mathrm{a})$$

$$M_{Oy}(\vec{F}) = zF_x - xF_z \qquad (4.1-4'\mathrm{b})$$

$$M_{Oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x \qquad (4.1-4'\mathrm{c})$$

上式中的 $M_{Ox}(\vec{F})$，$M_{Oy}(\vec{F})$ 与 $M_{Oz}(\vec{F})$ 分别为力矩矢量 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 在三个基矢量上的坐标，即

$$\boldsymbol{M}_O(\vec{F}) = (M_{Ox}(\vec{F}) \quad M_{Oy}(\vec{F}) \quad M_{Oz}(\vec{F}))^{\mathrm{T}} \qquad (4.1-5)$$

称 $M_{Ox}(\vec{F})$，$M_{Oy}(\vec{F})$ 与 $M_{Oz}(\vec{F})$ 分别为力 $\vec{F}$ 对于过点 O 的轴 x，y 与 z 的矩。它们将用来描述力对刚体绕此轴转动的效应。

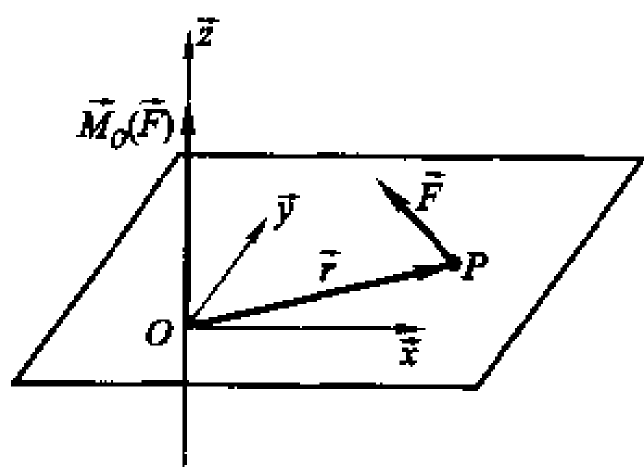


图4-3 对 Oz 轴的力矩

对于平面问题，如图4-3所示，在参考平面 Oxy 上考虑一平面力。即点 P 上受到一作用的力 $\vec{F}$，它在该平面上。由式(4.1-4)，该力对 O 点的矩为 $M_{Ox}(\vec{F}) = 0$、$M_{Oy}(\vec{F}) = 0$ 与 $M_{Oz} = xF_y - yF_x$。可见该力矩的方向沿 z 轴，其大小等于该力对 Oz 轴之矩，即

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_{Oz}(\vec{F})\vec{z}$$

如果令 $\boldsymbol{r} = (x \quad y)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F} = (F_x \quad F_y)^{\mathrm{T}}$，力 $\vec{F}$ 对 O 的矩的模可表示为

$$M_O(\vec{F}) = M_{Oz}(\vec{F}) = (\bar{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = xF_y - yF_x \qquad (4.1-6)$$

4.1.3 力偶

大小相等、方向相反、作用线相互平行的两力称为**力偶**。例如司机两手同时施于方向盘的力 $\vec{F}$ 组成一个力偶。尽管 $\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$，但作用线不重合，故这两个力不可能用一个力与其等效。如果说单个力是最简单的力系，则力偶是另一种

不可能再简化的简单的力系。它的作用效果是改变刚体转动状态，或引起变形体扭曲。这种作用效果可以用力偶对任意点的矩来衡量。任意选定空间中确定的点 O 为矩心。记力 $\vec{F}$ 的作用点为 P，$\vec{F}'$ 的作用点为 Q。令点 P 与 Q 相对于矩心 O 的矢径分别记为 $\vec{r}_P$ 与 $\vec{r}_Q$。又定义 P 相对于 Q 的矢量为 $\vec{r}$（见图 4-4）。力偶对矩心 O 的力矩为

$$\vec{r}_P \times \vec{F} + \vec{r}_Q \times \vec{F}' = \vec{r}_P \times \vec{F} + \vec{r}_Q \times (-\vec{F})$$
$$= (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

上式表明，力偶对任意点之矩恒等于矢量积 $\vec{r} \times \vec{F}$，与矩心的选取无关。将该矢量积定义为力偶 $\vec{F}$ 与 $\vec{F}'$ 的**力偶矩矢量**，简称为**力偶矩**，记为 $\vec{M}$，即

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (4.1-7)$$

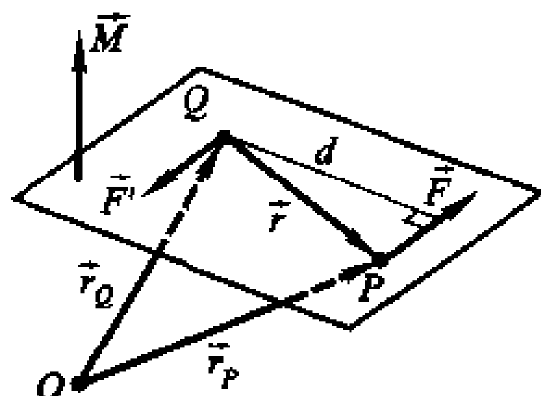


图 4-4 力偶矩

力偶对刚体的作用效果完全取决于力偶矩矢量。以后将该力偶矩矢量表示力偶。既然力偶的作用与矩心无关，则作用于同一刚体的力偶，当力偶矩矢量沿所在的直线移动或平行移动时不影响力偶对刚体作用的效果。可见力偶矩矢量是一**自由矢量**。

将力偶两个力的作用线所决定的平面称为**力偶的作用面**，力偶矩矢量沿该作用面的法线，方向以力偶转动的右手法则为正向（见图 4-4）。两个力的作用线的垂直距离 d 称为**力偶臂**。与作用于刚体的力的三要素类似，力偶对刚体作用取决于力偶的大小、作用面的方位与力偶的转动的方向，它们称为**力偶的三要素**。由于力偶是一自由矢量，可以推断，在保持力偶矩大小与方向不变的条件下，在力偶作用面内随意改变构成力偶的两力之方向，或改变力与力偶臂的大小，或将力偶作用面平行移动，都不影响力偶对刚体的作用效果。此性质称为**力偶的等效性**。

在一个刚体上作用有 n 个力偶 $\vec{M}_i$（$i=1,2,\cdots,n$），它们构成一个**力偶系**，记为 $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \cdots, \vec{M}_n)$。力偶系的合力偶矩 $\vec{M}$ 为 n 个力偶矩 $\vec{M}_i$ 的矢量和，即

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \qquad (4.1-8)$$

4.1.4 力系的简化

1. 主矢与主矩

与力偶不同，力是滑移矢量而不是自由矢量，其作用线如果作平行移动，会改变它对刚体的作用效果。

设力 $\vec{F}$ 作用于点 P，O 为作用线外的任意点。在点 O 增加一对大小相等、方向相反的力 $\vec{F}'$ 与 $\vec{F}''$，它们的作用线与力 $\vec{F}$ 的作用线平行（见图 4-5a）。显

然，力 $\vec{F}$ 对刚体的作用与三个力 $\vec{F}$，$\vec{F}'$ 与 $\vec{F}''$ 对刚体共同作用的效果相同。如果力 $\vec{F}$ 与 $\vec{F}''$ 的大小相等，$\vec{F}$ 和 $\vec{F}''$ 构成的一个力偶 $\vec{M}$，那么可以认为力 $\vec{F}$ 的作用效果与一个力 $\vec{F}'$ 和一个力偶 $\vec{M}$ 共同作用效果一致(见图4－5b)，可记为 $\vec{F}=(\vec{F}',\vec{M})$。由此可见，平移力的作用线，必须相应增加一个力偶才可能与原来的力等效，该力偶的力偶矩矢量等于原力 $\vec{F}$ 对平移点 O 的力矩，即

$$\vec{M}=\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F} \tag{4.1-9}$$

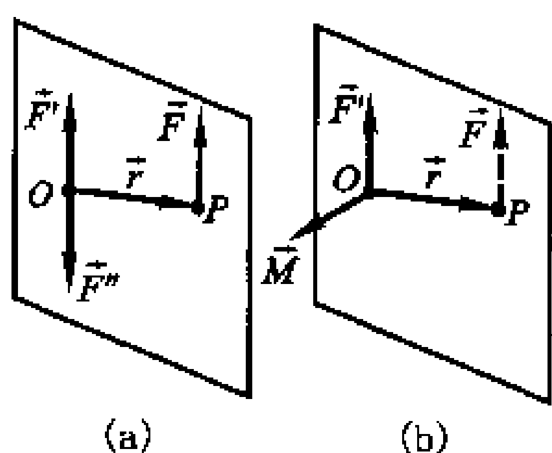


图4－5 力的平移

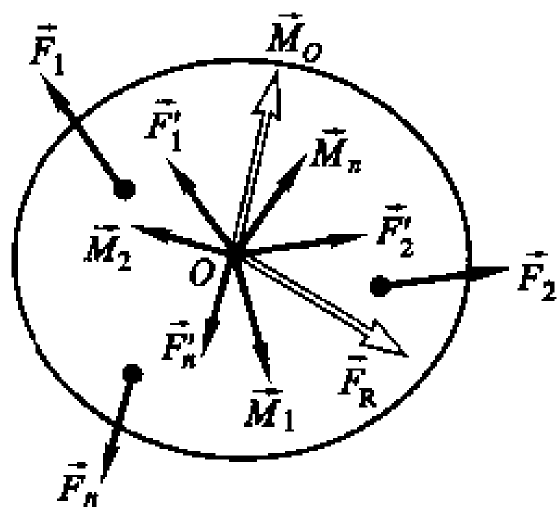


图4－6 力系的简化

对于一个空间力系$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)$与空间任意点 O，如果将力 $\vec{F}_i$ 平移到该点，在该点有一个力 $\vec{F}'_i$ 与附加一个力偶 $\vec{M}_i$ 与原力 $\vec{F}_i$ 等效。这样力系$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)$与点 O 的汇交力系$(\vec{F}'_1,\vec{F}'_2,\cdots,\vec{F}'_n)$和力偶系$(\vec{M}_1,\vec{M}_2,\cdots,\vec{M}_n)$等效(见图4－6)。由式(4.1－1)与(4.1－8)，汇交力系的合力 $\vec{F}_R$ 与力偶系的合力偶矩 $\vec{M}_O$ 分别为

$$\vec{F}_R=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}'_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \tag{4.1-10}$$

$$\vec{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i \tag{4.1-11}$$

由此可知，一个空间力系可简化为一个力与一个力偶的组合，分别称为该力系的**主矢**与**主矩**，可记为$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)=(\vec{F}_R,\vec{M}_O)$。点 O 称为该力系的**简化中心**。主矢等于该力系中各力的矢量和。主矩的力偶矩 $\vec{M}_O$ 等于该力系对简化中心 O 之矩的矢量和。

下面考虑将同一个力系对不同的简化中心简化的结果。令这两个简化中心分别为点 O 与点 C。由式(4.1－10)知，力系关于点 O 与点 C 的主矢大小与方向相同，是一不变量，均为力系的主矢 $\vec{F}_R$。力系关于点 O 与点 C 的主矩分别为 $\vec{M}_O$ 与 $\vec{M}_C$。既然该力系和与$(\vec{F}_R,\vec{M}_O)$等效，那么将$(\vec{F}_R,\vec{M}_O)$再向简化中心 C 简化，得到的主矢与主矩和该力系直接向简化中心 C 简化的结果$(\vec{F}_R,\vec{M}_C)$应

该一致。将$(\vec{F}_R,\vec{M}_O)$向简化中心C简化的过程可认为是一个力$\vec{F}_R$与一力偶$\vec{M}_O$向点C简化。考虑到力偶$\vec{M}_O$为一自由矢量，故力系关于两简化中心的两主矩间的关系为

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O + \vec{m}_C(\vec{F}_R) = \vec{M}_O + \vec{\rho} \times \vec{F}_R \qquad (4.1-12)$$

式中，$\vec{\rho}$为点O相对于点C的矢径(见图4-7)。由式(4.1-12)知，当矢径$\vec{\rho}$与主矢$\vec{F}_R$平行或主矢为零(即$\vec{\rho}\times\vec{F}_R=\vec{0}$)，两主矩相等。否则，力系的主矩因简化中心不同而不同。

图4-7 不同简化中心主矩的关系

将主矢点积式(4.1-12)的两边，有

$$\vec{M}_C \cdot \vec{F}_R = \vec{M}_O \cdot \vec{F}_R \qquad (4.1-13)$$

可见主矢与主矩的点积为不变量。

2. 力系简化的结果

当一个力系简化为$(\vec{F}_R,\vec{M}_O)$时可能得到如下几种结果：

(1) $\vec{F}_R=0,\vec{M}_O=0$，即主矢与主矩均为零，称该**力系平衡**。

(2) $\vec{F}_R=0,\vec{M}_O\neq0$，即该力系与一个合力偶等效。

(3) $\vec{F}_R\neq0,\vec{M}_O=0$，即该力系与一个合力等效。

(4) $\vec{F}_R\neq0$与$\vec{M}_O\neq0$，且不变量$\vec{M}_O\cdot\vec{F}_R\neq0$，则该力系还可简化。如图4.8a所示，总存在简化中心C，有主矩$\vec{M}_C$与主矢$\vec{F}_R$方向一致。这种特殊的力系称为**力螺旋**。

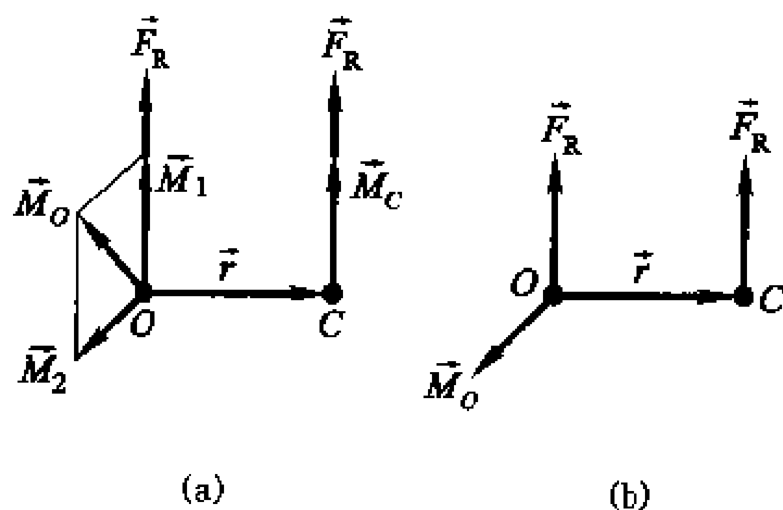


图4-8 力螺旋

下面推导力螺旋的简化中心C的位置与主矩$\vec{M}_C$。定义点C相对于点O的矢径为$\vec{r}$。将主矩$\vec{M}_O$分解为两个分量$\vec{M}_1$与$\vec{M}_2$，$\vec{M}_1$沿主矢$\vec{F}_R$的方向，$\vec{M}_2$垂直于主矢$\vec{F}_R$的方向(见图4.8a)。力系向C简化，由式(4.1-12)有主矩为

$$\vec{M}_C = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 - \vec{r} \times \vec{F}_R \qquad (4.1-14)$$

考虑到力螺旋的结果，即该主矩应与主矢方向一致，$\vec{M}_C=\vec{M}_1$，故有

$$\vec{r}\times\vec{F}_R=\vec{M}_2 \tag{4.1-15}$$

可知矢径 $\vec{r}$、主矢 $\vec{F}_R$ 与主矩的分量 $\vec{M}_1$ 相互垂直，故有

$$\vec{F}_R\times(\vec{r}\times\vec{F}_R)=(\vec{F}_R\cdot\vec{F}_R)\vec{r}=F_R^2\vec{r} \tag{4.1-16}$$

此外，根据矢量几何，由图4.8a可得

$$\vec{M}_2=\vec{F}_R\times(\vec{M}_O\times\vec{F}_R)/F_R^2$$

将上式代入式(4.1-15)，再将主矢 $\vec{F}_R$ 叉积两边，考虑到式(4.1-16)与(1.2-13)，有

$$F_R^2\vec{r}=\vec{F}_R\times\vec{M}_O \tag{4.1-17}$$

写出此式的坐标式，可得简化中心 C 矢径的坐标阵为

$$\boldsymbol{r}=\tilde{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{M}_O/F_R^2 \tag{4.1-18}$$

再由图4.8a可知，此时力系的主矩为

$$\vec{M}_C=\vec{M}_1=(\vec{M}_O\cdot\vec{F}_R)\vec{F}_R/F_R^2 \tag{4.1-19}$$

(5) $\vec{F}_R\neq0$ 与 $\vec{M}_O\neq0$，且不变量 $\vec{M}_O\cdot\vec{F}_R=0$，则该力系还可简化为一个合力。

事实上，可视这种情况为(4)的特殊情况，由式(4.1-19)知，主矩 $\vec{M}_C=\vec{0}$。即说明对于这种情况，力系最终可简化为一合力(见图4-8b)。

综上所述，力系简化后的最简的情况有4种，即或平衡、或为一个合力、或为一个合力偶、或为一个力螺旋。

3. 平行力系的简化

考虑图4-9所示一平行力系$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)$。令这些力的单位矢量为 $\vec{b}$，故有

$$\vec{F}_i=F_i\vec{b} \tag{4.1-20}$$

式中，F_i 为力$\vec{F}_i$ 的模。由式(4.1-10)，该平行力系的合力为

$$\vec{F}_R=\left(\sum_{i=1}^{n}F_i\right)\vec{b} \tag{4.1-21}$$

可见合力的方向与力系方向一致，合力的模为

$$F_R=\sum_{i=1}^{n}F_i \tag{4.1-22}$$

将该平行力系向点 O 简化，考虑到式(4.1-20)，由式(4.1-11)，力系的主矩为

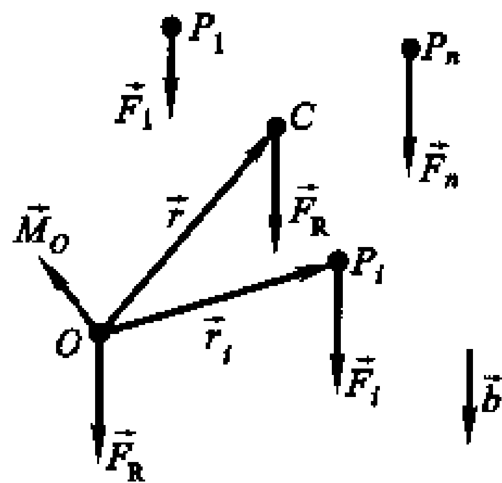


图4-9 平行力系的简化

$$\vec{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\left(\sum_{i=1}^{n}F_i\vec{r}_i\right)\times\vec{b} \tag{4.1-23}$$

由式(4.1-21)与(4.1-23)，有 $\vec{M}_O \cdot \vec{F}_R = 0$，故平行力系最终可简化为一合力。该合力的简化中心 C 称为**平行力系的中心**。由式(4.1-18)可得到该中心的位置，即相对于点 O 的矢径 $\vec{r}$。通过下面的推导可得到更简洁的关系。由式(4.1-15)，考虑到 $\vec{M}_O \cdot \vec{F}_R = 0$，有

$$\vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{M}_2 = \vec{M}_O \tag{4.1-24}$$

将式(4.1-21)与(4.1-23)代入上式，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\vec{r} \times \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i\right) \times \vec{b}$$

考虑到式(4.1-22)，得到平行力系中心的矢径与力系作用点矢径间的关系，即

$$F_R \vec{r} = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i \tag{4.1-25}$$

该矢量式的坐标式为

$$F_R \boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i \tag{4.1-25$'$}$$

或展开，得到中心的三个坐标为

$$F_R x = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i, \quad F_R y = \sum_{i=1}^{n} F_i y_i, \quad F_R z = \sum_{i=1}^{n} F_i z_i \tag{4.1-25$''$}$$

如果将地球的半径视为无穷大，重力是典型的平行力系，它的中心称为**重心（质心）**。令 n 个质点的质量为 m_i，重力加速度矢量 $\vec{g}$ 的坐标阵为 $\boldsymbol{g}$。有 $\boldsymbol{F}_i = m_i \boldsymbol{g}$。由(4.1-25$'$)可得到重心矢径的坐标阵为

$$m\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \tag{4.1-26}$$

其中，$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ 为质点系的总质量。

4. 平面力系的简化

考虑一平面力系$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$。力系中力 $\vec{F}_i$ 在参考平面上（见图4-10），它的坐标阵为 $\boldsymbol{F}_i = (F_{ix} \quad F_{iy})^T (i = 1, \cdots, n)$。对于平面上的一点 O，如果将力 $\vec{F}_i$ 平移到该点，在该点有一个力 $\vec{F}'_i$ 与附加一个力偶 $\vec{M}_i$。力 $\vec{F}'_i$ 在该平面内，附加一个力偶 $\vec{M}_i = M_i \vec{z}$，即它为垂直于该平面的矢量，力偶矩的大小 M_i 为力 $\vec{F}_i$ 对于轴 Oz 的矩，由式(4.1-6)，有

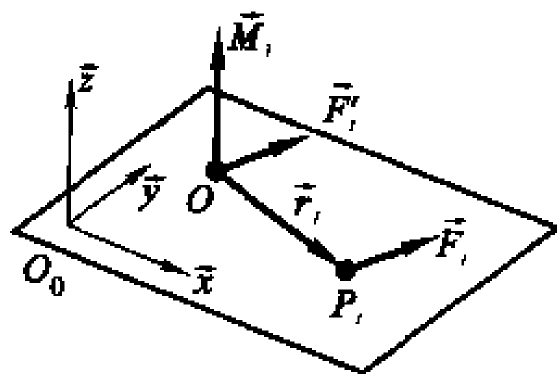


图4-10 平面力系的简化

$$M_i = (\tilde{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{r}_i)^T \boldsymbol{F}_i = x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \tag{4.1-27}$$

这样 n 个力$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n)$在点 O 构成一个平面汇交力系$(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \cdots, \vec{F}'_n)$

与一个力偶矩方向均沿该平面法线的力偶系($\vec{M}_1,\vec{M}_2,\cdots,\vec{M}_n$)。故它们的主矢 $\vec{F}_R$ 在该平面内,主矩 $\vec{M}_O=M_O\vec{z}$ 为垂直于该平面的矢量,其大小 M_O 为所有力对轴 Oz 的矩之代数和,即

$$M_O=\sum_{i=1}^{n}M_i \tag{4.1-28}$$

4.1.5　约束与约束力

在3.3节中介绍了常见运动副,运动副约束方程描述了刚体与刚体、刚体与公共基之间相互牵制的运动学关系。本节将介绍这些运动副邻接物体相互间力的作用,这种力称为**约束力**。根据4.1.1中力的性质(3),约束力以大小相等方向相反的两个力作用在两个物体上。下面举几个例子。

图4-11a为一转动铰的截面。该铰允许两刚体在截面内相对转动,限制刚体在截面内相对移动。铰轴与轴承间接触面上的平面力系均通过铰的中心,因此这些力可简化为一通过铰中心的一约束力的主矢记为 $\vec{F}^n$(见图4-11a)。需要注意的是上述约束力与轴承的周围环境有关。如果轴承与地面固结,约束力的方向如图4-11a,该力可分解为与地面垂直和地面平行的两个分力(见图4-11b)。如果该旋转铰的轴承与地面之间有滚轴存在(见图4-11c),允许轴承沿地面自由移动。那么轴承间的约束力只限制轴承与轴相互在垂直方向的运动。对于此种情况,约束力的作用线与地面垂直。图4-11d与图4-11e分别为图4-11b与图4-11c的简图。

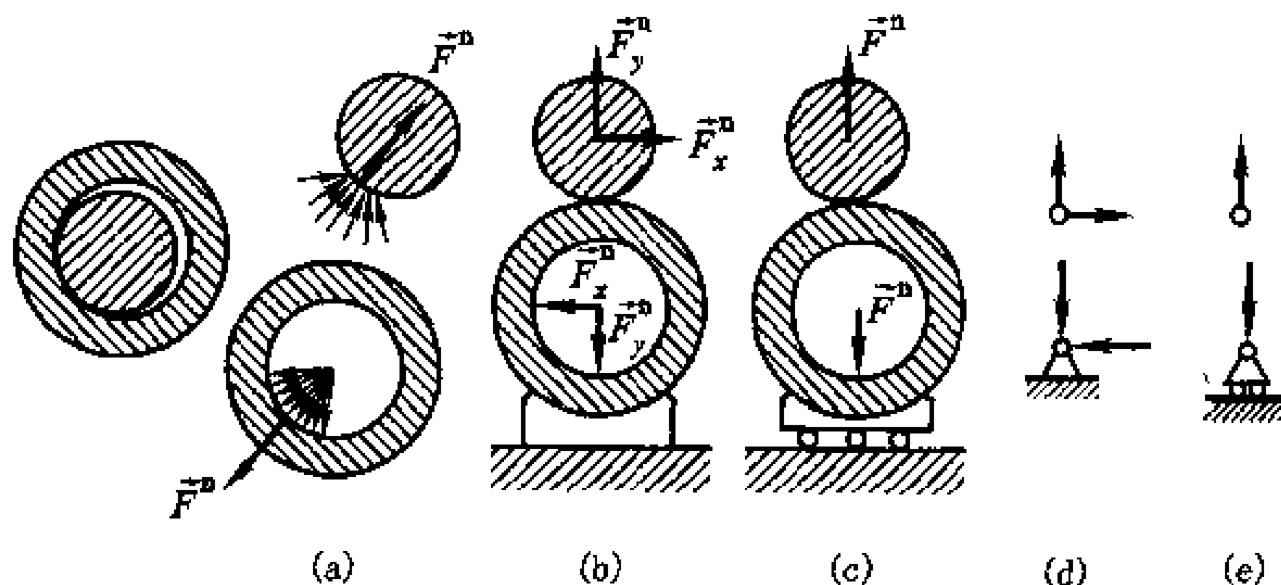


图4-11　转动铰约束力

图4-12为一滑移铰的截面,该铰允许两刚体在水平方向相对移动,限制其垂直方向的移动与刚体间相对转动。两刚体间的平行约束力系向铰的某点简化为一垂直移动轴的主矢 $\vec{F}^n$ 与垂直于运动平面的主矩 M^n。

连杆以两个转动铰与邻接的两个刚体连接,限制两刚体沿连杆轴线相对移

动。考虑到连杆为不计重量的刚性的二力杆，即只能承受沿杆轴向的力，故两刚体上的约束力的主矢 $\vec{F}^{n}$ 均沿连杆轴线（见图 4－13）。

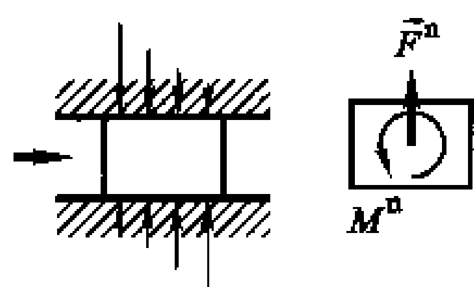


图 4－12　滑移铰约束力

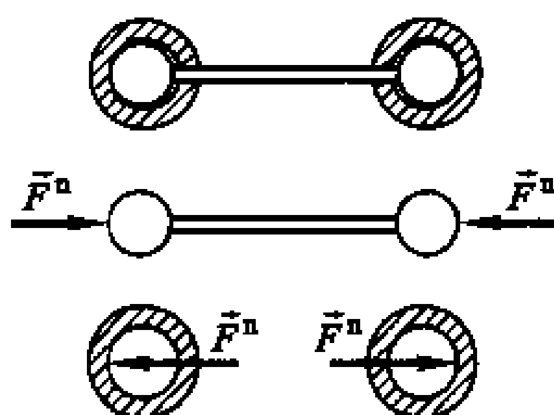


图 4－13　连杆约束力

图 4－14 所示的是系绳的约束。它是一种单侧约束。由于系绳只能受拉，故系绳对物体的约束力只能沿系绳方向，指向悬挂点。

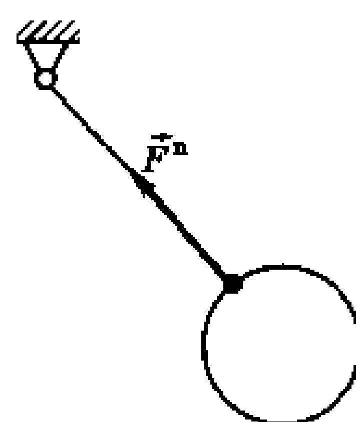


图 4－14　系绳约束力

下面考虑凸轮－从动副、齿轮副与齿轮－齿条副。由它们的工况可知，凸轮－从动副为两刚体表面曲线相切。齿轮副与齿轮－齿条副均为两齿轮的啮合齿的表面曲线相切(不是与节圆相切，见图 4－15a)。两刚体在表面曲线接触点的法线方向无相对运动是这些约束的共性。约束力将作用在该接触点，沿该点在接触表面曲线的法线方向。图 4－15b 与图 4－15c 分别给出了齿轮副与齿轮－齿条副接触点的约束力的简图。

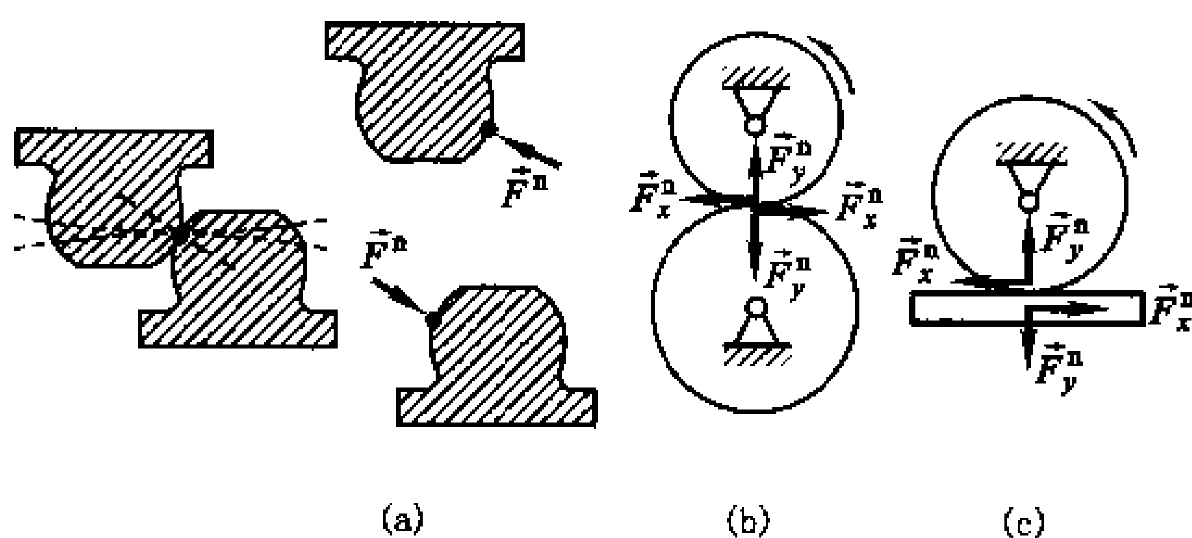


图 4－15　齿轮副的啮合

通过对几种常见的运动副的约束力的分析可知，这些约束力与约束邻接两刚体的相对运动有关，约束力是实现限制两刚体相对运动的力。实际上这种力有两类，一种是限制了两刚体的相对运动自由度，另一类力只是影响两刚体的相对运动，不改变相对运动自由度。如在垂直轴的截面内考察旋转铰（见图 4－11），上述分析的约束力是限制了两轴与轴套间径向运动自由度。如果考虑到轴

与轴承间的摩擦,两刚体的接触点的切向也存在相互作用力,但它不影响它们相对运动自由度。又如对于滑移铰,在图4-12所示的平面内,上述分析的约束力限制了两刚体的相对运动的两个自由度,即不能上下相对运动与相对旋转。如果考虑两刚体间的相对滑动摩擦,则摩擦力也是两刚体相互的作用力,但不改变两刚体相对运动自由度。为了将上述的两类不同性质的约束力加以区分,将限制两刚体相对运动自由度的约束力称为**理想约**束力,另一类称为**非理想约**束力。只考虑理想约束力的约束称为**理想约束**。

对于一个自由运动的刚体可能受到的力有两种。一种是组成该刚体各质点相互之间的作用力,称为刚体的**内力**。另一种为刚体将受到刚体以外物体对其的作用力,这些力称为**外力**。最常见的外力是重力。如果一个刚体受到约束,将该约束作理想约束处理,此时刚体上将受到理想约束力与作为一般外力处理的非理想的约束力两部分。对刚体而言,理想约束力是一种特殊的外力,通常是未知的。为了加以区分,将理想约束力外的所有外力称为**主动力**。注意主动力包括非理想约束力部分。

对于刚体系,系统中刚体间相互的作用力也为内力,包括这些刚体间的理想与非理想约束力。

有关理想约束与理想约束力的严格定义在以后还将介绍。

4.1.6 力系的平衡

如果刚体处在静止或作匀速直线运动,称刚体处于平衡状态。当刚体上作用有一个力系,其最终效应使刚体处于平衡状态,称该**力系平衡**。根据牛顿第一定律,不难推理得到,力系平衡的充分与必要条件为力系的主矢与力系对某点的主矩均为零。

据此,由式(4.1-10)与(4.1-11),平衡力系应满足如下条件:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} \quad (4.1-29)$$

它们在某基下的矩阵式为

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_O(\vec{F}_i) = \boldsymbol{0} \quad (4.1-30)$$

或展开,得

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \quad (4.1-30'a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ox}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_i) = 0 \quad (4.1-30'b)$$

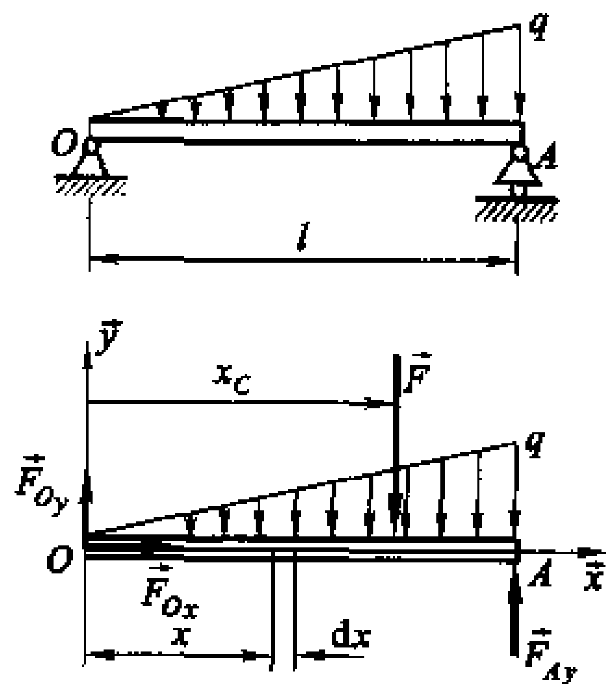
这6个方程称为力系平衡方程。

对于在 xy 平面上的平面力系，考虑到式(4.1－28)，上述平衡方程数缩减为3，即

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_i)=0 \qquad (4.1-31)$$

对于一个处于平衡的刚体，作用其上的力系如果部分已知，部分未知，那么由力系的平衡方程可解得这些未知量。这类问题称为静力学问题。由于空间力系与平面力系的平衡方程分别为6与3，故可解得的未知量只能为6个或3个。超过此数的静力学问题称为**静不定问题**。需增加其他附加条件才能解决，如变形条件等，这已超出理论力学的范畴。

[例 4.1－1] 图示一简支梁上有一分布载荷，其单位长度上受力的大小称为**载荷集度**。其左端的集度为零，右端集度为 q。载荷的长度为 l，载荷的方向垂直向下。求支承处对梁的约束力。



例 4.1－1 图

解： 首先求载荷的合力与其作用线的位置。此题的分布载荷可认为一平行力系。如图所示在梁上建立一坐标系。根据已知条件，在坐标 x 处的载荷集度为 qx/l。在此处取的一微元 dx，在梁的坐标 x 处受的力近似为 $F(x)=qx\,dx/l$。梁由 $x=0$ 到 $x=l$ 的分布载荷合力为

$$F=\int_0^l \frac{qx}{l}dx=\frac{ql}{2}$$

令该力系的中心的位置坐标记为 x_C，考虑到上式，由式(4.1－25″)的第一式(将求和换成积分)，可得

$$x_C=\frac{1}{F}\int_0^l \frac{qx^2}{l}dx=\frac{ql^2}{3}\Big/\frac{ql}{2}=\frac{2}{3}l$$

根据对约束的分析，支承处 O 与 A 对梁的约束力如图所示。直接列平衡方程可求得3个未知量 $\vec{F}_{Ay}$，$\vec{F}_{Ox}$ 与 $\vec{F}_{Oy}$。考虑到对点 O 取矩，力矩方程中将不出现 $\vec{F}_{Ox}$ 与 $\vec{F}_{Oy}$，有

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_i)=0,\quad F_{Ay}l-Fx_C=F_{Ay}l-\frac{ql}{2}\,\frac{2}{3}l=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0,\quad F_{Ox}=0$$

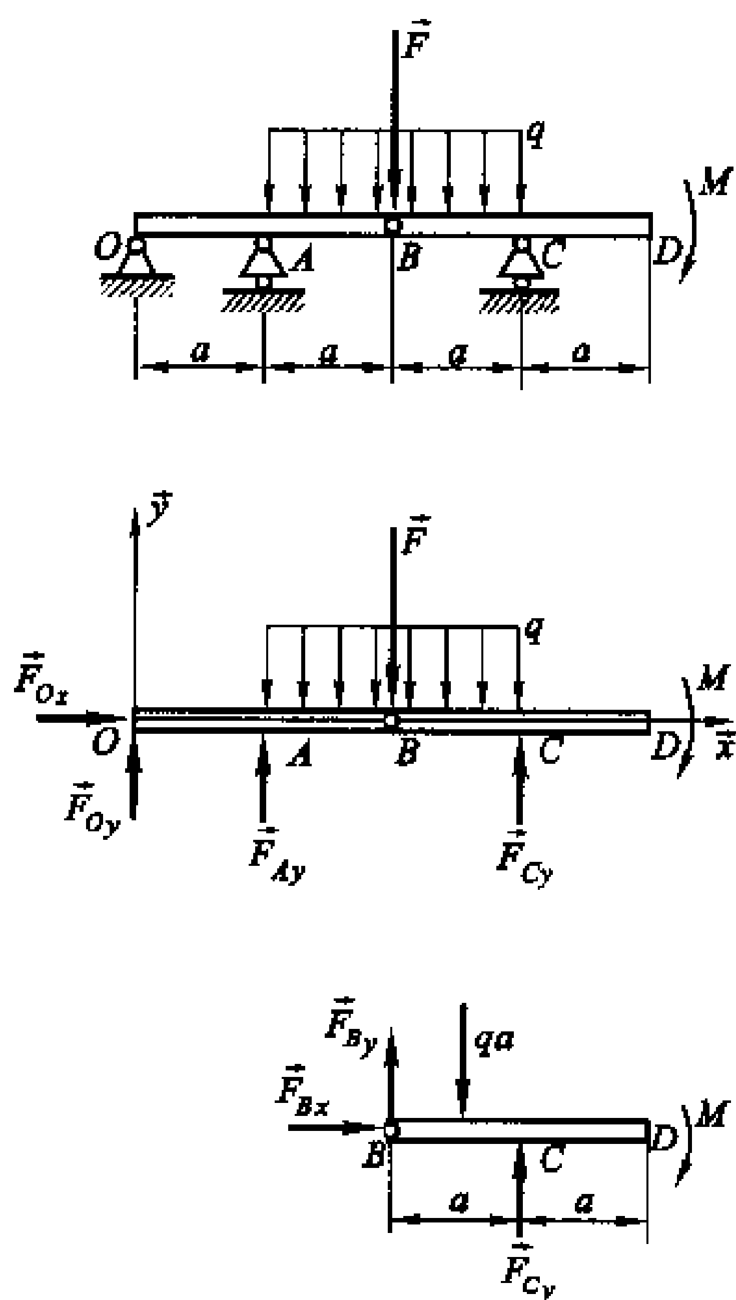
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0,\quad F_{Oy}+F_{Ay}-F=F_{Oy}+F_{Ay}-\frac{ql}{2}=0$$

由第一与第三个平衡方程得 $F_{Ay}=ql/3$。$F_{Oy}=ql/6$。

[例 4.1-2] 图示两梁由铰 B 连接,它们放在 O,A 与 C 三个支承上。梁上有一集度为 q 的均布载荷,一集中力 $\vec{F}$ 与力偶 M,位置如图所示。求支承处的约束力。

解: 由于所有的载荷与梁均在一个平面内,这是一个平面问题,过点 O 建立如图所示的坐标系。

下面分析约束力的情况。对于固定支承 O,根据图 4-11b 的分析,轴承的约束力沿轴承的径向,现将它分解为如图的两个分量 $\vec{F}_{Ox}$ 与 $\vec{F}_{Oy}$。支承 A 与 C 为滑动支承,根据图 4-11c 的分析,它们限制的只是支座 A 与 C 处垂直方向的自由度,故只有垂直方向的约束力,即如图所示的 $\vec{F}_{Ay}$ 与 $\vec{F}_{Cy}$。这些约束力中未知的是它们的大小,共有 4 个未知量。



例 4.1-2 图

直接由整体列平衡方程不可能求得 4 个未知量。如果解除约束 B,对于

BD 段，除了 $\vec{F}_{Cy}$ 外，类似图 4-11b 的分析，铰 B 处有 2 个约束力 $\vec{F}_{Bx}$ 与 $\vec{F}_{By}$，但总共只有 3 个未知量，故可求解。由于只要求 $\vec{F}_{Cy}$，对点 B 取矩，力矩方程中将不出现 $\vec{F}_{Bx}$ 与 $\vec{F}_{By}$，即有

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Bz}(\vec{F}_i) = 0, \quad F_{Cy}a - M - qa \cdot \frac{a}{2} = 0$$

得到

$$F_{Cy} = \frac{M}{a} + \frac{qa}{2} \tag{1}$$

再以整体为对象，只剩 3 个未知量，可求解。

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad F_{Ox} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_i) = 0,$$

$$F_{Cy} \cdot 3a + F_{Ay} \cdot a - F \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot 2a - M = 0$$

将式(1)代入，得

$$F_{Ay} = 2F + \frac{5}{2}qa - \frac{2M}{a} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad F_{Oy} + F_{Cy} + F_{Ay} - F - q \cdot 2a = 0$$

将式(1)与(2)代入，得

$$F_{Oy} = -F - qa + \frac{M}{a}$$

4.1.7 摩擦与摩擦力

通常两个相互接触物体的接触面并非绝对光滑，当它们有相对运动趋势或在相对运动的过程中，接触面间的理想约束力沿两面的公法线，在接触面的公切面上存在阻碍两物体相对运动的力，这种力称为**摩擦力**。摩擦力的物理本质很复杂。它与两物体的材料、表面的情况与相对运动性态有关，发生在两物体相对滑动时的摩擦力称为**滑动摩擦力**，发生在两物体相对滚动时的摩擦力称为**滚动摩擦力**。

1. **滑动摩擦力**

两物体接触面的凹凸不平是引起滑动摩擦的主要原因。滑动摩擦力的性质、大小与方向的描述比较复杂。

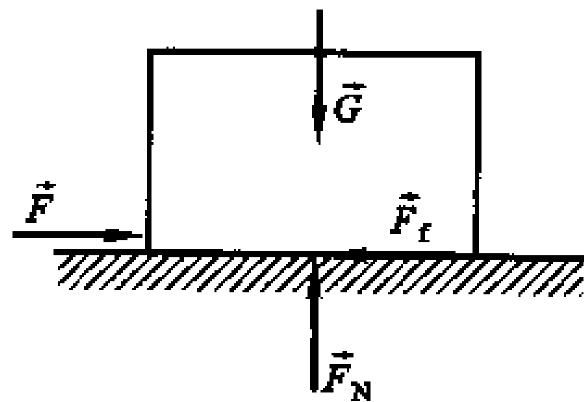


图 4-16 滑动摩擦力

考虑一重为 G 的物体放在一水平面上，作用于该物体的理想约束力为与重力 $\vec{G}$ 大小

相等方向相反的力$\vec{F}_N$(见图4－16)。当有一水平的力$\vec{F}$作用于物体,物体有运动的趋势。如果该力比较小,物体并不运动。根据牛顿定律,作用于物体上的摩擦力$\vec{F}_f$与$\vec{F}$大小相等方向相反。当力F增加时,F_f也等值增加。当力F达到一定的数值时,物体开始滑动。这个现象说明,此时摩擦力F_f不随力F增加,摩擦力有一个极限值,记为F_m。物体在滑动过程中,摩擦力的大小是未知的。由牛顿定律知,它与力F和物体的惯量及物体运动的加速度相关。

由此可见滑动摩擦力可能有三种情况。作用于静止物体上的摩擦力,称为**静滑动摩擦力**,简称**静摩擦力**;作用于将滑动而未滑动临界状态物体上的摩擦力F_m,称为**极限静摩擦力**,简称**极限摩擦力**;作用于正在滑动物体上的摩擦力,称为**动滑动摩擦力**,简称**动摩擦力**。维持物体平衡的实际的静摩擦力只能在零与F_m之间,即

$$F_m \geqslant F_f > 0 \tag{4.1-32}$$

库仑通过大量实验总结得到如下库仑定律:在其他条件相等的情况下,极限摩擦力的大小F_m与接触物体间的正压力F_N成正比。即

$$F_m = f_s F_N \tag{4.1-33}$$

其中比例常数f_s称为**静摩擦因数**。它取决于接触物体的材料,接触面的物理状态,如光滑程度、温度与湿度等。应该指出上式为一近似公式,公式中的因数可由实验测定。

对于运动物体,作用其上的动摩擦力,通过实验得到类似的近似公式,即

$$F_f = fF_N \tag{4.1-34}$$

其中比例常数f称为**动摩擦因数**。实验证明其略小于f_s。它不仅取决于接触物体的材料与接触面的物理状态,而且与物体相对运动速度有关,通常在工程中不予考虑。

应该指出,上述分析的摩擦力只是工程中滑动摩擦力的一种,称为**干摩擦力**,或**库仑摩擦力**。工程中另一种滑动摩擦力是发生在有润滑的滑动摩擦现象中。由于润滑剂的作用,通常它们的极限摩擦力很小,动摩擦力与物体相对运动速度成正比,方向与相对运动速度相反,即

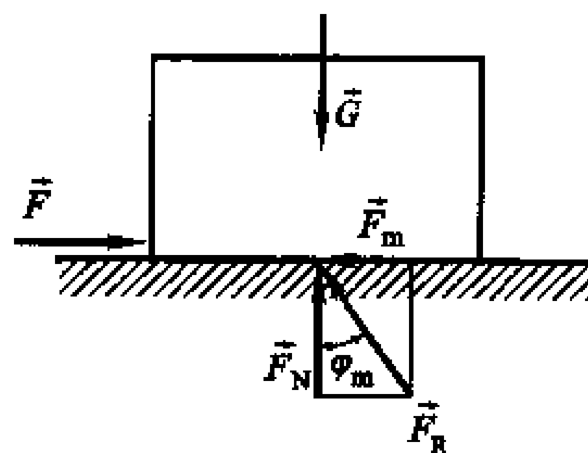


图4－17 摩擦角

$$\vec{F} = -c\vec{v} \tag{4.1-35}$$

这种摩擦力称为**粘性摩擦力**,其中比例常数c称为**粘性摩擦系数**。

对于干摩擦,考虑摩擦力$\vec{F}_f$与正反力$\vec{F}_N$的合力$\vec{F}_R$。当摩擦力达到极限静摩擦力时(见图4－17),合力$\vec{F}_R$的极限位置与接触面法线的夹角称为**摩擦**

角，记为 φ_m，有

$$\tan\varphi_m = \frac{F_m}{F_N} = f_s \qquad (4.1-36)$$

可见摩擦角的正切等于静摩擦因数。

2. 滚动摩擦

如图 4-18 所示，重为 G 的一圆柱，在力 $\vec{F}$ 的作用下，圆柱的运动将受到因圆柱与水平面间局部变形引起的一种阻碍圆柱相对运动的力（见图 4-18a）。将这些阻力向点 A 进行简化，可得到一主矢 $\vec{F}_R$ 与主矩 $\vec{M}_f$。前者又可分解为垂直于平面法线的力 $\vec{F}_N$ 与切向的力 $\vec{F}_f$（见图 4-18b）。显然 $\vec{F}_N$ 为理想约束力，力 $\vec{F}_f$ 具有滑动摩擦力的性质。主矩 $\vec{M}_f$ 为滚动摩擦所特有，称该力偶矩为**滚动阻力偶矩**。

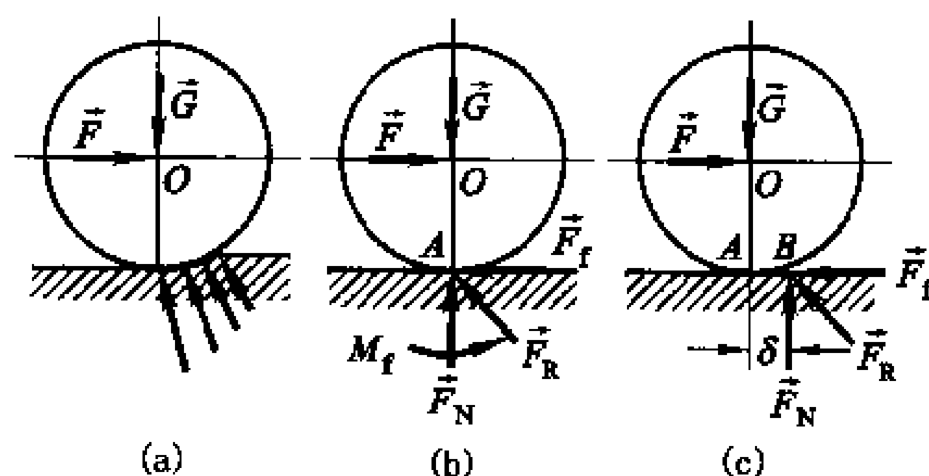


图 4-18 滚动摩擦

当主动力 $\vec{F}$ 由零开始逐步增加时，如果圆柱处于平衡状态，则有

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad F_f = F$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad F_N = G$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_i) = 0, \quad M_f = Fr$$

当 F 增大时，摩擦力 F_f 与滚动阻力偶矩 M_f 均相应增加。当摩擦力 F_f 达到极限值 F_m 时，圆柱开始滑动。当 F 增加，滚动阻力偶矩 M_f 达到极限值 M_m 时，如果 F 再增加，圆柱开始滚动。很多情况是滑动摩擦因数较大，圆柱在滚动前不会发生滑动，即在 M_f 达到极限值 M_m 时，F_f 还没有达到极限值 F_m。这样的滚动称为**纯滚动**。

通过实验测试，滚动阻力偶矩的极限值 M_m 与约束力 F_N 成正比，即有

$$M_m = \delta F_N$$

其中 δ 称为**滚阻系数**。它与滑动摩擦因数 f, f_s 一样，与接触物体的性质有关。

与滑动摩擦因数不同的是滚阻系数具有长度的量纲，而滑动摩擦因数是量纲1的量。如果在圆柱将要滚动的状态，摩擦力向图4－18c所示的点B简化，使得

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_i)=0,\quad \delta F_N = Fr$$

由此可见滚阻系数的物理意义是摩擦力简化为纯主矢时的简化中心B到点A的距离。

[例4.1－3] 在搬运重物时常在下面垫些滚木，如图所示。重物重G_0，滚木重G，半径为r。滚木与重物和地面的滚阻系数分别为δ_0和δ，求将要拉动重物时的拉力F。

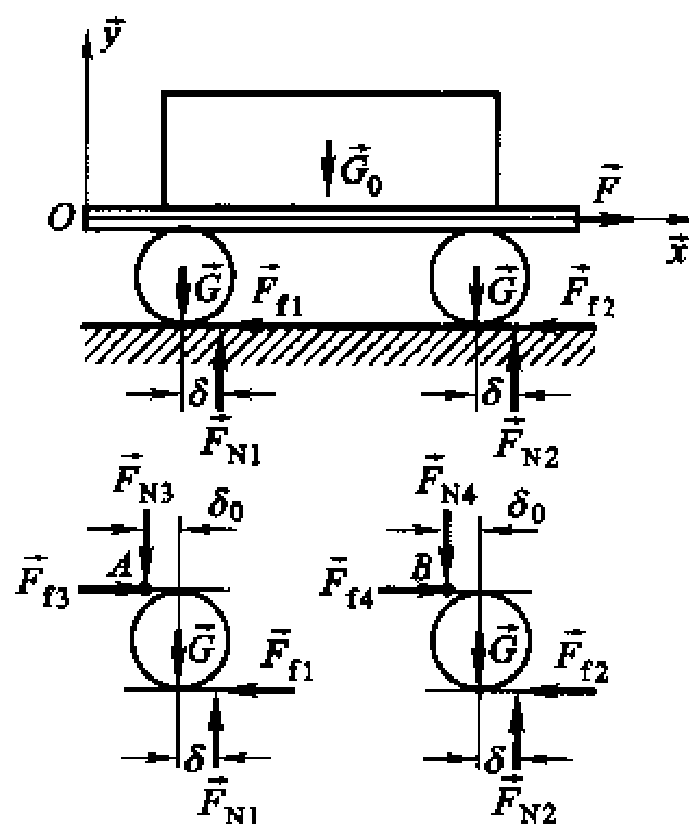
解：以整个系统为对象，受力情况如图。有平衡方程

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0,\quad F=F_{f_1}+F_{f_2} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0,$$

$$F_{N_1}+F_{N_2}=G_0+2G \tag{2}$$

有5个未知量，再加1个力矩方程也无法解。需增加方程。



例4.1－3图

以左滚木为对象。将滚动摩擦力按纯主矢的方式简化，受力情况如图所示。对点A取矩，

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Az}(\vec{F}_i)=0,\quad F_{N1}(\delta_0+\delta)-2F_{f1}r-G\delta_0=0$$

以右滚木为对象。受力情况如图所示。对点B取矩，

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Bz}(\vec{F}_i)=0,\quad F_{N2}(\delta_0+\delta)-2F_{f2}r-G\delta_0=0$$

将以上两式相加，有

$$(F_{N1}+F_{N2})(\delta_0+\delta)-2(F_{f1}+F_{f2})r-2G\delta_0=0$$

将(1)与(2)代入，可解得

$$F=\frac{G_0(\delta_0+\delta)+2G\delta}{2r}$$

设$G_0=10$ kN，G忽略不计，$\delta_0=0.05$ cm，$\delta=0.20$ cm，$r=8$ cm。将这些

数据代入上式，得 $F=0.156$ kN，可见省力的量级。如果 δ_0 与 δ 均为零，即不考虑滚动摩擦，$F=0$，相对于重物放在一个光滑平面上的情况。

4.2 惯量

一质点惯性的度量为该质点的**质量**。考虑有 n 个质点构成的质点系，令质点系内任意点 P_i 的质量为 m_i。对于该质点系，度量其惯性的物理量之一为质点系的总质量，即

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{4.2-1}$$

质量在国际单位制中单位为 kg。

对于刚体，如果将上式的求和号对刚体的所有质点进行，得到刚体的质量。它是刚体平移惯性的度量。

现考察质量相同的两个圆环，用同样的力偶绕圆环的轴线驱动它们，发现直径大的圆环启动比较困难，表现出较大的惯性。说明刚体在作转动时，系统的惯量将与质点系的质量的分布有关。为此需引入描述质点系惯量的另一个物理量即转动惯量。

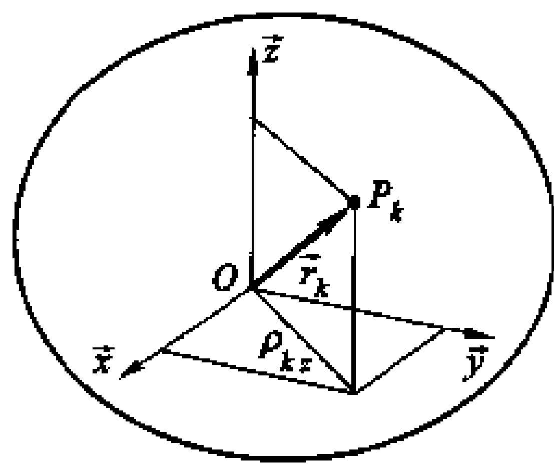


图 4-19 转动惯量与回转半径

在刚体上过点 O 建立一连体基 $\vec{e}$，质点 P_k 关于点 O 的矢径为 $\vec{r}_k$，其在连体基的坐标阵为 $\boldsymbol{r}_k=(x_k \quad y_k \quad z_k)^{\mathrm{T}}$（见图 4-19），定义

$$J_{Ox} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k m_k(y_k^2 + z_k^2) = \sum_k m_k\rho_{kx}^2 \tag{4.2-2a}$$

$$J_{Oy} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k m_k(z_k^2 + x_k^2) = \sum_k m_k\rho_{ky}^2 \tag{4.2-2b}$$

$$J_{Oz} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k m_k(x_k^2 + y_k^2) = \sum_k m_k\rho_{kz}^2 \tag{4.2-2c}$$

式中：ρ_{kx}，ρ_{ky} 与 ρ_{kz} 分别为质点 P_k 到 Ox，Oy 与 Oz 轴的距离；称 J_{Ox}，J_{Oy} 与 J_{Oz} 分别为刚体关于 Ox，Oy 与 Oz 轴的**转动惯量**，单位为 kg·m²，转动惯量的另一种表达方法为

$$J_{Ox} \stackrel{\text{def}}{=} m\rho_x^2,\ J_{Oy} \stackrel{\text{def}}{=} m\rho_y^2,\ J_{Oz} \stackrel{\text{def}}{=} m\rho_z^2 \tag{4.2-3}$$

式中：m 为刚体的质量；ρ_x，ρ_y 与 ρ_z 分别称为刚体对 Ox，Oy 与 Oz 轴的**回转半径**。一些常见外形的均质刚体的转动惯量与回转半径见附录 A。

描述刚体转动惯量的另一个量为刚体的**惯性积**。对于刚体上定点 O 的连

体基，定义如下与转动惯量有相同量纲的量：

$$J_{Oxy} = J_{Oyx} \overset{\text{def}}{=} \sum_k m_k x_k y_k \tag{4.2-4a}$$

$$J_{Oyz} = J_{Ozy} \overset{\text{def}}{=} \sum_k m_k y_k z_k \tag{4.2-4b}$$

$$J_{Oza} = J_{Oxz} \overset{\text{def}}{=} \sum_k m_k z_k x_k \tag{4.2-4c}$$

称 J_{Oxy} 与 J_{Oyx} 为刚体关于 Oxy 平面的惯性积；称 J_{Oyz} 与 J_{Ozy} 为刚体关于 Oyz 平面的惯性积；J_{Ozx} 与 J_{Oxz} 为刚体关于 Oxz 平面的惯性积，通称为刚体关于点 O 的惯性积。

如果惯性积 J_{Oxz} 与 J_{Oyz} 为零，则称 Oz 轴为刚体的**惯量主轴**。同样如果 J_{Oxy} 与 J_{Oxz} 为零或 J_{Oxy} 与 J_{Oyz} 为零称 Ox 轴或 Oy 轴为刚体的惯量主轴。不难验证，对于有对称轴的刚体，则该对称轴为刚体的主轴；对于有对称面的刚体，垂直于该平面的任意轴为该刚体的主轴。可以证明对于刚体的定点 O 至少存在一连体基，该基的三根轴同时为刚体的主轴，该基称为刚体的**惯量主轴连体基**。关于主轴连体基三轴的转动惯量称为刚体的主转动惯量。过刚体质心的主轴连体基称为**中心惯量主轴连体基**，关于该基三轴的转动惯量称为刚体的**中心主转动惯量**。

由上述定义可知刚体的转动惯量(或回转半径)与惯性积和连体基及其基点的定义有关。

下面考虑当基点改变，连体基的方向不变时刚体的转动惯量间的关系。

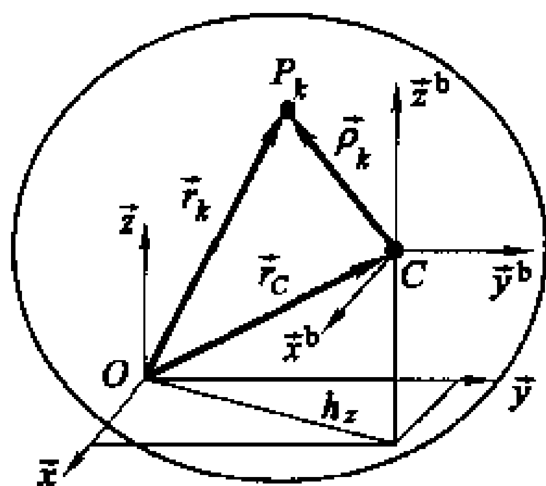


图 4-20　不同基点转动惯量的关系

在刚体的质心 C 上建立另一个与 $\vec{e}$ 平行的连体基 $\vec{e}^b$。质心 C 关于 O 的矢径为 $\vec{r}_C$。质点 P_k 关于点 O 与 C 的矢径分别为 $\vec{r}_k$ 与 $\vec{\rho}_k$。由图 4-20 可见，这些矢量有如下矢量关系：

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k \tag{4.2-5}$$

由于两基平行，该矢量式在基 $\vec{e}$ 上的坐标表达式为

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\rho}'_k \tag{4.2-5'}$$

其中 $\boldsymbol{r}_C = (x_C \quad y_C \quad z_C)^{\mathrm{T}}$ 为质心 C 在基 $\vec{e}$ 上的坐标式，$\boldsymbol{\rho}'_k = (x'_k \quad y'_k \quad z'_k)^{\mathrm{T}}$ 为 P_k 的矢径 $\vec{\rho}_k$ 在基 $\vec{e}^b$ 上的坐标式。将式(4.2-5′)代入式(4.2-2c)，有

$$\begin{aligned} J_{Oz} &= \sum_k m_k [(x_C + x'_k)^2 + (y_C + y'_k)^2] \\ &= \sum_k m_k (x'^2_k + y'^2_k) + (x_C^2 + y_C^2) \sum_k m_k + 2x_C \sum_k m_k y'_k + 2y_C \sum_k m_k x'_k \end{aligned} \tag{4.2-6}$$

考虑到质心的矢径与质点矢径间的关系(4.1-26)，有

$$\sum_k m_k x'_k = 0,\ \sum_k m_k y'_k = 0,\ \sum_k m_k z'_k = 0 \qquad (4.2-7)$$

故式(4.2-6)右边的后两项为零。根据定义右边第一项为刚体相对于 Cz 轴的转动惯量 J_{Cz}，即

$$J_{Cz} = \sum_k m_k (x'^2_k + y'^2_k) \qquad (4.2-8)$$

右边第二项中的 $\sqrt{x_C^2 + y_C^2}$ 为 Oz 轴与 Cz' 轴的垂直距离，记为 h_z。这样式(4.2-6)变为

$$J_{Oz} = J_{Cz} + mh_z^2 \qquad (4.2-9)$$

同理可得

$$J_{Ox} = J_{Cx} + mh_x^2,\ J_{Oy} = J_{Cy} + mh_y^2 \qquad (4.2-10)$$

式(4.2-9)与(4.2-10)描述的是**刚体转动惯量的平行轴定理**，即刚体对任意轴的转动惯量等于它对过质心的平行轴转动惯量加上刚体的质量与两轴垂直距离平方的乘积。

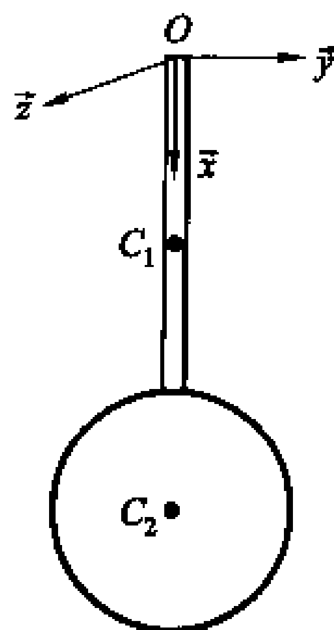
利用同样的方法可得到刚体关于点 O 的惯性积与关于质心 C 惯性积之间的关系式

$$J_{Oxy} = J_{Cxy} + mx_C y_C \qquad (4.2-11a)$$

$$J_{Oyz} = J_{Cyz} + my_C z_C \qquad (4.2-11b)$$

$$J_{Ozx} = J_{Czx} + mz_C x_C \qquad (4.2-11c)$$

[**例 4.2-1**]　图示一摆由长为 l 均质杆与一半径为 r 的均质圆球刚性连接而成。质量分别为 m_1 与 m_2。计算该摆对通过点 O 且垂直杆的 z 轴的转动惯量。



例 4.2-1 图

解：令过点 O 杆绕 z 轴的转动惯量为 J_{1z}，过质心 C_2 球绕平行 z 轴的转动惯量为 J_{C_2z}。由附录 A 知，

$$J_{1z} = \frac{1}{3} m_1 l^2,\ J_{C_2z} = \frac{2}{5} m_2 r^2 \qquad (1)$$

令过点 O 球绕 z 轴的转动惯量为 J_{2z}，由转动惯量的平行轴定理公式(4.2-9)，考虑到式(1)，有

$$J_{2z} = J_{C_2z} + m_2(l+r)^2 = \frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2(l+r)^2 \qquad (2)$$

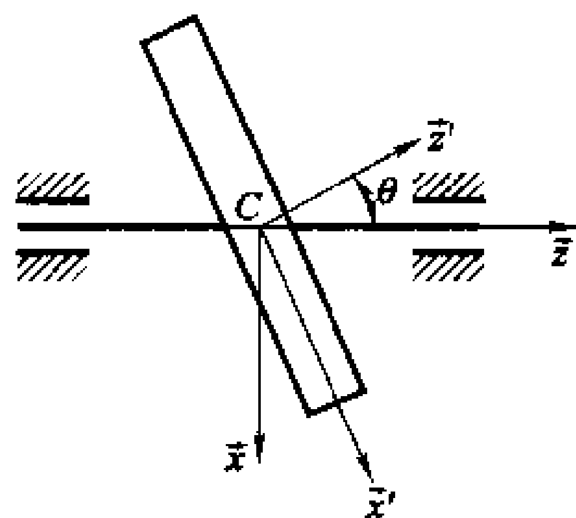
令整个摆过点 O 绕 z 轴的转动惯量为 J_z，由定义(4.2-2c)，考虑到式(1)与(2)有

$$J_z = J_{1z} + J_{2z} = \frac{1}{3}m_1 l^2 + \frac{2}{5}m_2 r^2 + m_2(1+r)^2$$

［例4.2－2］　考虑一均质圆盘的转子，质心为 C。转子的转轴 Cz 与圆盘中心轴 Cz' 有如图所示一小偏角 θ。试计算惯性积 J_{xz}

解： 如图所示过 C 建立两个连体基 $\vec{e}'$ 与 $\vec{e}$。基 $\vec{e}'$ 关于基 $\vec{e}$ 的方向余弦阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



例4.2－2图

对于圆盘上的任意点 P_k 在两个基上的坐标阵间的关系为

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}'_k$$

令 $\boldsymbol{r}_k = (x_k \quad y_k \quad z_k)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{r}'_k = (x'_k \quad y'_k \quad z'_k)^{\mathrm{T}}$，即有

$$x_k = x'_k\cos\theta - z'_k\sin\theta,\quad z_k = x'_k\sin\theta + z'_k\cos\theta$$

这样，根据定义式(4.2－4c)，考虑到上式、(4.2－2c)与(4.2－2a)，有

$$\begin{aligned} J_{xz} &= \sum_k m_k x_k z_k \\ &= \sum_k m_k(x'^2_k - z'^2_k)\sin\theta\cos\theta + \sum_k m_k x'_k z'_k(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= (J_{z'} - J_{x'})\sin\theta\cos\theta + J_{x'z'}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned}$$

考虑到 Cz' 为圆盘的中心主轴，有 $J_{x'z'}=0$。令圆盘的半径为 r，由附录A，有

$$J_{xz} = (J_{z'} - J_{x'})\sin\theta\cos\theta = \frac{mr^2}{4}\sin\theta\cos\theta$$

4.3　动量定理

4.3.1　动量

考虑有 n 个质点构成的质点系。以固定点 O 为基点建立惯性基 $\vec{e}$。设 $\vec{r}_k$ 为质点系内任意点 P_k 相对点 O 的矢径，m_k 为点 P_k 的质量。令 $\vec{r}$ 为该质点系的质心 C 相对点 O 的矢径(见图4－21)。由质心定义式(4.1－26)，有

$$m\vec{r} = \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{r}_k \tag{4.3－1}$$

式中 m 为系统的总质量式(4.2－1)。令矢径 $\vec{r}_k$ 在惯性基 $\vec{e}$ 上对时间的导数记为 $\dot{\vec{r}}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_k$，它是质点 P_k 的绝对速度，记为 $\vec{v}_k$。质点 P_k 的**动量** $\vec{p}_k$ 定义为

$$\vec{p}_k \overset{\text{def}}{=} m_k\dot{\vec{r}}_k = m_k\vec{v}_k \qquad (4.3-2)$$

质点系的动量 $\vec{p}$ 为所有质点动量的矢量和，考虑到式(4.3－1)，令 $\dot{\vec{r}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}$ 为质心 C 的速度，记为 $\vec{v}$，有

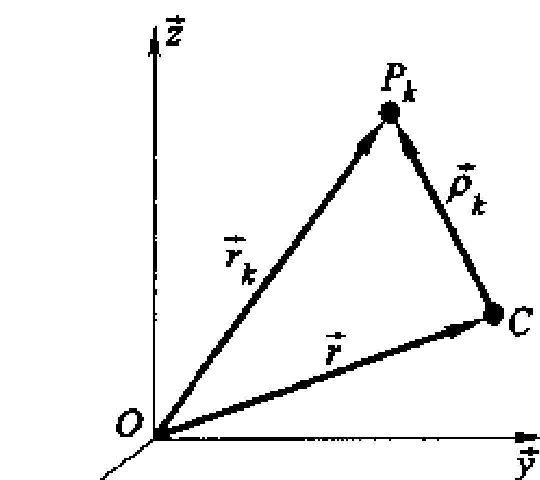


图 4－21 质点系点的位置矢量

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{n} m_k\dot{\vec{r}}_k = m\dot{\vec{r}} = m\vec{v} \qquad (4.3-3)$$

4.3.2 动量定理与质心运动定理

令质点系中质点 P_k 受到的力有外力 $\vec{F}_k$ 与其他质点 $P_i\,(i=1,\cdots,n;i\neq k)$ 对其作用的内力，记为 $\vec{F}_{ki}\,(i=1,\cdots,n;i\neq k)$。质点 P_k 运动所遵循的牛顿定律为

$$m_k\ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n}\vec{F}_{ki} \qquad (k=1,\cdots,n) \qquad (4.3-4)$$

将上面的 n 个方程相加，有

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\ddot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1,\neq k}^{n}\vec{F}_{ki}$$

由于质点间的作用力与反作用力大小相等方向相反，即 $\vec{F}_{ki}=-\vec{F}_{ik}$，故上式的右边的第二项为零。根据式(4.1－10)，右边第一项为作用于质点系所有外力的主矢 $\vec{F}_R$。如果在运动过程中质点的质量保持不变，式(4.3－4)左边的第一项为质点系的动量 $\vec{p}$ 对时间的导数。这样由式(4.3－4)得到

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_R \qquad (4.3-5)$$

此式描述的是质点系运动所遵循的**动量定理**：质点系的动量对时间的导数等于外力系的主矢。矢量方程(4.3－5)在惯性基上的坐标式为

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}_R \qquad (4.3-6)$$

展开上式有

$$\dot{p}_x = F_{Rx},\quad \dot{p}_y = F_{Ry},\quad \dot{p}_z = F_{Rz} \qquad (4.3-7)$$

对式(4.3－6)两边由 t_0 到 t 积分，得到积分形式的动量定理

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}_R\mathrm{d}t \qquad (4.3-8)$$

式中,$\boldsymbol{p}_0$ 为时刻 t_0 的动量。上式的右边定义为时间 t_0 到 t 间隔内外力系主矢的**冲量**。上式表示:质点系动量在时间间隔内的变化等于外力系的主矢在同一时间间隔内的冲量。展开式(4.3-8)有

$$\left.\begin{aligned} p_x - p_{x0} &= \int_{t_0}^{t} F_{Rx}\mathrm{d}t \\ p_y - p_{y0} &= \int_{t_0}^{t} F_{Ry}\mathrm{d}t \\ p_z - p_{z0} &= \int_{t_0}^{t} F_{Rz}\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{4.3-9}$$

式(4.3-5)也可表示为

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_R \tag{4.3-10}$$

此式称为**质心运动定理**,即质点系质量与质心加速度矢量的乘积等于外力系的主矢。矢量方程(4.3-10)坐标式称为**牛顿方程**,即

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_R \tag{4.3-11}$$

牛顿方程的展开式为

$$m\ddot{x} = F_{Rx}, \quad m\ddot{y} = F_{Ry}, \quad m\ddot{z} = F_{Rz} \tag{4.3-12}$$

显然,上述牛顿方程对于刚体及刚体系的运动均成立。如果由 N 个刚体构成的刚体系,如果 m_i,$\vec{r}_i$ 与 $\vec{F}_{Ri}$ 分别为刚体 B_i 的质量、质心 C_i 的矢径与外力的主矢,刚体系的质心运动定理可写为

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Ri} \tag{4.3-13}$$

该式在公共基上的坐标式为刚体系的牛顿方程,即

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{r}_i = \sum_{i=1}^{N} F_{Ri} \tag{4.3-13'}$$

当质点系外力的主矢为零时,由式(4.3-6)可得动量 $\boldsymbol{p}$ 为常矢量,如果初始动量为 $\boldsymbol{p}_0$,有

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{0} \tag{4.3-14}$$

或由式(4.3-11)可得 $\mathrm{d}m\dot{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$,有

$$m\dot{\boldsymbol{r}} - m\dot{\boldsymbol{r}}_0 = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0} \tag{4.3-15}$$

此式描述的是**动量守恒定律**,即当质点系的外力的主矢为零时质点系的动量保持不变。

当主矢在某方向的坐标为零时,如 $F_x = 0$,由式(4.3-9)或(4.3-12)可得

$$p_x - p_{x0} = 0, \quad m\dot{x} - m\dot{x}_0 = mv_x - mv_{x0} = 0 \tag{4.3-16}$$

即动量在该方向的坐标保持不变。

4.4 动量矩定理

4.1.1 动量矩

1. 质点系对一定点的**动量矩**

不失一般性，令该点 O 为惯性基的基点。质点 P_k 的动量 $\vec{p}_k$ 对点 O 的动量矩定义为

$$\vec{L}_{Ok} = \vec{m}_O(\vec{p}_k) = \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k \qquad (4.4-1)$$

质点系对定点 O 的动量矩 $\vec{L}_O$ 为所有质点对点 O 的动量矩的矢量和，即

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{p}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k \qquad (4.4-2)$$

动量矩 $\vec{L}_O$ 作为一矢量，其在惯性基的坐标阵记为 $\boldsymbol{L}_O = (L_{Ox} \ \ L_{Oy} \ \ L_{Oz})^{\mathrm{T}}$，分别称 L_{Ox}，L_{Oy} 与 L_{Oz} 为质点系对固定轴 Ox，Oy 与 Oz 的动量矩。

2. 质点系对于其质心的动量矩

如图 4-22 所示一质点系，定义 C 为其的质心。它相对点 O 的矢径为 $\vec{r}$。质点 P_k 相对于点 O 与点 C 的矢径分别 $\vec{r}_k$ 与 $\vec{\rho}_k$。由图可见，上述矢量间有如下关系：

$$\vec{r}_k = \vec{r} + \vec{\rho}_k \qquad (4.4-3)$$

此外，由质心定义式(4.1-26)，有

$$\sum_k m_k\vec{\rho}_k = m\vec{\rho}_C = \vec{0} \qquad (4.4-4)$$

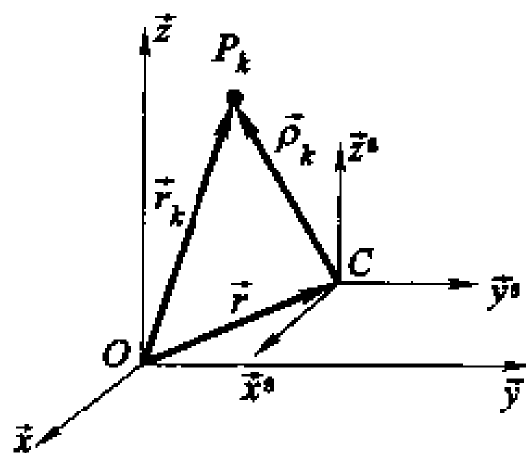


图 4-22 质点系点的位置矢量

将质点系相对 C 点的动量矩记为 $\vec{L}_C$，其定义为

$$\vec{L}_C = \sum_k \vec{\rho}_k \times m_k\dot{\vec{r}}_k \qquad (4.4-5)$$

将式(4.4-3)代入，考虑到式(4.4-4)，有

$$\vec{L}_C = \Big(\sum_k m_k\vec{\rho}_k\Big)\times \dot{\vec{r}} + \sum_k \vec{\rho}_k \times m_k\dot{\vec{\rho}}_k = \sum_k \vec{\rho}_k \times m_k\dot{\vec{\rho}}_k \qquad (4.4-6)$$

如果过质心 C 作一平移的动参考基 $\vec{e}^s$（如图 4-22 所示），即令其始终与惯性基 $\vec{e}$ 平行。那么矢量 $\vec{\rho}_k$ 在基 $\vec{e}$ 对时间的导数 $\dot{\vec{\rho}}_k$ 等于该矢量在基 $\vec{e}^s$ 上对时间的导数。后者的物理意义为点 P_k 相对于动基 $\vec{e}^s$ 的相对速度。令

$$\vec{L}'_C = \sum_k \vec{\rho}_k \times m_k\dot{\vec{\rho}}_k \qquad (4.4-7)$$

与式(4.4-5)比较,现将式(4.4-5)定义的 $\vec{L}_C$ 称为质点系相对 C 点的**绝对动量矩**,则式(4.4-7)定义的 $\vec{L}'_C$ 称为质点系相对 C 点**相对动量矩**。由式(4.4-6)可知,对于矩心为质心的情况,质点系的绝对动量矩与相对动量矩相等,即

$$\vec{L}_C = \vec{L}'_C \tag{4.4-8}$$

4.4.2 动量矩定理

考虑质点系相对于定点 O 的动量矩式(4.4-2)。将此式两边对时间求导,有

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \ddot{\vec{r}}_k$$

将式(3.4-4)代入上式的右边,

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_{ki}$$

由于 $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$,上式右边的第二项为零;考虑到式(4.1-11),右边的第一项为质点系外力对定点 O 的主矩 $\vec{M}_O$。因此上式可改写为

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O \tag{4.4-9}$$

此式描述了质点系关于定点的**动量矩定理**,即质点系关于定点的动量矩对时间的导数等于质点系外力对该点的主矩。

矢量方程(4.4-9)在惯性基上的坐标式为

$$\dot{\boldsymbol{L}}_O = \boldsymbol{M}_O \tag{4.4-10}$$

考虑到 $\boldsymbol{L}_O = (L_{Ox} \quad L_{Oy} \quad L_{Oz})^{\mathrm{T}}$ 与关于轴的动量矩的定义,上式的展开式为

$$\dot{L}_{Ox} = M_{Ox}, \quad \dot{L}_{Oy} = M_{Oy}, \quad \dot{L}_{Oz} = M_{Oz} \tag{4.4-10$'$}$$

三式分别描述了质点系对固定轴的动量矩定理,即质点系对固定轴的动量矩对时间的导数等于质点系的外力对该轴的矩。

对式(4.4-10)两边由 t_0 到 t 积分,得到积分形式的动量矩定理

$$\boldsymbol{L}_O - \boldsymbol{L}_{O0} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M}_O \mathrm{d}t \tag{4.4-11}$$

式中,$\boldsymbol{L}_{O0}$ 为时刻 t_0 的对点 O 的动量矩。上式的右边定义为时间 t_0 到 t 间隔内外力系的**冲量主矩**,简称为**冲量矩**。上式表示,质点系动量矩在时间间隔内的变化等于外力系在同一时间间隔内的冲量矩。展开式(4.4-11)有

$$L_{Ox} - L_{Ox0} = \int_{t_0}^{t} M_{Ox} \mathrm{d}t, \quad L_{Oy} - L_{Oy0} = \int_{t_0}^{t} M_{Oy} \mathrm{d}t, \quad L_{Oz} - L_{Oz0} = \int_{t_0}^{t} M_{Oz} \mathrm{d}t \tag{4.4-11$'$}$$

当质点系外力的主矩为零时，由式(4.4－11)可得

$$\boldsymbol{L}_O - \boldsymbol{L}_{O0} = \boldsymbol{0} \tag{4.4-12}$$

此式描述的是**动量矩守恒定律**，即当质点系的外力的主矩为零时质点系的动量矩保持不变。

当主矩在某方向的坐标为零时，如 $M_{Ox}=0$，由式(4.4－11′)可得

$$L_{Ox} - L_{Ox0} = 0 \tag{4.4-13}$$

即动量矩在该方向的坐标保持不变。

定理式(4.4－9)对于刚体同样成立。如果将上式的动量矩矢量在惯性基上对时间的绝对导数用在刚体连体基上对时间的导数表达，由式(2.3－14′)，上式可表为

$$\overset{\circ}{\vec{L}}_O + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \vec{M}_O \tag{4.4-14}$$

式中，$\vec{\omega}$ 为连体基相对于惯性基的角速度矢量。此式在连体基上的坐标式为

$$\dot{\boldsymbol{L}}'_O + \tilde{\boldsymbol{\omega}}'\boldsymbol{L}'_O = \boldsymbol{M}'_O \tag{4.4-14′}$$

式中：$\boldsymbol{L}'_O$，$\boldsymbol{M}'_O$ 分别动量矩矢量与主矩在连体基的坐标阵；$\tilde{\boldsymbol{\omega}}'$ 为角速度矢量在连体基的坐标方阵。

下面考虑质点系相对于其质心 C 的动量矩式(4.4－5)。将此式两边对时间求导，有

$$\dot{\vec{L}}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times m_k \ddot{\vec{r}}_k + \sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{\rho}}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k$$

由式(4.4－3)，有 $\dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\rho}}_k$，将其代入上式的右边第二项，再考虑到式(4.4－4)，可知此项为零。将式(4.3－4)代入上式的右边第一项，上式变为

$$\dot{\vec{L}}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k$$

上式的右边为质点系的外力对质心的主矩 $\vec{M}_C$。由此可得

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C \tag{4.4-15}$$

此式描述的是质点系对其质心的动量矩定理，即质点系关于其质心的动量矩对时间的导数等于质点系外力对质心的主矩。

定理式(4.4－15)对于刚体同样成立。如果将上式的动量矩矢量在惯性基上对时间的绝对导数用在刚体连体基上对时间的导数表达，由式(2.3－14′)，上式可表为

$$\overset{\circ}{\vec{L}}_C + \vec{\omega} \times \vec{L}_C = \vec{M}_C \tag{4.4-16}$$

此式在连体基上的坐标式为

$$\dot{\boldsymbol{L}}'_C + \tilde{\boldsymbol{\omega}}'\boldsymbol{L}'_C = \boldsymbol{M}'_C \tag{4.4-16'}$$

式中 $\boldsymbol{L}'_C,\boldsymbol{M}'_C$ 分别动量矩矢量与主矩在连体基的坐标阵。

最后对式(4.4-15)两边由 t_0 到 t 积分可得到积分形式的对质心的动量矩定理

$$\boldsymbol{L}_C - \boldsymbol{L}_{C0} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M}_C \mathrm{d}t \tag{4.4-17}$$

式中 $\boldsymbol{L}_{C0}$ 为时刻 t_0 的对质心 C 的动量矩。上式的右边定义为时间 t_0 到 t 间隔内外力系对 C 的冲量主矩。展开上式有

$$L_{Cx} - L_{Cx0} = \int_{t_0}^{t} M_{Cx}\mathrm{d}t,\quad L_{Cy} - L_{Cy0} = \int_{t_0}^{t} M_{Cy}\mathrm{d}t,\quad L_{Cz} - L_{Cz0} = \int_{t_0}^{t} M_{Cz}\mathrm{d}t \tag{4.4-17'}$$

4.5 动能定理

4.5.1 动能

质点系的**动能**记为 T,其定义为每个质点动能之和,即

$$T = \sum_k \left(\frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k\right) = \frac{1}{2}\sum_k m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k \tag{4.5-1}$$

如果用上述矢量的坐标式或模来表示,有

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_k = \frac{1}{2}\sum_k m_k \boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k m_k v_k^2 \tag{4.5-1'}$$

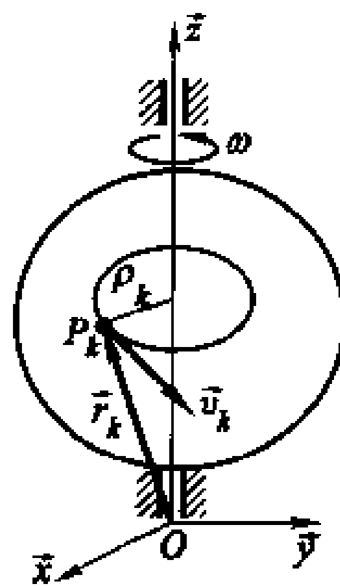


图 4-23 刚体定轴转动

对于作平移运动的刚体,刚体每个质点的速度均相等,即 $\vec{v}_k = \vec{v}$。这样由上式可得到平移运动刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2 \tag{4.5-2}$$

由此可见,刚体的平移动能相当于刚体质量集中在质心的质点的动能。

对于绕 Oz 以角速度 $\vec{\omega}$ 作定轴的刚体,点 P_k 的速度为 $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$,其大小为 $v_k = \omega\rho_k$,其中 ρ_k 为点 P_k 到 Oz 轴的距离(见图 4-23)。将其代入式(4.5-1),考虑到式(4.2-2c),可得到定轴转动刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_k m_k \rho_k^2 = \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2 \tag{4.5-3}$$

下面考虑刚体作平面一般运动的情况。由图2-11,刚体质心的速度$\dot{\vec{r}}$与刚体角速度$\vec{\omega}=\omega\vec{z}$,由式(2.4-7)与(2.4-8)可知,刚体上点P_k的速度$\dot{\vec{r}}_k$与的关系为

$$\dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\rho}}_k = \dot{\vec{r}} + \omega\vec{z}\times\vec{\rho}_k$$

将其代入式(4.5-1),

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{1}{2}\omega^2\sum_k m_k(\vec{z}\times\vec{\rho}_k)\cdot(\vec{z}\times\vec{\rho}_k) + \omega\sum_k m_k\dot{\vec{r}}\cdot(\vec{z}\times\vec{\rho}_k)$$

上式右边的第一项为刚体平移的动能式(4.5-2);第二项中$\sum_k m_k(\vec{z}\times\vec{\rho}_k)\cdot(\vec{z}\times\vec{\rho}_k) = \sum_k m_k\rho_k^2 = J_{Cz}$故该项为刚体绕质心转动的动能;由式(4.2-4),第三项为零。因此上式可表为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2 \tag{4.5-4}$$

此式表明,刚体的动能是质量集中于质心的质点动能与绕质心转动动能的简单叠加,称为**柯尼希定理**。

4.5.2 力的功

1. 功

考虑一力系$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)$,力$\vec{F}_k$作用点在刚体的$P_k$点上,该点的矢径为$\vec{r}_k$。其无限小的位移矢量记为$d\vec{r}_k$(见图4-24)。现将无限小的位移矢量$d\vec{r}_k$与力$\vec{F}_k$的点积称为该力所作的**元功**,记为$dW_k$,即

$$dW_k = d\vec{r}_k\cdot\vec{F}_k = \vec{F}_k\cdot d\vec{r}_k \tag{4.5-5}$$

如果点P_k所走过的路径为l_k,那么元功dW_k沿该路径的积分定义为力$\vec{F}_k$在该路径上所作的**功**,记为

$$W_k = \int_{l_k} dW_k = \int_{l_k}\vec{F}_k\cdot d\vec{r}_k \tag{4.5-6}$$

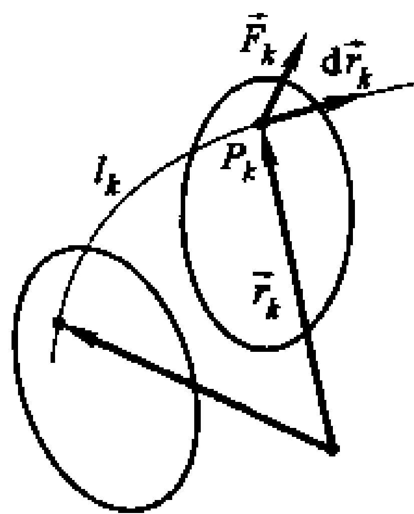


图4-24 力所作的元功与功

如果力系的各作用点$(P_1,P_2,\cdots,P_n)$分别按路径$(l_1,l_2,\cdots,l_n)$运动。力系的总元功为所有力的元功之和,即

$$dW = \sum_{k=1}^{n} dW_k = \sum_{k=1}^{n} d\vec{r}_k\cdot\vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot d\vec{r}_k \tag{4.5-7}$$

力系的总功为所有力的功之和，即

$$W=\sum_{k=1}^{n}W_k=\sum_{k=1}^{n}\int_{l_k}\vec{F}_k\cdot\mathrm{d}\vec{r}_k \tag{4.5-8}$$

下面考虑刚体内力所作的功。在刚体上任意取两个质点 P_i 与 P_j，质点 P_i 上受到 P_j 的力记为 $\vec{F}_{ij}$，质点 P_j 上受到 P_i 的力记为 $\vec{F}_{ji}$，由 4.1.1 的性质(3)，$\vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}$。由式(4.5-5)，两力元功之和为

$$\mathrm{d}W_{ij}=\vec{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i+\vec{F}_{ji}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_j=\vec{F}_{ij}\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_i-\mathrm{d}\vec{r}_j)$$

令 $\vec{r}_{ij}=\vec{r}_i-\vec{r}_j$ 表示质点 P_j 相对于 P_i 的位置矢量，有 $\mathrm{d}\vec{r}_{ij}=\mathrm{d}\vec{r}_i-\mathrm{d}\vec{r}_j$，其中 $\mathrm{d}\vec{r}_{ij}$ 为质点 P_j 相对于 P_i 的无限小的位置矢量。由于刚体上任意两点的相对位置保持不变，故无限小相对位移矢量为零。由此可得到结论：刚体在运动过程中所有质点间内力的功等于零。

对于理想约束力，通过上节的分析，这些约束力的方向与点的运动方向垂直，故可得到如下结论：刚体在运动过程中作用在刚体上的理想约束力所作的功为零。

最后考虑刚体上主动力所作的功。

令刚体上受到的主动力系为$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n)$，作用点分别为$(P_1,P_2,\cdots,P_n)$。令刚体的质心 C 的矢径为 $\vec{r}$，刚体的角速度矢量为 $\vec{\omega}$（见图 4-25）。由式(2.4-9)可知，点 P_k 的速度矢量 $\dot{\vec{r}}_k$ 与刚体质心速度 $\dot{\vec{r}}$ 和角速度矢量 $\vec{\omega}$ 间的关系为

$$\dot{\vec{r}}_k=\dot{\vec{r}}+\vec{\omega}\times\vec{\rho}_k$$

由于 $\vec{\omega}=\vec{z}\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$，令 $\mathrm{d}\vec{\varphi}=\vec{z}\mathrm{d}\varphi$ 为刚体无限小角位移矢量。由上式可得 P_k 的无限小的位移矢量 $\mathrm{d}\vec{r}_k$ 与质心 C 的无限小的位移矢量 $\mathrm{d}\vec{r}$ 和刚体无限小方位角矢量 $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ 的关系，即

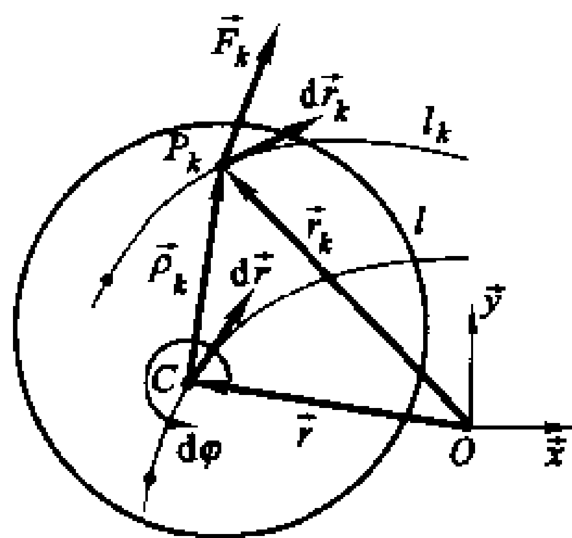


图 4-25　力所作的元功与功

$$\mathrm{d}\vec{r}_k=\mathrm{d}\vec{r}+\mathrm{d}\vec{\varphi}\times\vec{\rho}_k\qquad(k=1,\cdots,n) \tag{4.5-9}$$

将其代入式(4.5-7)，可得 n 个主动力所作的元功之和，即

$$\mathrm{d}W=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot(\mathrm{d}\vec{r}+\mathrm{d}\vec{\varphi}\times\vec{\rho}_k)=\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\times\vec{\rho}_k\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\varphi} \tag{4.5-10}$$

根据主矢与主矩的定义式(4.1-10)与(4.1-11)，上式右边两括号分别为主动力系向质心 C 简化的主矢与主矩，即

$$\vec{F}_R = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k, \quad \vec{M}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \times \vec{\rho}_k \tag{4.5-11}$$

因此,式(4.5-10)可简写为

$$dW = \vec{F}_R \cdot d\vec{r} + \vec{M}_C \cdot d\vec{\varphi} \tag{4.5-12}$$

可知,主动力所作的元功之和等于主动力的主矢与质心无限小位移矢量的点积以及主动力对质心的主矩与无限小方位角矢量点积之和。

考虑质心 C 的路径 l,主动力的功为

$$W = \int_l dW = \int_l \vec{F}_R \cdot d\vec{r} + \vec{M}_C \cdot d\vec{\varphi} = \int_l (\vec{F}_R \cdot \vec{v} + \vec{M}_C \cdot \vec{\omega})dt \tag{4.5-13}$$

2. 几种常见的力所作的功

(1) 重力的功

作用在刚体上每一个质点的重力为 $\vec{F}_k = m_k\vec{g}$,其中 $\vec{g}$ 为重力加速度矢量。当该质点由矢径为 $\vec{r}_{k0}$ 的起点沿路径 l_k 到矢径为 $\vec{r}_k$ 的终点,由式(4.5-13),刚体上所有质点上重力所作的功为

$$W = \vec{g} \cdot \sum_k m_k \int_{l_k} d\vec{r}_k = \vec{g} \cdot \sum_k m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_{k0})$$

图 4-26 重力的功

上式的求和号为对所有质点求和。令刚体质心的矢径为 $\vec{r}$,在刚体的前后的两个位形中,质心的矢径分别为 $\vec{r}_0$ 与 $\vec{r}$。根据质心位置的定义式(4.1-26),上式可简化为

$$W = m\vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = m\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \tag{4.5-14}$$

式中 m 为刚体的质量。如果按图 4-26 所示,重力加速度矢量的坐标阵为 $\boldsymbol{g} = g(0 \quad 0 \quad -1)^T$,矢径 $\vec{r}_0$ 与 $\vec{r}$ 的坐标阵分别为 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0 \quad y_0 \quad z_0)^T$ 与 $\boldsymbol{r} = (x \quad y \quad z)^T$。代入式(4.5-14)有

$$W = -mg(z - z_0) \tag{4.5-14'}$$

可见刚体重力的功与质心的高度差成正比,与质心所经过的路径无关。

(2) 线弹簧力的功

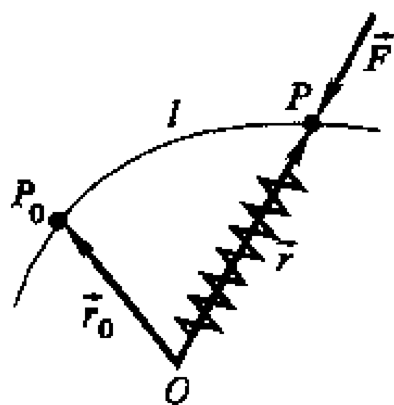


图 4-27 线弹性力的功

考虑图 4-27 所示一原长为 r_0 的线弹簧,一端固结于点 O,另一端为点 P。弹簧作用于点 P 的力 $\vec{F}$ 之作用线沿 OP,该力的大小与弹簧的变形 $\delta = r - r_0$(其中 r 为矢径 $\vec{r}$ 的模)成正比,方向指向点 O,即

$$\vec{F} = -k(r - r_0)\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -k\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\vec{r} \tag{4.5-15}$$

式中 k 称为**线弹簧刚度系数**。

计算点 P 沿路径 l 由点 P_0 到点 P 线弹簧力的功，将式(4.5－15)代入式(4.5－6)，考虑到

$$\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{2}\mathrm{d}(\vec{r}\cdot\vec{r})=\frac{1}{2}\mathrm{d}r^2=r\mathrm{d}r$$

有

$$W=-k\int_l\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-k\int_l\left(1-\frac{r_0}{r}\right)r\mathrm{d}r=-k\int_l\delta\mathrm{d}\delta$$

如果令弹簧在初始与终止位置的变形分别记为 δ_0 与 δ，有

$$W=-\frac{1}{2}k(\delta^2-\delta_0^2) \tag{4.5-16}$$

由此可见，线弹性力的功与弹簧的变形平方之差成正比，与通过的路径无关。

(3) 阻力的功

在4.1.7中，分析了刚体沿粗糙平面运动或粘性介质中运动将受到阻力的作用，在4.1.7的摩擦力是这种阻力的一种。这里考虑更一般的情况，令阻力 $\vec{F}$ 的作用线沿物体的速度矢量 $\vec{v}$，方向相反，大小为速度矢量 $\vec{v}$ 的模 v 的函数 $f(v)$，可表为

$$\vec{F}=-f(v)\left(\frac{\vec{v}}{v}\right) \tag{4.5-17}$$

对于阻力为干摩擦的情况，

$$f(v)=f\,F_{\mathrm{N}} \tag{4.5-18}$$

式中 f 为动摩擦因数，F_{N} 为垂直于接触面的正压力；对于粘性摩擦力，该力与速度的大小成正比，即

$$f(v)=cv \tag{4.5-19}$$

式中 c 为粘性摩擦系数。

将式(4.5－17)代入式(4.5－6)，考虑到 $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}\mathrm{d}t$，阻力的功为

$$W=-\int_l\frac{f(v)}{v}\vec{v}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t=-\int_l f(v)v\mathrm{d}t \tag{4.5-20}$$

对于干摩擦的情况，如果动摩擦因数 f 与正压力 F_{N} 均为常数时，将式(4.5－18)代入上式有

$$W=-fF_{\mathrm{N}}\int_l v\mathrm{d}t=-fF_{\mathrm{N}}\int_l\mathrm{d}s=-fF_{\mathrm{N}}l \tag{4.5-21}$$

可见干摩擦力的功与滑动的距离 l 成正比。对于粘性摩擦力的情况，将式(4.5－19)代入式(4.5－20)有

$$W=-c\int_l v^2\mathrm{d}t \tag{4.5-22}$$

由式(4.5-21)与(4.5-22)可见,阻力的功与路径有关。

4.5.3 势力场与势能

如果在空间某个区域内的任意位置处,都有大小与方向单值确定的力存在,则称该区域为力场。如万有引力与线弹性力,它们都仅与空间位置有关,所对应的力场分别称为**万有引力场**与**线弹性力场**。

如果力场中的每一点的位置由矢径 $\vec{r}$ 定义,那么力场中的力 $\vec{F}$ 可表为 $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$,其坐标阵为空间位置的单值可微函数,即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{4.5-23}$$

对于一单值可微标量函数 $U(\boldsymbol{r})$,考虑到 $U(\boldsymbol{r})$ 关于 $\boldsymbol{r}$ 的偏导数 $\boldsymbol{U}_r$ 的定义(见1.1.3)与梯度的定义,有

$$\text{grad } U(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}_r^{\mathrm{T}} \tag{4.5-24}$$

对于某力场如果存在一标量函数 $U(\boldsymbol{r})$ 其梯度恰好等于力 $\vec{F}$ 的坐标阵 $\boldsymbol{F}$,即有

$$\boldsymbol{F}=\text{grad } U(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{U}_r^{\mathrm{T}} \tag{4.5-25}$$

或

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z=\frac{\partial U}{\partial z} \tag{4.5-25'}$$

则此特殊力为**势力**,该力场称为**势力场**,或称**保守力场**,标量函数 U 称为该势力场的**势函数**,简称为**势**。将势函数的负值定义为该势力场的**势能函数**,简称为**势能**,记为 V,即

$$V(\boldsymbol{r})=-U(\boldsymbol{r}) \tag{4.5-26}$$

由式(4.5-23)与(4.5-25)可得势函数的全微分为

$$\mathrm{d}U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z=\boldsymbol{U}_r^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{4.5-27}$$

当一质点在势力场中沿路径 l 运动,考虑到上式,由式(4.5-6),力场对其的作用力所作的功可表为

$$W=\int_l\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_l\mathrm{d}U=U-U_0=-(V-V_0) \tag{4.5-28}$$

式中 U_0 与 U 和 V_0 与 V 分别为路径 l 的起点与终点的势函数和势能值。由此式表明,势力场对质点的功仅与路径的起始与终点的位置有关而与路径无关。考虑到势力场的功为两位置势函数(或势能)值的差,因此势力场的绝对大小已不太重要。如果在力场中的某点 $\boldsymbol{r}_0$,定义其势函数(或势能)值为零,即令

$$U_0=U(\boldsymbol{r}_0)=0,\ V_0=V(\boldsymbol{r}_0)=0$$

则由式(4.5-28),有

$$W=U=-V \tag{4.5-29}$$

此式表明，质点在势力场某位置的势能为该点由零势能位置移动到该位置势力所作的功的负值。

在势力场中，势函数（或势能）为常值 c 的点构成了一曲面（见图4-28），即

$$U(\boldsymbol{r}) = c,\ V(\boldsymbol{r}) = c$$

这些曲面称为**等势面**。c 为零的曲面称为零势面。根据势力与势函数的关系式（4.5-25），可见势力的方向沿等势面的法向。质点在等势面上移动，势力不作功。

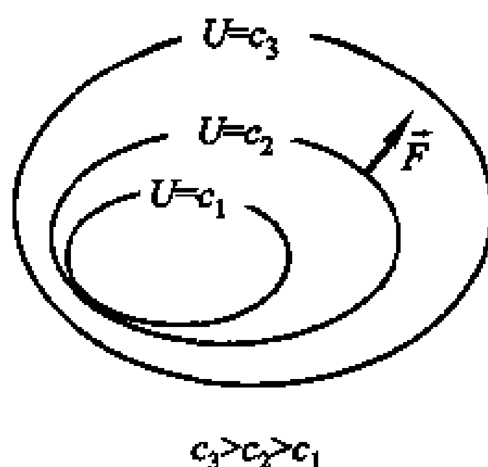


图4-28　等势面

对于由 n 个质点构成的系统，其势函数 U 或势能 V 为各质点的势函数 U_k 或势能 $V_k (k = 1, \cdots, n)$ 的代数和，即

$$U = \sum_{k=1}^{n} U_k,\ V = \sum_{k=1}^{n} V_k \tag{4.5-30}$$

重力场为常见的势力场。将式（4.5-14）与（4.5-28）对照，重力场的势函数为

$$U = m\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} + c \tag{4.5-31}$$

其中 c 为任意常数。可见等势面为垂直于重力加速度矢量的平面。如果零势面取在基点，$c = 0$。由式（4.5-14′），重力场的势函数为

$$U = -mgz + c \tag{4.5-31′}$$

线弹簧力场为另一种常见的势力场。将式（4.5-16）与（4.5-28）对照，线弹簧力的势函数为

$$U = -\frac{1}{2}k\delta^2 + c = -\frac{1}{2}k(r - r_0)^2 + c \tag{4.5-32}$$

其中 c 为任意常数。可见等势面为以基点为圆心的球面。如果以原长 r_0 为半径的球面为零势面，则 $c = 0$。

4.5.4　动能定理

考虑质点系中质点 P_k，其受到的力有外力 $\vec{F}_k$ 与其他质点 $P_i (i = 1, \cdots, n; i \neq k)$ 对其作用的内力，记为 $\vec{F}_{ki} (i = 1, \cdots, n; i \neq k)$。质点 P_k 运动所遵循的牛顿定律为式（4.3-4），现改写为

$$\frac{\mathrm{d}m_k\dot{\vec{r}}_k}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_k + \sum_{i=1, \neq k}^{n} \vec{F}_{ki} \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

将该点的速度 $\dot{\vec{r}}_k = \mathrm{d}\vec{r}_k / \mathrm{d}t$ 点积上式两边有

$$\dot{\vec{r}}_k \cdot \mathrm{d}m_k\dot{\vec{r}}_k = \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \left(\vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki}\right) \qquad (k = 1,\cdots,n)$$

将这 n 个方程相加,得

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{r}}_k \cdot \mathrm{d}m_k\dot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \left(\vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki}\right) \qquad (4.5-33)$$

考虑到式(4.5-1),上式左边为

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{r}}_k \cdot \mathrm{d}m_k\dot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\frac{1}{2}m_k\dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k = \mathrm{d}\sum_{k=1}^{n} T_k = \mathrm{d}T$$

考虑到式(4.5-5),定义作用于质点 P_k 的外力作的元功 $\mathrm{d}W_k$ 与所有内力的元功 $\mathrm{d}W'_k$ 分别为

$$\mathrm{d}W_k = \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \vec{F}_k, \quad \mathrm{d}W'_k = \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki}$$

再考虑到式(4.5-7),将所有质点外力的元功记为 $\mathrm{d}W$,所有内力的元功记为 $\mathrm{d}W'$,则式(4.5-33)的右边为

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\vec{r}_k \cdot \left(\vec{F}_k + \sum_{i=1,\neq k}^{n} \vec{F}_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{d}W_k + \mathrm{d}W'_k)$$

$$= \mathrm{d}\sum_{k=1}^{n} W_k + \mathrm{d}\sum_{k=1}^{n} W'_k = \mathrm{d}W + \mathrm{d}W'$$

这样,式(4.5-33)变为

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}W + \mathrm{d}W' \qquad (4.5-34)$$

当质点系由初始状态到达当前状态,各质点经过的路径分别为 l_k,定义质点系所有外力与内力的功分别为

$$W = \sum_{k=1}^{n}\int_{l_k} \mathrm{d}W_k, \quad W' = \sum_{k=1}^{n}\int_{l_k} \mathrm{d}W'_k$$

式(4.5-34)的积分为

$$T - T_0 = W + W' \qquad (4.5-35)$$

此式描述了质点系的**动能定理**,即质点系动能的改变等于作用于质点系所有外力的功与所有内力的功之和。

在 4.5.2 中已指出,刚体在运动过程中所有质点间内力的功等于零,即 $W' = 0$。考虑到式(4.5-13),刚体的动能定理可表为

$$T - T_0 = W = \int_{l}(\vec{F}_{\mathrm{R}} \cdot \vec{v} + \vec{M}_C \cdot \vec{\omega})\mathrm{d}t \qquad (4.5-36)$$

式中:$\vec{F}_{\mathrm{R}}$ 与 $\vec{M}_C$ 为作用于刚体所有外力关于质心的主矢与主矩;$\vec{v}$ 为质心的速度;$\vec{\omega}$ 为刚体的角速度;l 为质心通过的路径。

如果质点系处在势力场,由式(4.5-29)知,质点 P_k 在势力场某位置的势

能为该点由零势能位置移动到该位置势力所作的功的负值，即有

$$W_k = -V_k$$

对于由 n 个质点构成的系统，所有的势力所作的功的负值为各质点的势能 V_k $(k=1,\cdots,n)$ 的代数和，考虑到式(4.5－30)，引入系统的总势能 V，有

$$W = -\sum_{k=1}^{n} V_k = -V$$

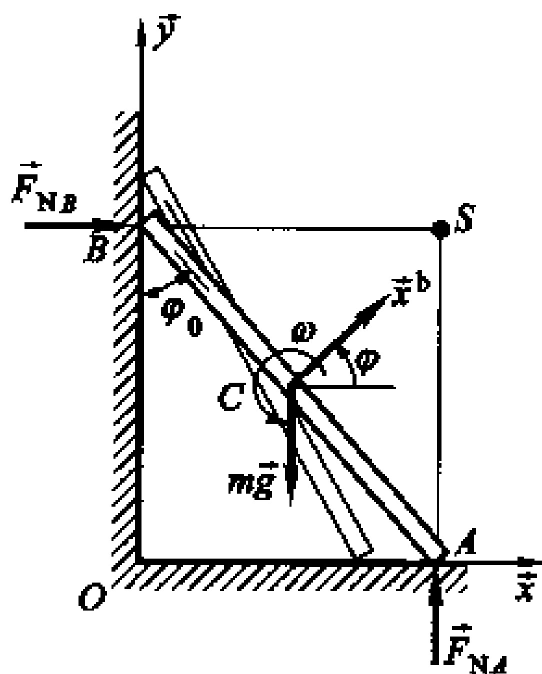
代入式(4.3－35)有

$$T + V = T_0 + V_0 = 常数 \tag{4.5-37}$$

系统的动能加上系统的势能称为系统的**机械能**。上式描述的是质点系在势力场中的**机械能守恒定律**，即质点系动能与势能之和为常量。

动能定理式(4.5－35)或机械能守恒定律式(4.5－37)建立了系统所受的力(矩)与系统运动速度(角速度)间的关系，故在处理系统动力学问题的瞬时分析中将起到重要的作用。见下面的几个例子。

[例 4.5－1] 例 2.4－5 所示的长为 l 的均质杆 AB 质量为 m。当该杆由静止开始，在地面与墙面上无摩擦地滑动，试求杆 AB 的角速度。



例 4.5－1 图

解：例 2.4－5 为运动学问题，本例为动力学问题。杆 AB 作平面运动，所受的主动力有重力 $m\vec{g}$，理想约束力 $\vec{F}_{NA}$ 与 $\vec{F}_{NB}$，方向如图所示。如图建立惯性基 $\vec{e}$ 与连体基 $\vec{e}^b$。由于杆 AB 的运动受地面与墙面的约束，杆 AB 的位形可由姿态角 φ 确定。故杆 AB 有 1 个自由度。

另外由例 2.4－5 分析可知，杆 AB 的运动可理解为绕瞬心 S 在瞬时的定轴转动。由式(4.5－3)，杆 AB 在该瞬时的动能为

$$T = \frac{1}{2} J_{Sz} \omega^2 \tag{1}$$

考虑到均质杆 AB 绕质心 C 的转动惯量为 $J_{Cz} = ml^2/12$，瞬心 S 到质心 C 的距离为 $l/2$，由式(4.5－9)，得

$$J_{Sz} = J_{Cz} + ml^2/4 = ml^2/3$$

代入式(1)有

$$T = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2 \tag{2}$$

对于重力 $m\vec{g}$，理想约束力 $\vec{F}_{NA}$ 与 $\vec{F}_{NB}$，在杆的运动过程中只有重力作功。

如果杆的初始位置的姿态角为 φ_0，由式(4.5－14′)，重力作的功为

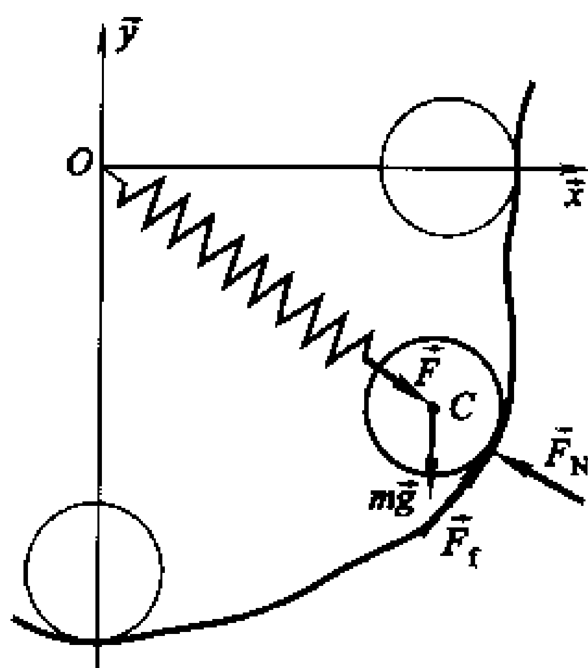
$$W=-mg\cdot\frac{1}{2}l(\cos\varphi-\cos\varphi_0) \qquad (3)$$

由已知条件，初始杆 AB 的动能为零，由动能定理式(4.5－35)，考虑到式(2)与(3)，有

$$\frac{1}{6}ml^2\omega^2=-\frac{1}{2}mgl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)$$

可解得杆 AB 的角速度为 $\omega=\sqrt{3g(\cos\varphi_0-\cos\varphi)/l}$。

[例 4.5－2] 图示一质量为 m 半径为 r 的均质圆盘在一铅垂平面内的曲线轨道上作无滑动滚动。圆盘的中心 C 与固定点 O 连接一线弹簧，弹簧的原长为 l_0。初始时 OC 为水平，弹簧长为 $l_1<l_0$，圆盘处于静止状态。终了时 OC 为铅垂，弹簧长为 $l_2<l_0$。试求圆盘在终了位置质心的速度。



例 4.5－2 图

解：圆盘在铅垂平面内作平面运动，其上受到的力除重力 $m\vec{g}$ 与弹簧力 $\vec{F}$ 外，还有曲线轨道对圆盘的理想约束力 $\vec{F}_N$ 与摩擦力 $\vec{F}_f$，它们的作用点为 D。在圆盘的运动过程中，理想约束力 $\vec{F}_N$ 不作功。考虑到圆盘在轨道上作无滑动滚动，接触点 D 的速度为零，故 $d\vec{r}_D=\vec{0}$，可见摩擦力 $\vec{F}_f$ 的元功 $dW=\vec{F}_f\cdot d\vec{r}_D=0$，即在圆盘的运动过程中，摩擦力 $\vec{F}_f$ 也不作功。由式(4.5－14′)与(4.5－16)，重力 $m\vec{g}$ 与弹簧力 $\vec{F}$ 作的功为

$$W=mgl_2-\frac{1}{2}k[(l_2-l_0)^2-(l_1-l_0)^2] \qquad (1)$$

圆盘在轨道上作无滑动滚动，故质心 C 的速度 v 与刚体的角速度 ω 的关系为 $\omega=v/r$。由式(4.5－4)，圆盘的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2=\frac{3}{4}mv^2 \qquad (2)$$

由已知条件，初始圆盘的动能为零，由动能定理式(4.5－35)，考虑到式(1)与(2)，有

$$\frac{3}{4}mv^2=mgl_2-\frac{1}{2}k[(l_2-l_0)^2-(l_1-l_0)^2]$$

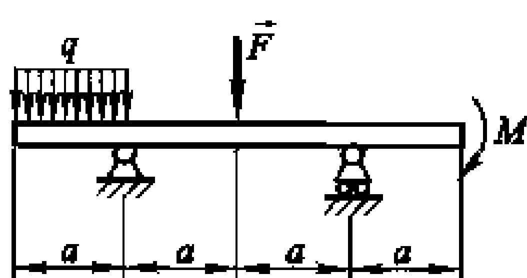
可解得圆盘的的终了速度为

$$v=\sqrt{\frac{4}{3}gl_2-\frac{2k}{3m}[(l_2-l_0)^2-(l_1-l_0)^2]}$$

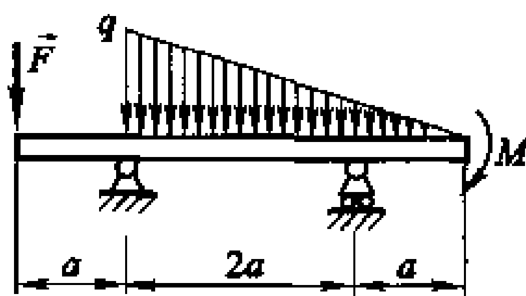
习　题

4－1　梁的支承及载荷如图示。以载荷 M,F,q 表示支承处的约束力。

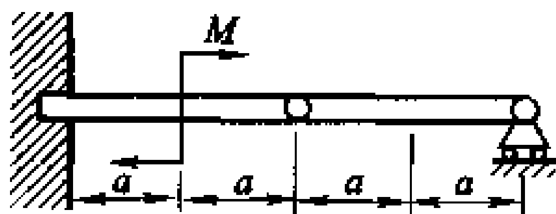
4－2　一梁由支座 A 以及 BE,CE,DE 三杆支承如图示。已知 $q=0.5\ \text{kN/m}, a=2\ \text{m}$，求各杆内力。



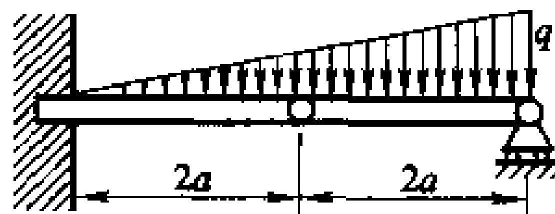
题4－1(1)图



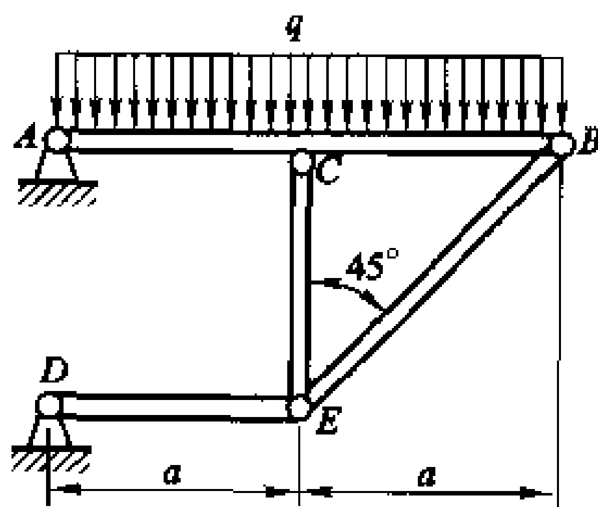
题4－1(2)题



题4－1(3)图



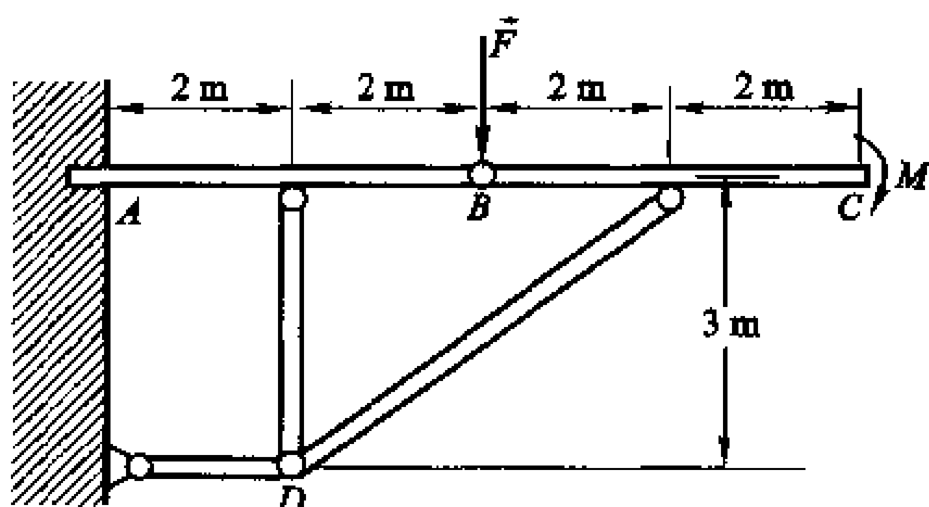
题4－1(4)题



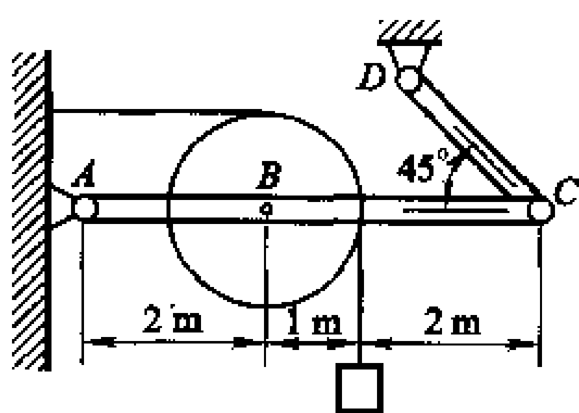
题4－2图

4－3　一组合梁 ABC 的支承及载荷如图示。已知 $F=1\ \text{kN}, M=0.5\ \text{kN·m}$，求固定端 A 的约束力。

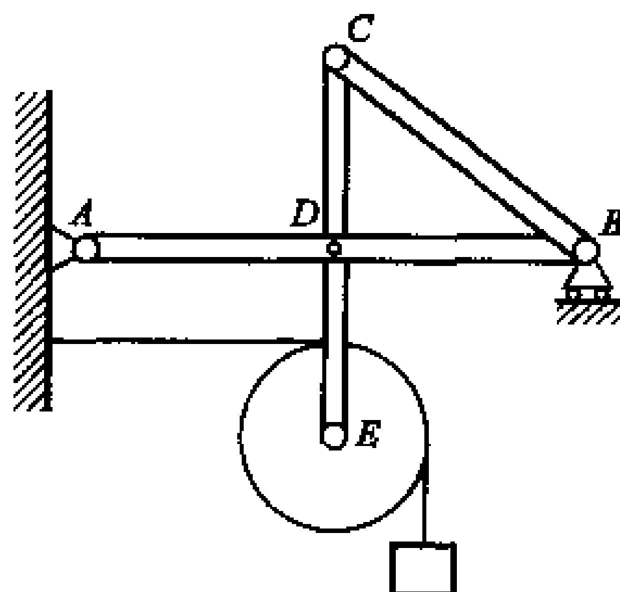
4－4　重 10 kN 的重物由杆 AC,CD 与滑轮支持，如图示。不计杆与滑轮的重量，求支座 A 处的约束力以及 CD 杆的内力。



题 4-3 图



题 4-4 图

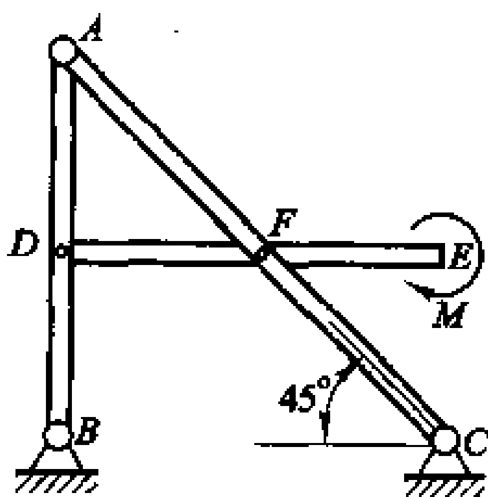


题 4-5 图

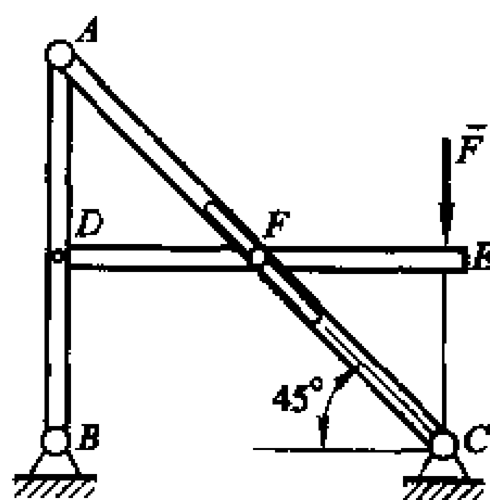
4-5　12 kN 重物由 AB,BC,CE 三杆组成的架子与滑轮支持如图示。已知 $AD=BD=2$ m,$CD=DE=1.5$ m,不计杆与滑轮的重量,求支座处的约束力以及 BC 杆的内力。

4-6　AB,AC,DE 三杆铰接后支承如图示。求当 DE 杆的一端有一力偶 M 作用时,杆上 D,F 两点所受的力。设力偶矩的大小为 1 kN·m,$AD=DB=0.5$ m,杆重不计。

4-7　AB,AC,DE 三杆连接并支承如图示。DE 杆上有一销子 F 套在 AC 杆的导槽内。求在水平杆 DE 的一端有一铅垂力 $\vec{F}$ 作用时,AB 杆上 A,B,D 点所受的力。设 $AD=DB$,$DF=FE$,所有杆重均不计。



题 4-6 图

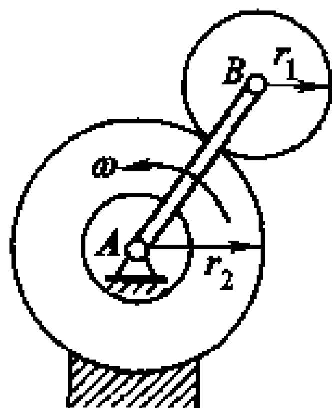


题 4-7 图

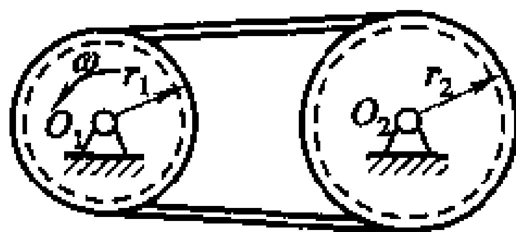
4-8 试计算下列各系统在图示瞬时的动量：

(1) 系杆 AB 以匀角速度 ω 绕轴 A 转动，带动行星轮 B 在固定中心轮上作纯滚动。系杆和行星轮均为均质，质量分别为 m_1 和 m_2，尺寸如图所示；

(2) 均质胶带及带轮的质量分别为 m，m_1 和 m_2，尺寸如图所示。轮 O_1 以匀角速度 ω 绕轴转动。



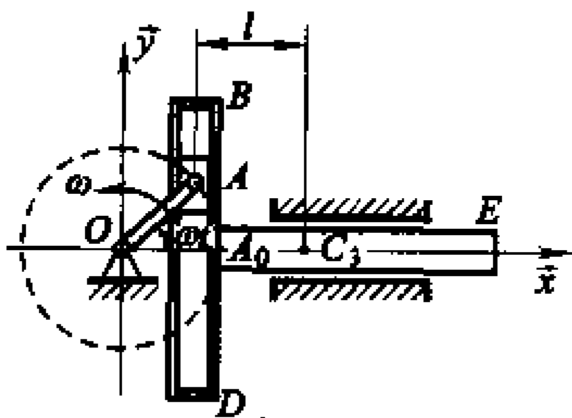
题 4-8(1)图



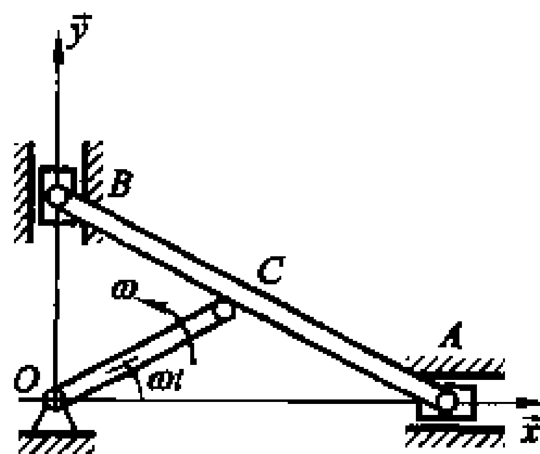
题 4-8(2)图

4-9 在曲柄滑道机构中，均质曲柄 OA 长为 l，质量为 m_1，以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，初始在水平位置 OA_0。滑块 A 的质量为 m_2，滑道 BDE 的质量为 m_3，其质心 C_3 到滑槽 BD 的距离为 l。试求机构质心的运动方程及系统动量。

4-10 在椭圆机构中，规尺 AB 质量为 $2m_1$，曲柄 OC 质量为 m_1，滑块 A 和 B 质量均为 m_2。曲柄以匀角速度 ω 绕轴 O 转动。试求机构质心的运动方程及系统动量。设各物体为均质，$OC = AC = BC = 1$ m。



题 4-9 图

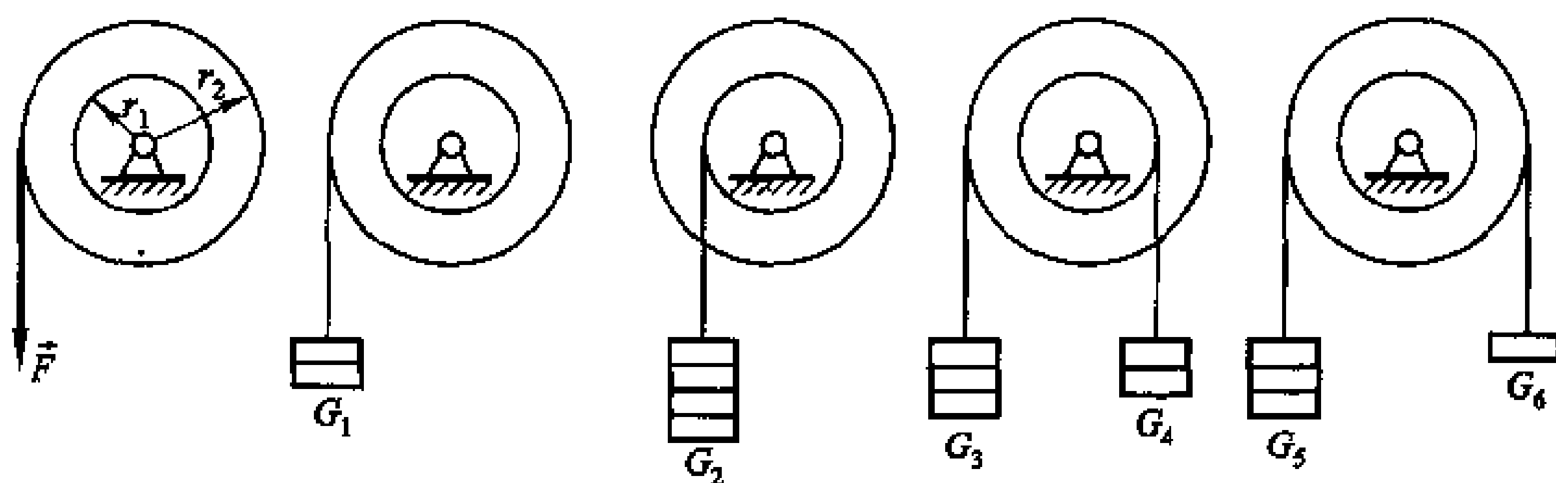


题 4-10 图

4-11 棒球质量 $m = 0.14$ kg，以速度 $v_0 = 50$ m/s 向右沿水平方向运动。在棒击后速度发生改变，其值降至 $v = 40$ m/s，方向与 v_0 成角 $\theta = 135°$，指向右上方。试求棒作用于球的冲量的水平和铅垂分量。

4-12 在相同的滑轮上绕以软绳，在绳子的一端作用有力或挂以重物如下图所示。图中 $r_2 = 2r_1$，$F = 1$ kN，重物 G_1 重 1 kN，G_2 重 2 kN，G_3 重 1.5 kN，G_4 重 1 kN，G_5 重 1.5 kN，G_6 重 0.5 kN。如果不计软绳的质量以及轴承中的摩擦力，则作用于系统上的外力对转动轴的力矩相同。问滑轮转动的角加速度是否相等？孰大孰小？

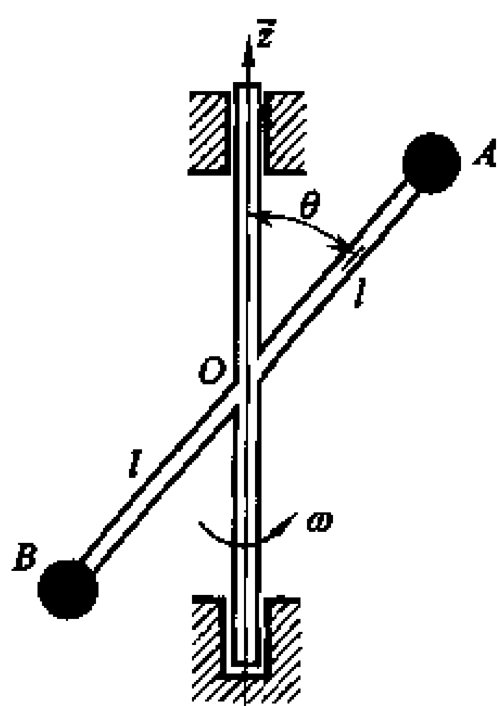
4-13 两小球 A，B，质量均为 m，用长为 $2l$ 的细杆连结，并以其中点 O 固定在铅垂轴 Oz 上，细杆与 Oz 的夹角为 θ，设细杆绕 Oz 轴转动的角速度为 ω，杆的质量不计。求此质点



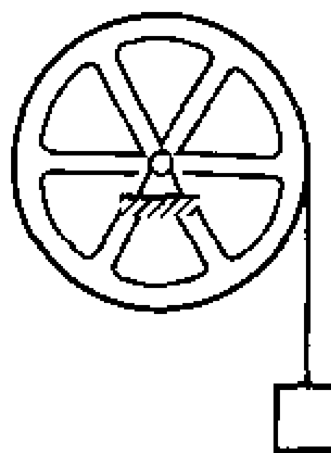
题 4－12 图

系对点 O 和轴 Oz 的动量矩。

4－14　为了测定一半径为 0.5 m 的飞轮的转动惯量，在飞轮上绕以软绳，挂一质量为 10 kg 的重物。测得重物从静止下落 2 m 的时间为 16 s。如果轴承中的摩擦力可以略去不计，则飞轮的转动惯量为多大？

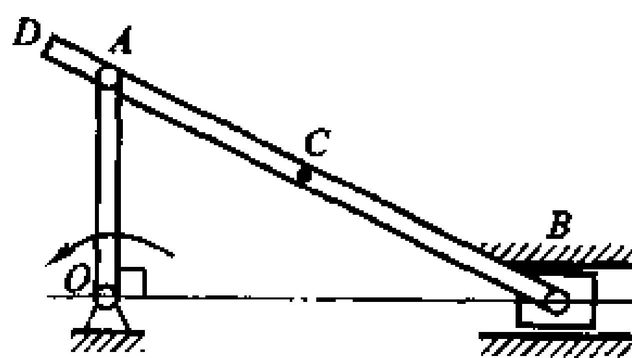


题 4－13 图



题 4－14 图

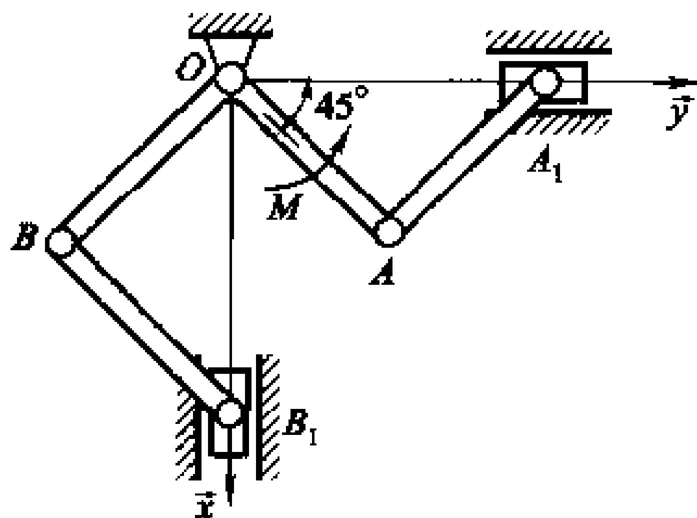
4－15　上题中，如果说轴承中的摩擦力不能略去不计，那么，为了除去轴承摩擦力的影响，用质量为 5 kg 的重物再做一次试验，测得下落同一距离的时间为 24 s。假定轴承中的摩擦力矩不变，试计算飞轮的转动惯量。



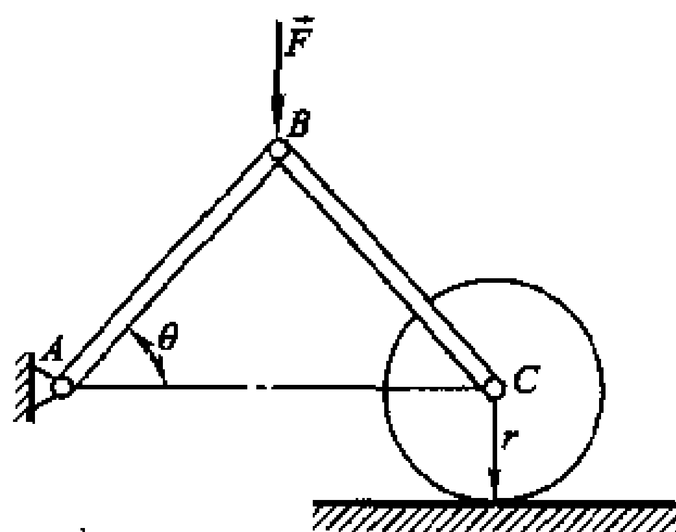
题 4－16 图

4-16　曲柄 OA 重 G_1，连杆 BD 重 G_2，$OA=r$，$AB=a$，$BD=l$。初瞬时，曲柄 OA 位于铅垂位置（如图所示），如曲柄的铅垂位置受微小扰动后，求曲柄在重力作用下在铅直平面内转过 90°时的角速度。曲柄和连杆都是均质杆。

4-17　弯成直角重 $2G$ 的均质杆（如图），可在平面 Oxy 内绕定轴 Oz 转动，同时带动由铰链连接的连杆 AA_1 和 BB_1 以及各重 Q 的滑块 A_1 和 B_1 运动。已知 $OA=OB=AA_1=BB_1=a$，$\angle AOA_1=45°$，连杆均为重 G 的均质杆，设在杆 AOB 上作用一力偶 M，初始时杆 AOB 的角速度等于零，求它转过 N 转时的角速度。

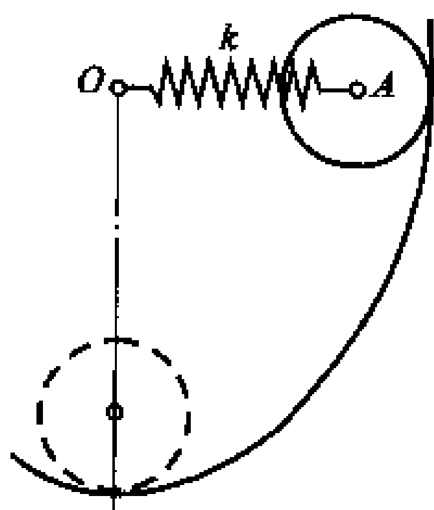


题 4-17 图

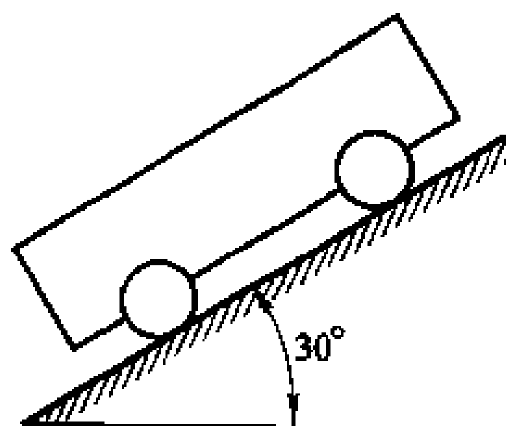


题 4-18 图

4-18　长为 b 质量为 m_0 的两均质杆 AB 的 BC 在 B 点用铰链相连。杆 AB 的 A 端和固定铰链支座相连，杆 BC 在 C 处用铰链与一均质圆柱体连接（如图）。圆柱的质量为 m，半径为 r。在 B 点作用一铅垂力 $\vec{F}$。A，C 两点处于同一水平线上，杆 AB 与水平线夹角为 θ。初始时系统静止不动，求系统运动到杆 AB 和杆 BC 均处于水平位置时，杆 AB 的角速度 ω。设圆柱在水平面上滚动而无相对滑动。



题 4-19 图



题 4-20 图

4-19　原长为 0.4 m，弹簧刚度系数为 2 kN/m 的弹簧的一端固定，另一端与一重 0.1 kN，半径为 0.1 m 的匀质圆盘的中心 A 相连接。圆盘在铅垂平面内沿一弧形轨道作纯滚动如图示。开始时 OA 在水平位置，$OA=0.3$ m，圆盘速度为零，求弹簧运动到铅垂位置时轮

心的速度，此时 O 与轮心的距离为 0.35 m。弹簧的质量可以不计。

4-20　重 0.2 kN 的木块上装有四个各重 0.02 kN 的轮子，在倾斜 30°的斜面上纯滚下如图示。设轮子的半径为 0.05 m，对于其轮心的回转半径为 0.04 m，求从静止开始滚过 1 m 后木块的速度。

第5章　刚体动力学

本章将根据矢量动力学中的动量定理与动量矩定理建立刚体定轴转动与刚体平面运动的动力学方程。通过这些方程可解决刚体及刚体系动力学的基本问题。通过一些例子读者可以了解到处理动力学问题的两种方法，即一般方法与独立坐标方法。

由于动力学基本定理中动量与动量矩对时间的导数均是相对于**惯性基**的。故上述的动力学方程均相对于惯性基而言。为了解决相对于**非惯性基**下的动力学问题，本章还给出了刚体平面运动的非惯性基下动力学方程。

物体间的**碰撞**是工程中常见的动力学问题，本章最后将介绍利用动量定理与动量矩定理的积分形式解决此类问题的方法。

5.1　定轴转动动力学方程

由刚体绕定点 O 的动量矩定理可以很简便地得到刚体绕定轴转动的动力学方程。

考虑一刚体在轴承的约束下，绕 Oz 轴作定轴转动(见图5-1)，角速度矢量为 $\vec{\omega}=\omega\vec{z}$。质点 P_k 的速度为

$$\vec{v}_k=\vec{\omega}\times\vec{r}_k=\omega\vec{z}\times\vec{r}_k \tag{5.1-1}$$

模为 $v_k=\omega\rho_k$，其中 ρ_k 为点 P_k 到转轴的距离(见图5-1)。根据定义，刚体对固定轴 Oz 的动量矩为刚体对定点 O 的动量矩矢量 $\vec{L}_O$ 在 Oz 轴的坐标。考虑到式(4.4-2)，(1.2-14)与(5.1-1)有

$$\begin{aligned}L_{Oz}&=\vec{z}\cdot\vec{L}_O=\sum_{k=1}^{n}\vec{z}\cdot(\vec{r}_k\times m_k\vec{v}_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{v}_k\cdot(\vec{z}\times\vec{r}_k)=\sum_{k=1}^{n}m_k(\vec{z}\times\vec{r}_k)\cdot(\vec{z}\times\vec{r}_k)\end{aligned}$$

由图5-1可知，$\vec{z}\times\vec{r}_k$ 的模为 ρ_k，再考虑到刚体对 Oz 轴转动惯量的定义式(4.2-2c)，由上式，可得刚体对固定轴 Oz 的动量矩为

$$L_{Oz}=\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\rho_k^2\right)\omega=J_{Oz}\omega \tag{5.1-2}$$

作为刚体定点运动的特殊情况，利用刚体对定点的动量矩定理式(4.4-

10′)的第三式,将上式代入,有

$$J_{Oz}\dot{\omega}=M_{Oz} \qquad (5.1-3)$$

由于轴承的理想约束力对 Oz 轴的矩为零,故上式的 M_{Oz} 为作用于刚体绕 Oz 轴的主动力矩。如果定义刚体的转角 φ 为刚体转动的位形坐标,由上式可得定轴转动刚体关于坐标 φ 的动力学方程:

$$J_{Oz}\ddot{\varphi}=M_{Oz} \qquad (5.1-4)$$

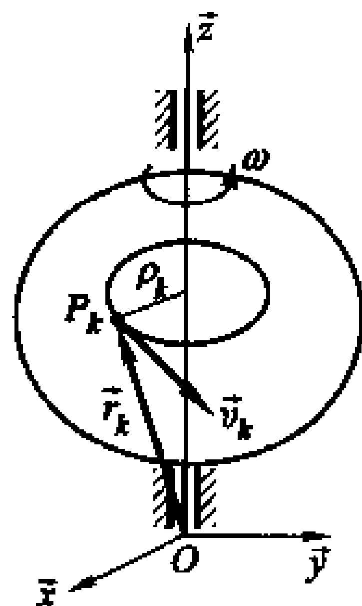
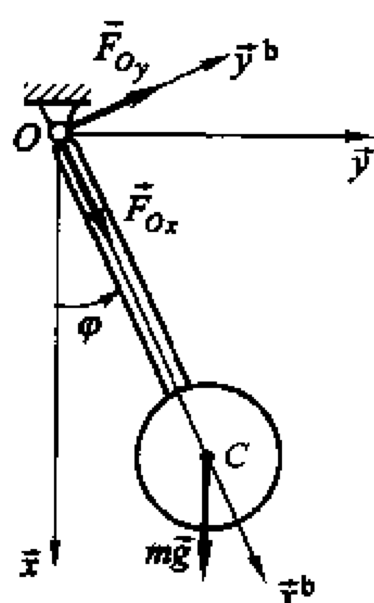


图 5-1 刚体定轴转动

[例 5.1-1] 图示为一复摆,绕通过 O 点的水平轴转动。设摆的质心 C 到点 O 的距离为 b,摆的质量为 m,摆绕转动轴的转动惯量为 J_O。试建立该复摆的动力学方程,并计算在微小摆动情况下的周期。

解: 建立摆的连体基 $\underline{e}^b$ 与公共基 $\underline{e}$ 如图所示。刚体的位形坐标取为 φ。起点为刚体的平衡位置。

分析作用于刚体的主动力。如果转动轴 O 为一理想约束,设定约束力 $\vec{F}_{Ox}$ 与 $\vec{F}_{Oy}$ 如图所示,约束力对轴 O 的矩为零。另一个主动力为重力,它对轴 O 的矩为 $M_O=-mgb\sin\varphi$。代入式(5.1-4),得到复摆的动力学方程为



例 5.1-1 图

$$J_O\ddot{\varphi}=-mgb\sin\varphi$$

或

$$\ddot{\varphi}+\frac{mgb}{J_O}\sin\varphi=0$$

摆作微小摆动,令 $\sin\varphi\approx\varphi$,上式简化为

$$\ddot{\varphi}+\frac{mgb}{J_O}\varphi=0$$

得到复摆作微小摆动的周期为

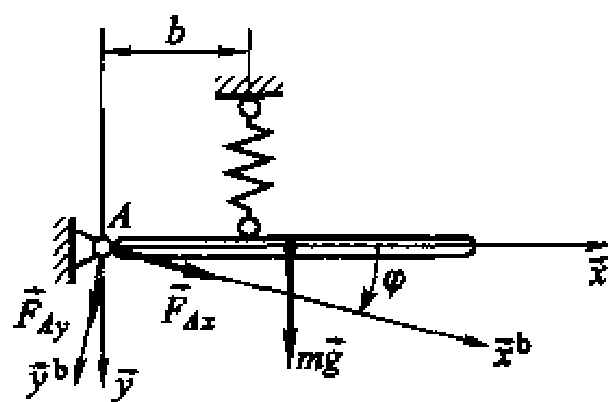
$$T=2\pi\sqrt{J_O/mgb}$$

与一摆长为 l 的单摆的周期 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 比较,可得到同周期复摆的等效单摆的摆长为 $l=J_O/mb$。

[例 5.1-2] 图示为一长为 l,质量为 m 的均质杆。A 端为理想约束铰与机座连接,在距离铰 A 为 b 处有一刚度系数为 k 的线弹簧。平衡时杆处在水平位置。求杆微小振动时的周期。

解: 考虑到杆在水平平衡位置时杆上所有主动力对点 A 的力矩为零。令线弹簧此时的伸长为 r_0,弹簧力为 kr_0。有

$$-kr_0b+mgl/2=0$$



例5.1－2图

当杆转过角 φ，当此角为小角时，线弹簧的伸长为 $r_0+b\varphi$。考虑到上式，杆上所有主动力对点 A 的主矩为

$$M_A=-k(r_0+b\varphi)b+mgl\cos\varphi/2=-kb^2\varphi$$

上式用到了 $\cos\varphi\approx1$。由式(5.1－4)，此杆的动力学方程为 $J_A\ddot{\varphi}=-kb^2\varphi$，或

$$J_A\ddot{\varphi}+kb^2\varphi=0$$

杆的振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{J_A/kb^2}$$

对于均质杆，$J_A=ml^2/3$，代入上式有周期为 $T=2\pi l\sqrt{m/3kb^2}$。

5.2　平面运动动力学方程

5.2.1　刚体平面运动的动力学条件

刚体在 Oxy 平面运动为刚体一般运动的特殊情况，其一没有 Oz 方向的运动，其二没有绕 Ox 与 Oy 方向的转动。由刚体的质心运动定理式(4.3－10)，刚体主动力的主矢在 Oz 方向的坐标应为零。由刚体动量矩定理式(4.4－10′)，刚体的主动力对质心的主矩在 Ox 与 Oy 方向的坐标也应为零。因此作平面运动的刚体，作用在刚体的主动力对质心简化必须是一在 Oxy 平面上的平面力系。并且刚体运动的初始状态应在 Oxy 平面内。

需要注意的是仅有上述条件还不够，刚体的平面运动的实现还与刚体的质量分布有关。

考虑图5－2a所示一杠铃，不计连接部分的质量，两端视为两集中质量，质量分别为 m，相距 Oz 轴均为 l。根据定义式(4.2－2)与(4.2－4)，其转动惯量为 $J_{Ox}=0,J_{Oy}=2ml^2,J_{Oz}=2ml^2$。惯性积为 $J_{Oyz}=0,J_{Oxz}=0,J_{Oxy}=0$。可见，$Oz$ 轴为刚体的主轴。如果绕 Oz 轴有一力矩 M，假定刚体的运动为绕 Oz 轴以角速度 ω 旋转。由定义式(4.4－2)，刚体对点 O 的动量矩为 $\vec{L}_O=2m\omega l^2\vec{z}$。动量矩矢量在连体基的三个坐标分别为 $L'_{Ox}=0,L'_{Oy}=0,L'_{Oz}=2m\omega l^2$。代入方程(4.4－14′)，只有一项非零，即

$$\dot{L}'_{Oz}+\omega'_xL'_{Oy}-\omega'_yL'_{Ox}=2ml^2\dot{\omega}=M$$

它给出了定轴转动的角加速度与力矩间的关系。

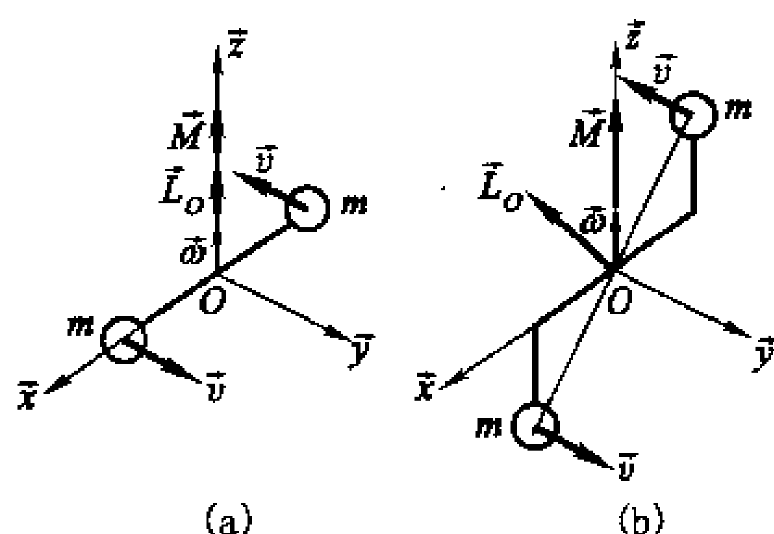


图 5-2 平面运动的条件

再考虑图 5.2-1b 所示一杠铃，两集中质量的质量分别仍为 m，相距 Oz 轴与 Ox 轴均为 l。其转动惯量为 $J_{Ox}=2ml^2$，$J_{Oy}=\sqrt{2}ml^2$，$J_{Oz}=2ml^2$。惯性积为 $J_{Oyz}=0$，$J_{Oxz}=2ml^2$，$J_{Oxy}=0$。可见，Oz 轴不是刚体的主轴。同样如果绕 Oz 轴有一力矩 M，假定刚体的运动仍为绕 Oz 轴以角速度 ω 旋转。由定义式(4.4-2)，刚体对点 O 的动量矩为 $\vec{L}_O=2m\omega l^2\vec{x}+2m\omega l^2\vec{z}$。即动量矩矢量在连体基的三个坐标分别为 $L'_{Ox}=2m\omega l^2$，$L'_{Oy}=0$，$L'_{Oz}=2m\omega l^2$。代入方程(4.4-14′)有

$$\dot{L}'_{Ox}+\omega'_yL'_{Oz}-\omega'_zL'_{Oy}=2ml^2\dot{\omega}=0$$

$$\dot{L}'_{Oy}+\omega'_zL'_{Ox}-\omega'_xL'_{Oz}=2ml^2\omega^2=0$$

$$\dot{L}'_{Oz}-\omega'_xL'_{Oy}-\omega'_yL'_{Ox}=2ml^2\dot{\omega}=M$$

由上面三式分别可得 $\dot{\omega}=0$，$\omega=0$ 与 $\dot{\omega}\neq0$。这些矛盾结论说明，在绕 Oz 轴的力矩 M 作用下，刚体将不可能绕 Oz 轴作定轴转动。

从以上分析可知，尽管两种情况中系统对 Oz 轴的转动惯量相等，同样加上一个符合平面运动条件的力矩，其运动的响应是不同的。对于轴 Oz 为主轴的情况，刚体作平面运动。如果轴 Oz 为非主轴，尽管力系为平面的，但刚体将作空间运动。因此，刚体作平面运动需增加一刚体的惯量条件，即刚体运动平面的法线方向应为刚体的一主轴。以后将满足作平面运动条件的刚体称为**平面刚体**。

5.2.2 动力学方程

如图 5-3 所示，在刚体的运动平面上的定点 O 建立一惯性基 $\vec{e}=(\vec{x}\quad \vec{y})^{\mathrm{T}}$。考虑满足上节所述条件的一平面刚体，在其的质心 C 上作连体基 $\vec{e}^b=(\vec{x}^b\quad \vec{y}^b)^{\mathrm{T}}$。令质心 C 关于 O 的矢径为 $\vec{r}$。由质点系的质心运动定律式(4.3-10)，有

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\mathrm{R}} \qquad (5.2-1)$$

式中：m 为刚体的质量；$\vec{F}_{\mathrm{R}}$ 为作用于刚体外力的主矢。此式描述了刚体质心运动定律，即刚体质量与质心加速度矢量的乘积等于外力系的主矢。此方程在参考基 $\vec{e}$ 的坐标阵为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \qquad (5.2-2)$$

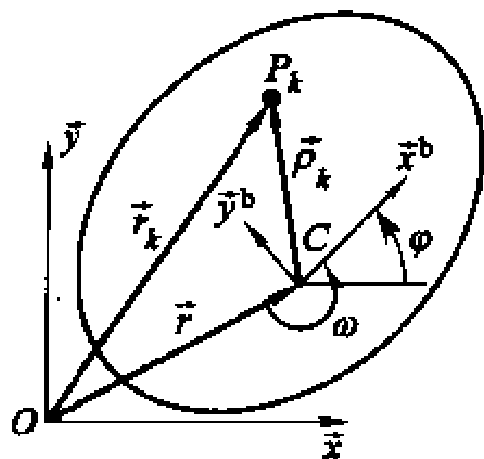


图 5-3　作平面运动的刚体

考虑刚体上质点 P_k，令其质量为 m_k。如果刚体的角速度矢量为 $\vec{\omega} = \omega\vec{z}$，则该点的矢径 $\vec{\rho}$ 对时间的导数为

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

将其代入式(4.4-7)，考虑到式(4.4-8)，(1.2-13)与(4.4-4)，刚体关于其质心的动量矩为

$$\vec{L}_C = \vec{L}'_C = \sum_k m_k \vec{\rho}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) = \left(\sum_k m_k \vec{\rho}_k \cdot \vec{\rho}_k\right)\vec{\omega} \qquad (5.2-3)$$

记刚体过质心 C 垂直与运动平面轴的转动惯量为 J_C，由定义(4.2-8)，有

$$J_C = \sum_k m_k \vec{\rho}_k \cdot \vec{\rho}_k = \sum_k m_k \rho_k^2 \qquad (5.2-4)$$

将其代入式(5.2-3)，得到平面运动刚体相对于质心 C 的动量矩矢量为

$$\vec{L}_C = \vec{L}'_C = J_C\vec{\omega} = J_C\omega\vec{z} \qquad (5.2-5)$$

令作用于刚体外力相对于质心 C 的主矩为 $\vec{M}_C = M_C\vec{z}$，考虑到上式，平面运动刚体的动量矩定理式(4.4-14)可表示为如下一个标量式：

$$J_C\dot{\omega} = M_C \qquad (5.2-6)$$

或

$$J_C\ddot{\varphi} = M_C \qquad (5.2-7)$$

微分方程式(5.2-3)与(5.2-7)构成平面运动刚体的动力学方程组。作用于刚体的外力中理想约束力通常是未知的，将它们从外力中分离出来。把它们的主矢与主矩记为 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{n}} = (F_x^{\mathrm{n}} \quad F_y^{\mathrm{n}})^{\mathrm{T}}$ 与 M_C^{n}，其余部分称为主动力，其主矢与主矩记为 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{a}} = (F_x^{\mathrm{a}} \quad F_y^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}$ 与 M_C^{a}。这样平面运动刚体的动力学方程可表示为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{n}} \qquad (5.2-8)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = M_C^{\mathrm{a}} + M_C^{\mathrm{n}} \qquad (5.2-9)$$

这三个微分方程可合并写成矩阵形式，即

$$\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}} = \hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}} + \hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}} \qquad (5.2-10)$$

其中，

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_C \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}=\begin{pmatrix} F_x^{\mathrm{a}} \\ F_y^{\mathrm{a}} \\ M_C^{\mathrm{a}} \end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}}=\begin{pmatrix} F_x^{\mathrm{n}} \\ F_y^{\mathrm{n}} \\ M_C^{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \tag{5.2-11}$$

$\boldsymbol{q}$ 为刚体的位形坐标阵；称 $\boldsymbol{Z}$ 为刚体的**增广质量阵**，$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}$ 为**增广主动力阵**与 $\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}}$ 为**增广理想约束力阵**。

考虑有 N 个刚体组成的刚体系。对于刚体 $\mathrm{B}_i(i=1,\cdots,N)$，割断与邻接刚体的铰，引入理想约束力，由式(5.2-10)，刚体 B_i 的动力学方程为

$$\boldsymbol{Z}_i\ddot{\boldsymbol{q}}_i=\hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{a}}+\hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{n}} \qquad (i=1,\cdots,N) \tag{5.2-12}$$

式中，

$$\boldsymbol{Z}_i=\begin{pmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ci} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_i=\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \varphi_i \end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{a}}=\begin{pmatrix} F_{ix}^{\mathrm{a}} \\ F_{iy}^{\mathrm{a}} \\ M_{Ci}^{\mathrm{a}} \end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{n}}=\begin{pmatrix} F_{ix}^{\mathrm{n}} \\ F_{iy}^{\mathrm{n}} \\ M_{Ci}^{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \tag{5.2-13}$$

它们分别为刚体 B_i 的增广质量阵、位形坐标阵、增广主动力阵与增广理想约束力阵。可将 N 个方程组集在一起，写成矩阵形式，即

$$\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}}=\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}+\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}} \tag{5.2-14}$$

式中，

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{Z}_N \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_N \end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}=\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}_1^{\mathrm{a}} \\ \hat{\boldsymbol{F}}_2^{\mathrm{a}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{F}}_N^{\mathrm{a}} \end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}}=\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}_1^{\mathrm{n}} \\ \hat{\boldsymbol{F}}_2^{\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{F}}_N^{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \tag{5.2-15}$$

5.2.3 处理动力学问题的一般方法

利用式(5.2-10)三个微分方程可解决平面运动单刚体的动力学基本问题，即动力学正问题、动力学逆问题与动力学正逆混合问题。方程中含刚体的位形坐标、作用于刚体的主动力与理想约束力，在解决单刚体动力学基本问题的过程中，未知量个数不能超过 3。对于动力学正问题，上述方程中描述运动学量为刚体的位形坐标，共有 3 个变量是未知的。通常，理想约束力也是未知的，故在处理动力学正问题时必须增加条件，它们是刚体的运动学约束方程。对于动力学逆问题，上述方程描述了运动为已知的条件下寻找主动力与理想约束力之间的关系，当未知的变量超过 3 时，也需增加运动学约束方程。如果存在未知的非理想约束力，还需增加一些描述非理想约束力关系式。如对于动摩擦力，需用到式(4.1-31)。

下面通过一些例子说明处理单刚体动力学问题的过程。

[**例 5.2-1**] 如图所示,均质杆 AB 长为 l、质量为 m,在铅垂平面内运动。A 端与 B 端可分别沿水平面与铅垂壁作无摩擦的滑动。

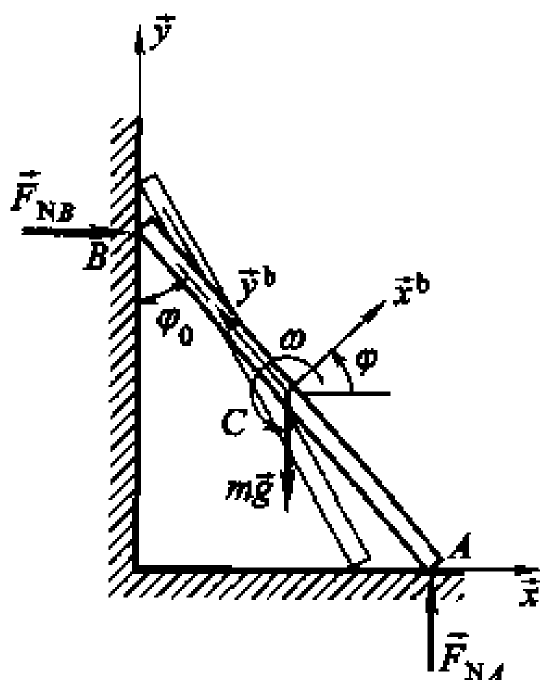
(a) 试建立杆的动力学方程;

(b) 当初始为静止状态,初始角为 φ_0,计算当杆下滑到角 φ 位置瞬时的角速度 ω;

(c) 计算该瞬时的约束力;

(d) 计算当杆与铅垂壁脱离时的角 φ_1 及此瞬时杆的角速度与质心 C 的水平运动速度。

解: (a)如图所示,在质心 C 建立杆的连体基 $\vec{e}^b$,在 O 点建立参考基 $\vec{e}$。该杆关于质心 C 的转动惯量为 $J_C = ml^2/12$。



例 5.2-1 图

根据已知条件,对杆 AB 受到的主动力为重力 $m\vec{g}$、理想约束力为 $\vec{F}_{NA}$ 与 $\vec{F}_{NB}$,方向如图所示。由式(5.2-8),列出该方程在惯性基上的标量方程为

$$m\ddot{x} = F_{NB} \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = F_{NA} - mg \tag{2}$$

其中 x 与 y 为杆的质心坐标。由式(5.2-9),可得方程为

$$\frac{ml^2}{2}\ddot{\varphi} = F_{NA}\frac{l}{2}\sin\varphi - F_{NB}\frac{l}{2}\cos\varphi \tag{3}$$

方程(1)~(3)的变量为杆的位形坐标 $\boldsymbol{q} = (x \quad y \quad \varphi)^T$ 和约束力 F_{NA} 与 F_{NB}。5 个变量 3 个方程,方程不封闭。考虑到杆 AB 在运动过程中位形坐标间有如下两个约束方程

$$x = \frac{l}{2}\sin\varphi,\ y = \frac{l}{2}\cos\varphi \tag{4}$$

对约束方程求二阶导数,有

$$\ddot{x} = \frac{l}{2}\cos\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2 \tag{5}$$

$$\ddot{y} = -\frac{l}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2 \tag{6}$$

这样式(1)~(3)与式(5)~(6)构成杆 AB 封闭的动力学方程。

(b) 例 4.5-1 已用动能定理求得杆 AB 的角速度。下面直接利用动力学方程求此角速度。

从式(2)与(1)中解出 F_{NA} 与 F_{NB},代入式(3),再将式(5)与(6)代入,消去 $\ddot{x}$

与$\ddot{y}$,可得到方位角一个变量的动力学方程

$$\ddot{\varphi}-\frac{3g}{2l}\sin\varphi=0 \tag{7}$$

考虑到$\ddot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$,利用分离变量法解上述的常微分方程。杆的初始角为$\varphi_0$,角速度为零;运动到$\varphi$,角速度为$\omega$。有

$$\int_0^{\omega}\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{3g}{2l}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

得到角速度为

$$\omega=\dot{\varphi}=\sqrt{3g(\cos\varphi_0-\cos\varphi)/l} \tag{8}$$

结果与例4.5-1的一致,显然用动能定理的解法比较方便。

(c) 将式(7)的$\ddot{\varphi}$和式(8)的$\dot{\varphi}$分别代入式(5)与(6),将它们再分别代入式(1)与(2),有约束力

$$F_{NB}=\frac{3mg}{4}\sin\varphi(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)$$

$$F_{NA}=m\ddot{y}+mg=mg\left[1-\frac{3}{4}\sin^2\varphi-\frac{3}{2}\cos\varphi(\cos\varphi_0-\cos\varphi)\right]$$

(d) 杆AB离开铅垂壁瞬时,$F_{NB}=0$,由式(1)有$\ddot{x}=0$。其中$\ddot{x}$的表达式可将式(7)与(8)代入式(5)得到,故有

$$\ddot{x}=\frac{3g}{4}\cos\varphi\sin\varphi-\frac{3g}{2}\sin\varphi(\cos\varphi_0-\cos\varphi)=0$$

由此可解得杆AB离开铅垂壁瞬时的角φ_1:

$$\varphi_1=\arccos\left(\frac{2}{3}\cos\varphi_0\right) \tag{9}$$

将其代入式(8),得到杆AB离开铅垂壁瞬时的角速度为ω_1为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}\cos\varphi_0} \tag{10}$$

由式(4)的第一式对时间求导,再将以上两式代入,即得到杆AB离开铅垂壁瞬时质心C的速度

$$\dot{x}_1=\frac{l}{2}\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1=\frac{1}{3}\cos\varphi_0\sqrt{gl\cos\varphi_0}$$

[例5.2-2] 如图所示一均质圆柱质量为m,半径为r,无初速地放在倾斜角为θ的斜面上,不计滚动摩擦力,考虑滑动摩擦力。试讨论圆柱运动的情况。

解:建立如图所示在点O处的惯性基$\vec{e}$,在圆柱质心C建立连体基$\vec{e}^b$,初始

时点 C 与 O 重合。根据圆柱与斜面接触处的光滑程度的不同,它们之间的滑动摩擦力的情况会不同,下面分三种情况进行讨论。

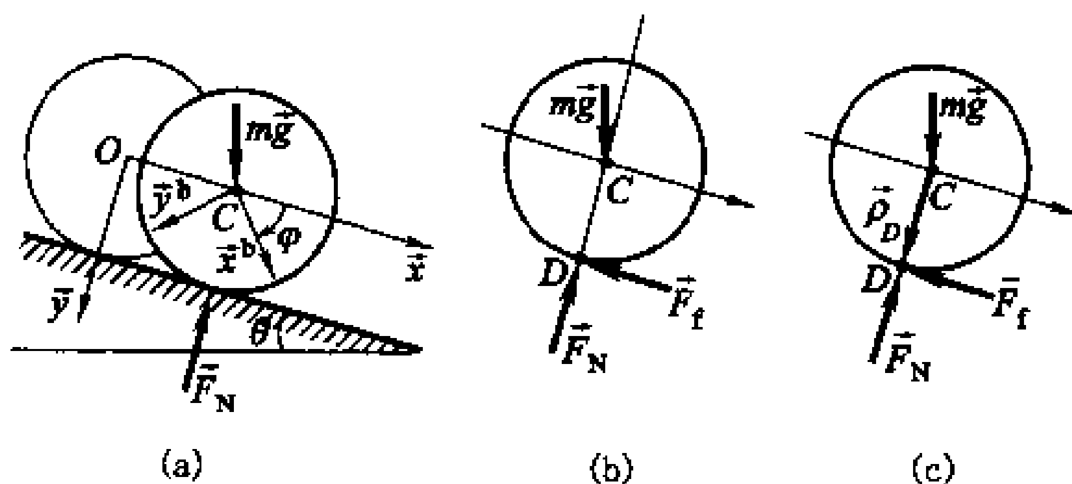
(a) 接触处为理想光滑的情况。圆杆的受力状态如本例图 a 所示,只有主动力重力 $m\vec{g}$,理想约束力 $\vec{F}_N$。由式(5.2-8),列出该方程在惯性基的标量方程为

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = mg\cos\theta - F_N \tag{2}$$

其中 x 与 y 为杆的质心坐标。圆柱关于质心 C 的转动惯量为 $J_C = mr^2/2$,由式(5.2-9),可得方程为

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = 0 \tag{3}$$



例 5.2-2 图

此方程组需引入约束条件即 $y\equiv0$。代入式(2)可得到约束力

$$F_N = mg\cos\theta \tag{4}$$

考虑到圆柱初始为静止状态,由式(3)可得 $\varphi\equiv0$。由式(1)得质心位置 $x = (gt^2\sin\theta)/2$。上述的解表示圆柱以加速度 $g\sin\theta$ 沿斜面平移下滑。

(b) 接触处为相当粗糙的情况,即有足够大的摩擦力阻止圆柱相对滑动。圆柱的受力状态如图(b)所示。理想约束力有2个,即 $\vec{F}_N$ 与 $\vec{F}_f$。由式(5.2-8)与(5.2-9)列出动力学方程为

$$m\ddot{x} = mg\sin\varphi - F_f \tag{5}$$

$$0 = m\ddot{y} = mg\cos\theta - F_N \tag{6}$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = F_f r \tag{7}$$

两个方程(5)与(7)中有3个变量即 x,φ 与 F_f,需增加1个约束条件。考虑到纯滚动,有约束条件 $x = r\varphi$。求二阶导数,有

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi}$$

将方程(7)乘 r 再与式(5)相加消去 F_f。然后考虑到上式消去 φ,有

$$\ddot{x}=(2g\sin\theta)/3 \tag{8}$$

表示圆柱沿斜面作无滑动滚动，质心沿斜面的加速度为$(2g\sin\theta)/3$。

将式(8)代入式(5)可得到摩擦力 $F_f=(mg\sin\theta)/3$。此外由式(6)可得正压力，它仍为(4)。由 4.1.7 知，极限库仑摩擦力 $F_m=fF_N$，其中 f 为摩擦因数。将式(4)代入有 $F_m=fmg\cos\theta$。考虑到发生纯滚动的条件为 $F_m\geqslant F_f$，可得摩擦因数 f 应满足如下条件

$$f\geqslant\tan\theta/3$$

(c) 当斜面与圆柱的摩擦因数 $f<\tan\theta/3$ 时，圆柱在斜面上将发生既有滑动又有滚动的情况。圆柱的受力的情况如图 c，此时

$$F=F_m=fN\mathrm{sgn}\ v_D,\quad \mathrm{sgn}\ v_D=\begin{cases}1 & 当\ v_D>0\\ -1 & 当\ v_D<0\end{cases}$$

式中 $\vec{v}_D$ 为接触点 D 处圆柱相对与斜面的速度。考虑到斜面不动，$\vec{v}_D$ 即为圆柱上点 D 的速度。由 2.4 节知，$\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{v}+\tilde{I}\rho_D\dot{\varphi}$，即

$$\begin{pmatrix}v_D\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\r\end{pmatrix}\dot{\varphi}$$

有

$$v_D=\dot{x}-r\dot{\varphi} \tag{9}$$

由式(5.2－8)与(5.2－9)列出动力学方程为

$$m\ddot{x}=mg\sin\theta-fF_N\mathrm{sgn}\ v_D \tag{10}$$

$$0=m\ddot{y}=mg\cos\theta-F_N \tag{11}$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi}=fF_N r\,\mathrm{sgn}\ v_D \tag{12}$$

由式(11)可得到 F_N 的值仍为式(4)，代入式(10)与式(12)，有

$$\ddot{x}=g\sin\theta-fg\cos\theta\mathrm{sgn}\ v_D \tag{13}$$

$$\ddot{\varphi}=2fg\cos\theta\mathrm{sgn}\ v_D/r \tag{14}$$

将式(9)代入，上面两式构成封闭的动力学方程，可解出圆柱又滑又滚的时间历程 $x(t)$ 与 $\varphi(t)$。

从上面的两个例子可以看到这样的普遍规律，即处理动力学正问题时，动力学方程的个数与刚体位形坐标的个数相同，有多少未知的约束力需增加多少个加速度约束方程与原方程一起构成了封闭的动力学方程组。

对于多个刚体作平面运动的系统，可以系统的每一个刚体为单元，定义它们的位形坐标，建立动力学方程(5.2－14)。系统的位形坐标与动力学方程是它们的组集。位形坐标与方程的个数均为 $3N$。同样有多少未知的理想约束力需增加多少个加速度约束方程。

需要指出的是对于单刚体约束通常是相对于惯性基的。对于刚体系除了上述的约束外还有刚体间的约束。这些约束的加速度约束方程可以由约束方程求二阶导数得到(例5.2－1与例5.2－2)。如果能利用2.5节介绍的动点为共点条件,直接写出刚体间位形的加速度约束关系,或速度约束关系求一阶导数,这将带来很多方便。

请看下面的例子。

[例5.2－3]　考虑上例中斜面可动的情况。如图所示,斜面的质量为 m_1,对质心的转动惯量为 J_1,它可在一光滑地面上滑动。均质圆柱质量为 m_2,半径为 r,无初速地放在倾斜角为 θ 的斜面上,在斜面上作无滑动的滚动。试建立斜面－圆柱系统运动的动力学方程;且求圆柱与斜面间的摩擦力与理想约束力。

解: 图a为系统的初始状态。过定点 O 建立惯性基 $\vec{e}$。令斜面为 B_1。初始时 B_1 的质心 C_1 与点 O 重合。过 C_1 建立 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$,其基矢量 $\vec{x}^1$ 与斜面平行,基矢量 $\vec{y}^1$ 与斜面垂直。基 $\vec{e}^1$ 相对于 $\vec{e}$ 的方向余弦阵为$\boldsymbol{A}^1$。B_1 的位形坐标为 $\boldsymbol{q}_1=(x_1\quad y_1\quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$。定义 $\vec{d}_1$ 为斜面的单位矢量,它在基 $\vec{e}^1$ 与 $\vec{e}$ 上的坐标阵分别为

$$\boldsymbol{d}'_1=(1\quad 0)^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{d}_1=\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{d}'_1=(\cos\varphi_1\quad \sin\varphi_1)^{\mathrm{T}}\tag{1}$$

令圆柱为 B_2。初始时 B_2 的质心 C_2 在基矢量 $\vec{y}^1$ 上,圆柱与斜面的接触点为 Q,令点 C_1 与 Q 间的距离为 l,则矢径 $\vec{\rho}_1^Q$ 在基 $\vec{e}^1$ 的坐标为

$$\boldsymbol{\rho}'^Q_1=(0\quad -l)^{\mathrm{T}}\tag{2}$$

它是常值阵。过点 C_2 建立 B_2 的连体基 $\vec{e}^2$,其基矢量 $\vec{x}^2$ 与斜面平行,基矢量 $\vec{y}^2$ 与斜面垂直。B_2 的位形坐标为 $\boldsymbol{q}_2=(x_2\quad y_2\quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$

图b为两刚体运动的某瞬时,斜面滑动偏离点 O,圆柱无滑动滚动到点 D。距离 $QD=r(\varphi_2-\varphi_1)$。接触点 D 在斜面连体基 $\vec{e}^1$ 的坐标为 $\boldsymbol{\rho}'^D_1=(x'_D\quad y'_D)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\rho}'^Q_1+r(\varphi_2-\varphi_1)\boldsymbol{d}'_1$,将式(1)与(2)代入,有

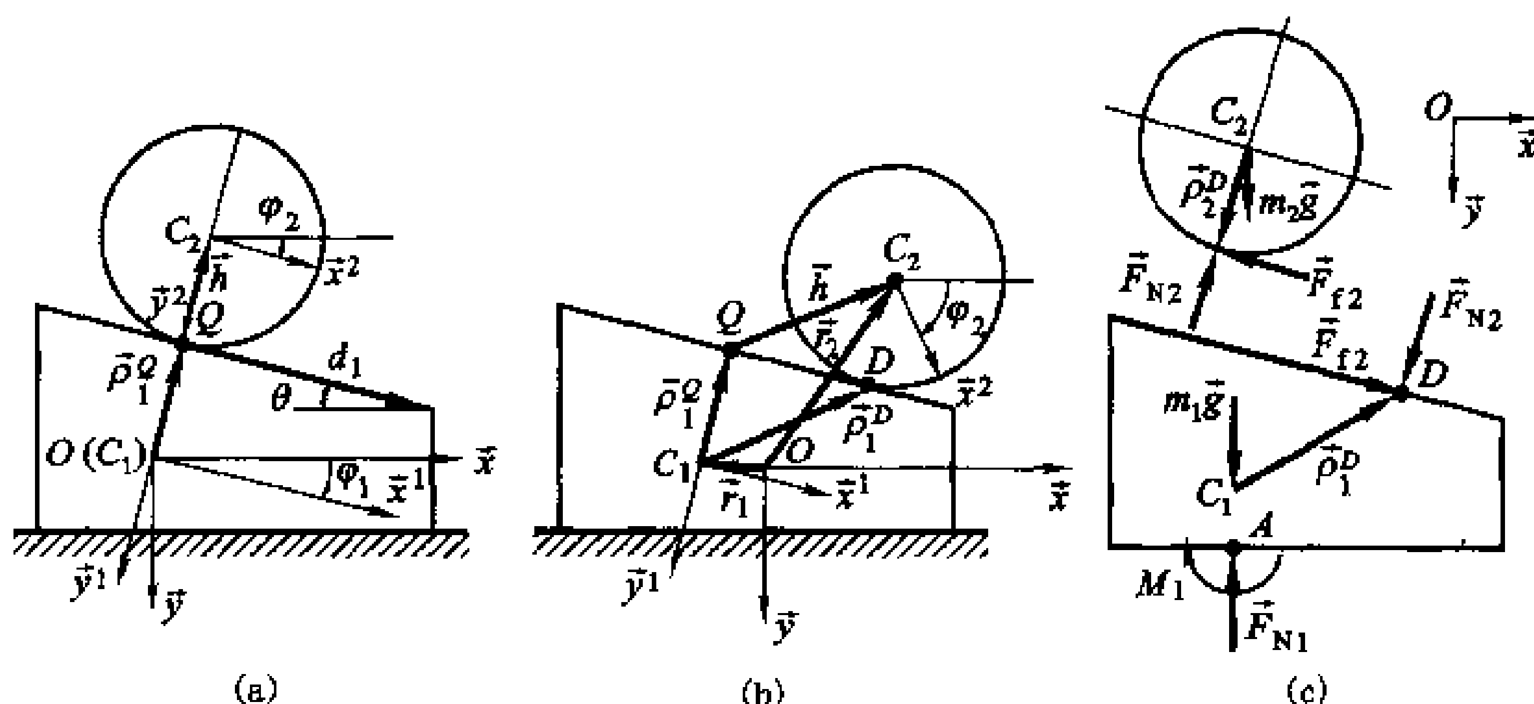
$$x'_D=r(\varphi_2-\varphi_1),\quad y'_D=-l\tag{3}$$

对于斜面 B_1,其受力情况如图c所示。令点 A 为斜面底边上的一点,且 AC_1 垂直于地面。由于地面无摩擦,地面对斜面的理想约束力向点 A 简化的主矢为 $\vec{F}_{N1}$,主矩为 M_1。由式(5.2－8)与(5.2－9),考虑到式(3),斜面的动力学方程为

$$m_1\ddot{x}_1=-F_{N2}\sin\theta+F_{f2}\cos\theta\tag{4}$$

$$m_1\ddot{y}_1=-F_{N1}+m_1g+F_{N2}\cos\theta+F_{f2}\sin\theta\tag{5}$$

$$J_1\ddot{\varphi}_1=M_1-F_{f2}l+F_{N2}r(\varphi_2-\varphi_1)\tag{6}$$



例 5.2－3 图

对于圆柱 B_2，其受力情况如图 c 所示。由式(5.2－8)与(5.2－9)，圆柱的动力学方程有

$$m_2\ddot{x}_2 = F_{N2}\sin\theta - F_{f2}\cos\theta \tag{7}$$

$$m_2\ddot{y}_2 = m_2 g - F_{N2}\cos\theta - F_{f2}\sin\theta \tag{8}$$

$$\frac{m_2 r^2}{2}\ddot{\varphi}_2 = F_{f2} r \tag{9}$$

共有 6 个方程，其中位形变量 6 个，理想约束力 $F_{N1}, M_1, F_{f2}, F_{N2}$ 等 4 个，需要 4 个加速度约束方程。

方法 1：由约束方程出发，建立加速度约束方程。

首先考虑到斜面只有 x 方向的运动，故有两个绝对约束，约束方程为

$$\Phi_1 = \varphi_1 - \theta = 0,\quad \Phi_2 = y_1 = 0 \tag{10}$$

其次考虑到圆柱与斜面作纯滚动(相当于齿轮约束)。如图 b 所示，$\vec{h} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 - \vec{\rho}_1^Q$，考虑到式(2)，它在基 $\vec{e}$ 的坐标为

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{A}^1\boldsymbol{\rho}'^Q_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 - l\sin\varphi_1 \\ y_2 - y_1 + l\cos\varphi_1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

根据图示的约束，矢量 $\vec{h}$ 在斜面上的投影为 $QD = r(\varphi_2 - \varphi_1)$。考虑到上式，有约束方程

$$\Phi_3 = \vec{d}_1\cdot\vec{h} - r(\varphi_2 - \varphi_1) = \boldsymbol{d}_1^T\boldsymbol{h} - r(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

此外，在垂直于斜面法线方向的投影为圆柱的半径 r，即有

$$\Phi_4 = (\vec{d}_1\times\vec{z})\cdot\vec{h} - r = -(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{d}_1)^T\boldsymbol{h} - r = 0$$

将式(1)与(11)代入以上两式，有

$$\Phi_3 = (x_2 - x_1)\cos\varphi_1 + (y_2 - y_1)\sin\varphi_1 - r(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \tag{12}$$

$$\Phi_4=(x_2-x_1)\sin\varphi_1-(y_2-y_1)\cos\varphi_1-l-r=0 \tag{13}$$

约束方程(10),(12)与(13)为系统的约束方程。

将约束方程(10)对时间求一、二阶导数,得到它们的速度与加速度约束方程,即

$$\dot{\Phi}_1=\dot{\varphi}_1=0,\quad \dot{\Phi}_2=\dot{y}_1=0 \tag{14}$$

$$\ddot{\Phi}_1=\ddot{\varphi}_1=0,\quad \ddot{\Phi}_2=\ddot{y}_1=0 \tag{15}$$

将约束方程(12)与(13)对时间求导,考虑到式(10),(12)~(15),得速度约束方程为

$$\dot{\Phi}_3=(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\cos\varphi_1+(\dot{y}_2-\dot{y}_1)\sin\varphi_1-r\dot{\varphi}_2-l\dot{\varphi}_1=0 \tag{16}$$

$$\dot{\Phi}_4=(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\sin\varphi_1-(\dot{y}_2-\dot{y}_1)\cos\varphi_1+r(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1=0 \tag{17}$$

或将式(10)与(14)代入,速度约束方程可简化为

$$\dot{\Phi}_3=(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\cos\theta+\dot{y}_2\sin\theta-r\dot{\varphi}_2=0 \tag{18}$$

$$\dot{\Phi}_4=(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\sin\theta-\dot{y}_2\cos\theta=0 \tag{19}$$

将式(18)与(19)对时间求导,得到加速度约束方程为

$$\ddot{\Phi}_3=(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)\cos\theta+\ddot{y}_2\sin\theta-r\ddot{\varphi}_2=0 \tag{20}$$

$$\ddot{\Phi}_4=(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)\sin\theta-\ddot{y}_2\cos\theta=0 \tag{21}$$

这样式(4)~(9)、式(15)、式(20)与(21)构成系统封闭的运动微分方程组。

方法2:由速度约束关系出发,建立加速度约束方程。

考虑到系统在运动过程中,由已知条件,某瞬时在接触点 D 圆柱与斜面间无相对运动。在斜面上考察点 D,斜面作平移,点 D 的速度即为质心 C_1 的速度,考虑到式(14)有

$$\boldsymbol{v}_D=(\dot{x}_1\quad 0)^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

在圆柱上考察点 D,点 D 为作平面运动圆柱上的一点,它关于质心 C_2 的矢径为 $\vec{\rho}_2^D$,其垂直于矢量 $\vec{d}_1$。考虑到式(1)与(10),由式(1.4-8),矢径 $\vec{\rho}_2^D$ 在惯性基 $\vec{e}$ 上的坐标阵为 $\boldsymbol{\rho}_2^D=r\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{d}_1=r(-\sin\theta\quad\cos\theta)^{\mathrm{T}}$。由式(2.2-34),点 D 的速度在惯性基上的坐标阵为

$$\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{v}_2+\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}_2^D\dot{\varphi}_2=\begin{pmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}+r\dot{\varphi}_2\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix} \tag{23}$$

由式(22)与(23),得到两刚体的速度约束关系为

$$\dot{x}_2-r\dot{\varphi}_2\cos\theta-\dot{x}_1=0$$

$$\dot{y}_2-r\dot{\varphi}_2\sin\theta=0$$

不难验证以上两式与式(18),(19)一致。将上面两个方程分别求一阶导数,可得到加速度约束方程

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 - r\ddot{\varphi}_2\cos\theta = 0 \tag{24}$$

$$\ddot{y}_2 - r\ddot{\varphi}_2\sin\theta = 0 \tag{25}$$

这样式(15),(24)与(25)构成系统的加速度约束方程。显然方法 2 比方法 1 简单些。

由式(4)与(5)可解得约束力

$$F_{N2} = m_2 g\cos\theta + m_2(\ddot{x}_2\sin\theta + \ddot{y}_2\cos\theta) \tag{26}$$

$$F_{f2} = m_2 g\sin\theta - m_2(\ddot{x}_2\cos\theta - \ddot{y}_2\sin\theta) \tag{27}$$

考虑到式(11),由式(2)

$$F_{N1} = m_1 g + m_2 g + m_2\ddot{y}_2 \tag{28}$$

5.2.4 处理动力学问题的独立坐标方法

上节介绍了利用刚体平面运动的动力学方程(5.2－14)解决动力学基本问题的一般方法。读者可以得出这样的规律：

(1) 动力学问题的求解规模与系统刚体的个数有关,如果刚体的个数为 N,系统的位形坐标为 $n=3N$,动力学方程的个数也为 n;

(2) 对于存在约束的系统,动力学方程中出现未知的理想约束力,如果它们个数为 s。对于动力学正问题,需要补充 s 个独立的加速度约束方程;

(3) 通过处理可以将 $n+s$ 个常微分方程缩并为不含未知理想约束力的动力学方程,方程个数与系统的自由度数 $\delta=n-s$ 相同。

对于已知主动力求系统的运动与理想约束力,或已知运动求主动力与理想约束力的关系的工程问题,可利用上节介绍的方法。如果在一个具体的动力学问题中对理想约束力不感兴趣,上节介绍的一般方法将显得相当繁锁。本节将要介绍的方法是利用描述系统位形的独立坐标直接建立系统动力学方程,方程中不出现约束反力,微分方程的个数与系统的自由度数 $\delta=n-s$ 相同。可见,处理微分方程的规模由 $n+s$ 减少到 $n-s$,工作量大大减小,特别是刚体个数比较多,自由度比较少的系统更为明显。至于要了解系统整个位形,问题归结为已知独立坐标求系统位形其他坐标的运动学问题,这在第 2 章与第 3 章中已经解决。

下面通过例子说明上述的方法

[例 5.2－4] 利用独立坐标方法解决建立例 5.2－1 中杆 AB 的动力学方程。

解：首先对系统进行运动学分析。系统的位形坐标为 3,有两个约束方程

$$x = \frac{l}{2}\sin\varphi,\quad y = \frac{l}{2}\cos\varphi \tag{1}$$

故系统有一个自由度,取独立坐标为 φ。与该独立坐标相关的动力学定理是动量矩定理。由例5.2-1图可知,如果取关于质心的动量矩定理,将出现理想约束力 $\vec{F}_{NA}$ 与 $\vec{F}_{NB}$。如果建立关于相对于瞬心 S 的动量矩定理,理想约束力将不出现(见例4.5-1图)。由例4.5-1知,杆 AB 关于瞬心 S 的转动惯量为 $J_{Sz}=ml^2/3$。重力关于瞬心 S 的力矩为 $M_S=(mg/\sin\varphi)/2$,由动量矩定理式(4.4-14),有

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}=\frac{mgl}{2}\sin\varphi$$

可得到关于独立坐标 φ 的动力学方程

$$\ddot{\varphi}-\frac{3g}{2l}\sin\varphi=0$$

与例5.2-1式(7)一致。在给定初始条件 $t=0,\varphi=\varphi_0,\dot{\varphi}=0$。那么如果由上式解得 $\ddot{\varphi}(t),\dot{\varphi}(t)$ 与 $\varphi(t)$,由约束方程(1)及其速度与加速度约束方程经运动学分析可得到 $\ddot{x}(t),\ddot{y}(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t),x(t)$ 与 $y(t)$。

[例5.2-5]　考虑例5.2-2中圆柱作无滑动滚动的情况。利用独立坐标方法试写出其动力学方程与圆柱下滑的加速度。

解: 如例5.2-2图a所示,建立惯性基与连体基。圆柱的位形坐标为 $\boldsymbol{q}=(x\quad y\quad \varphi)^T$。考虑到该圆柱在斜面上作无滑动滚动,有约束方程

$$y=0,\quad x=r\varphi \tag{1}$$

故圆柱有一个自由度。

圆柱受力情况如例5.2-2图b所示,为了在动力学方程中不出现约束力,考虑到接触点 D 为瞬心,圆柱作瞬时定轴转动。圆柱绕该点的转动惯量为 $J_{Dz}=J_{Cz}+mr^2=3ml^2/2$,主动力对点 D 的力矩为 $M_D=mgr\sin\varphi$。由动量矩定理式(4.4-14),有

$$\frac{3mr^2}{2}\ddot{\varphi}=mgr\sin\varphi$$

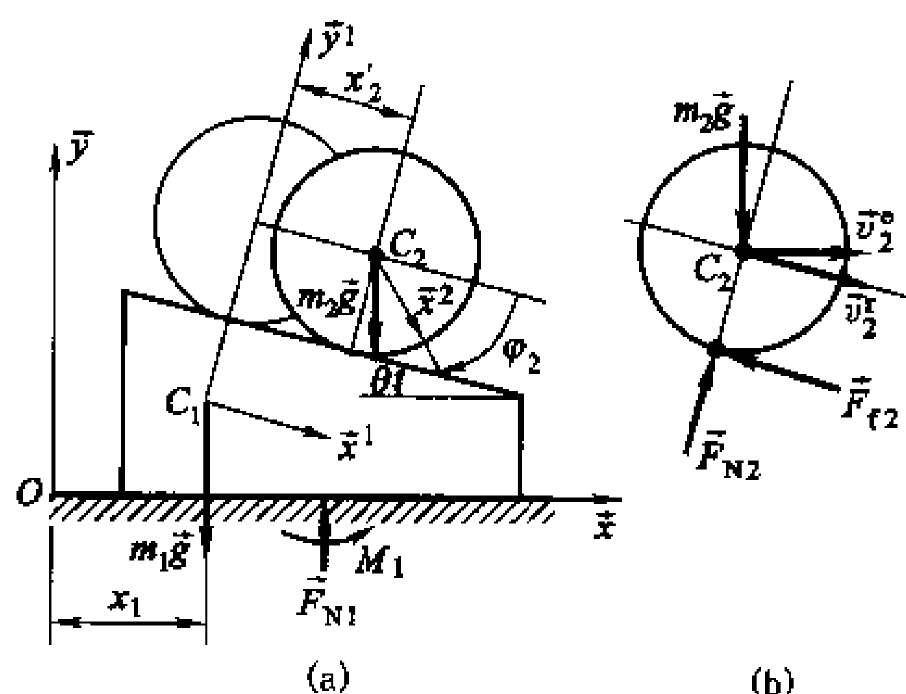
可得到关于独立坐标 φ 的动力学方程

$$\ddot{\varphi}-\frac{2g}{3r}\sin\varphi=0$$

将约束方程(1)的第二式求二阶导数,将上式代入,即得到质心下滑的加速度

$$\ddot{x}=r\ddot{\varphi}=\frac{2g}{3}\sin\varphi$$

[例5.2-6]　利用独立坐标方法解决例5.2-3的问题(1),且求斜面与圆



例 5.2-6 图

柱质心的加速度。

解： 首先对斜面－圆柱系统进行运动学分析。建立如图 a 的惯性基 $\vec{e}$，对于斜面 B_1 在质心 C_1 建立连体基 $\vec{e}^1$，如图所示基矢量 $\vec{x}^1$ 与斜面平行。B_1 的位形坐标为 $\boldsymbol{q}_1=(x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$。考虑到 B_1 在惯性基内作平移，有约束方程

$$y_1=\text{const}, \ \varphi_1=\text{const} \tag{1}$$

斜面 B_1 有一个自由度。对于圆柱 B_2，如果在惯性基上考察其运动，取三个笛卡尔位形坐标，它们均时变。如果在 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$ 上考察，不失一般性，令初始位置圆柱 B_2 质心的在基矢量 $\vec{y}^1$ 上，B_2 的连体基基矢量 $\vec{x}^2$ 与 $\vec{x}^1$ 平行。B_2 的位形由相对于 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$ 定义，即 $\boldsymbol{q}_2=(x'_2 \quad y'_2 \quad \varphi'_2)^{\mathrm{T}}$。其中 x'_2 与 y'_2 为质心 C_2 在基 $\vec{e}^1$ 上的坐标。这是圆柱 B_2 的拉格朗日位形坐标（见 3.1 节）。由于圆柱在斜面上作无滑动的滚动，有约束方程

$$y'_2=\text{const}, \ x'_2=r\varphi'_2 \tag{2}$$

圆柱相对于斜面有一个自由度。通过上述分析系统有 2 个自由度，现将系统的位形坐标定义为 $\boldsymbol{q}=(x_1 \quad x'_2)^{\mathrm{T}}$。

下面根据矢量力学的基本定理建立关于坐标 $\boldsymbol{q}$ 的动力学方程。对于 B_1，质心 C_1 的绝对速度为

$$\vec{v}_1=\dot{x}_1\vec{x}$$

B_2 的质心 C_2 对于 B_1 连体基 $\vec{e}^1$ 是动点，由式(2.5－6)，有

$$\vec{v}_2=\vec{v}_2^r+\vec{v}_2^e=\vec{v}_2^r+\vec{v}_1=\dot{x}_2\vec{x}^1+\dot{x}_1\vec{x}$$

该速度在基矢量 $\vec{x}$ 与 $\vec{x}^1$ 上的坐标分别为

$$v_{2x}=\dot{x}'_2\cos\theta+\dot{x}_1, \ v'_{2x}=\dot{x}'_2+\dot{x}_1\cos\theta$$

以系统为对象，刚体系质心运动定理式(4.3－13)在基矢量 $\vec{x}$ 的坐标式将

不出现理想约束力$\vec{F}_{N1}$与M_1，即

$$m_1\ddot{x}_1+m_2(\ddot{x}'_2\cos\theta+\ddot{x}_1)=0$$

或改写为

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}'_2\cos\theta=0 \tag{3}$$

以B_2为对象，写出质心运动定律在基矢量$\vec{x}^1$的坐标式

$$m_2(\ddot{x}'_2+\ddot{x}_1\cos\theta)=m_2 g\sin\theta-F_{f2} \tag{4}$$

B_2关于质心C_2的转动惯量为$J_{C2}=m_2r^2/2$。考虑到式(2)的第二式，B_2相对于B_1的角速度为$\dot{\varphi}'_2=\dot{x}'_2/r$，考虑到$B_1$作平移，故该角速度也为$B_2$的绝对角速度。写出关于质心$C_2$的动量矩定理，有

$$\frac{1}{2}m_2r^2\left(\frac{\ddot{x}'_2}{r}\right)=F_{f2}r \tag{5}$$

由式(4)与(5)消去F_{f2}，有

$$\frac{3}{2}m_2\ddot{x}'_2+m_2\ddot{x}_1\cos\theta=m_2 g\sin\theta \tag{6}$$

这样方程(3)与(6)构成系统的动力学方程。变量为系统的独立坐标$\boldsymbol{q}=(x_1\quad x'_2)^{\mathrm{T}}$。此方程组可以分离变量，即

$$\ddot{x}_1=\frac{-2m_2\sin\theta\cos\theta}{3(m_1+m_2)-2m_2\cos^2\theta}g \tag{7}$$

$$\ddot{x}'_2=\frac{2(m_1+m_2)\sin\theta}{3(m_1+m_2)-2m_2\cos^2\theta}g \tag{8}$$

试问在建立圆柱的动力学方程(6)时，是否可以类似于例5.2-5的方法在圆柱与斜面的接触点使用动量矩定理。

通过上面三个例子可知，利用系统独立位形坐标建立动力学方程可得到不含理想约束力的微分方程。该方程建立了主动力与系统运动加速度的关系。如果主动力已知，给定初始条件，对微分方程进行积分得到独立坐标的时间历程，整个系统的位形可通过运动学分析解决。如果已知独立坐标的运动规律，由上述方程也可求解实现该运动的主动力。在处理上述问题的范围内，利用本节介绍的方法较上节介绍的处理动力学问题的一般方法可能要简单些。

动力学建模两种方法的主要差异是，一般方法处理问题具有程式化的特点，而利用独立坐标建立动力学方程的方法则讲究技巧。对于一般方法，建立刚体系动力学模型是以每个刚体为单元，定义它们的3个笛卡尔坐标、建立3个统一形式的动力学方程(5.2-12)，系统的坐标与动力学方程由它们组集而成式(5.2-14)。由于未知的理想约束力的存在，引入的约束方程也比较规范，多少个理想约束力定有多少个约束方程。正是由于比较程式化，故建模的过程不太容易出错。缺点是动力学模型的规模太大。利用独立坐标建立动力学方程，首先由

运动学入手，分析系统的自由度，定义描述系统位形的独立坐标(或笛卡尔位形坐标，或拉格朗日位形坐标，或是它们的混合)。然后进行运动学分析，建立刚体质心速度和角速度与独立坐标速度间的关系。直接由动力学基本原理建立动力学方程。所得到的动力学方程个数最少。由于系统独立坐标的定义不是唯一的，上述过程的简繁程度以及方程的简洁程度取决于独立坐标的选取，无一定的规律可循。由于讲究技巧，所以要求读者有清楚的运动学与动力学概念以及建立动力学方程的经验，不然容易出错。此外这种方法无法求理想约束力。

5.3 非惯性基下动力学方程

在很多工程问题中，希望得到刚体相对于非惯性基的运动规律。如讨论车辆在作弯道运行时的车厢的振动，航天器在作椭圆轨道运行时的姿态分析。在进行动力学分析时，它们的参考基以时间的已知规律在运动，通常均为非惯性基。本节将建立刚体相对非惯性基运动的动力学方程。

5.3.1 质心相对运动动力学方程

如图 5-4，在刚体的运动平面上的定点 O_0 建立一惯性参考基 $\vec{e}^0 = (\vec{x}^0 \quad \vec{y}^0)^{\mathrm{T}}$。点 O 在该平面上运动，以此点为基点，建立一动参考基 $\vec{e} = (\vec{x} \quad \vec{y})^{\mathrm{T}}$。令基点 O 关于定点 O_0 的矢径为 $\vec{R}_O$，方位角为 ψ。矢径 $\vec{R}_O$ 在惯性参考基 $\vec{e}^0$ 的坐标阵为 $\boldsymbol{R}_O$。该动参考基相对与惯性基作平面运动。那么上述变量为时间已知的函数，有

$$\boldsymbol{R}_O = \boldsymbol{R}_O(t), \quad \psi = \psi(t) \qquad (5.3-1)$$

将动基 $\vec{e}$ 相对于惯性基 $\vec{e}^0$ 的角速度矢量记为 $\vec{\omega}_0$，有

$$\vec{\omega}_0 = \dot{\psi}\vec{z} \qquad (5.3-2)$$

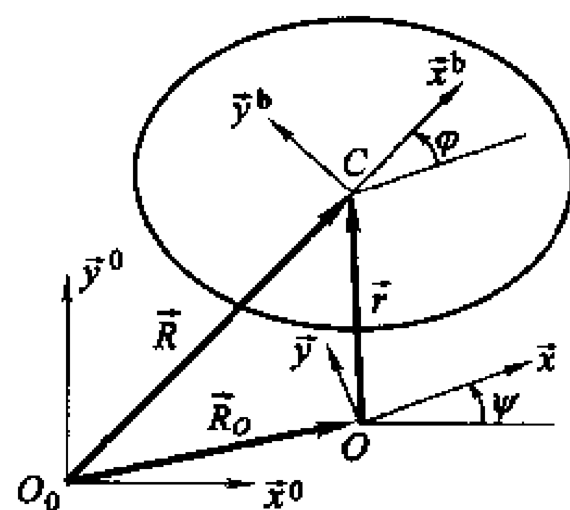


图 5-4 非惯性参考基

考虑一平面刚体，在其的质心 C 上作连体基 $\vec{e}^b = (\vec{x}^b \quad \vec{y}^b)^{\mathrm{T}}$。刚体关于动基 $\vec{e}$ 的方位角为 φ。令质心 C 关于定点 O_0 的矢径为 $\vec{R}$，关于点 O 的矢径为 $\vec{r}$。由图 5-4，上述矢径间有如下关系：

$$\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r} \qquad (5.3-3)$$

考虑质心 C 的加速度，它可以由式(5.3-3)两次对时间求导得到。也可这样处理，将质心 C 作为相对于动基 $\vec{e}$ 运动的动点，对照 2.5 节的普遍公式(2.5-7)，可以直接写出如下关系式：

$$\frac{{}^{0}\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{R}=\frac{{}^{0}\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{R}_O+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}+\frac{{}^{0}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}_0\times\vec{r}+2\vec{\omega}_0\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}+\vec{\omega}_0\times(\vec{\omega}_0\times\vec{r}) \tag{5.3-4}$$

式中，$\frac{{}^{0}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ )$与$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ )$分别表示在惯性基 $\vec{e}^0$ 与动基 $\vec{e}$ 上对时间求导。引用2.5节的符号，有

$$\vec{a}_C=\vec{a}_C^{\mathrm{r}}+\vec{a}_C^{\mathrm{e}}+\vec{a}_C^{\mathrm{C}} \tag{5.3-4'}$$

式中，

$$\vec{a}_C=\frac{{}^{0}\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{R} \tag{5.3-5}$$

$$\vec{a}_C^{\mathrm{r}}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r} \tag{5.3-6}$$

$$\vec{a}_C^{\mathrm{e}}=\frac{{}^{0}\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{R}_O+\frac{{}^{0}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}_0\times\vec{r}+\vec{\omega}_0\times(\vec{\omega}_0\times\vec{r}) \tag{5.3-7}$$

$$\vec{a}_C^{\mathrm{C}}=2\vec{\omega}_0\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} \tag{5.3-8}$$

它们分别表示刚体质心 C 的绝对加速度、关于动基的相对加速度、牵连加速度与科氏加速度。

根据刚体的质心运动定理式(4.3-10)，将式(5.3-4′)代入式(4.3-10)时应将 $\vec{R}$ 替代原来的 $\vec{r}$，有

$$m(\vec{a}_C^{\mathrm{r}}+\vec{a}_C^{\mathrm{e}}+\vec{a}_C^{\mathrm{C}})=\vec{F}_{\mathrm{R}}$$

将外力的主矢分为主动力与理想约束力的主矢，即 $\vec{F}^{\mathrm{a}}$ 与 $\vec{F}^{\mathrm{n}}$。上式经整理，有

$$m\vec{a}_C^{\mathrm{r}}=\vec{F}^{\mathrm{a}}+\vec{F}^{\mathrm{n}}+\vec{F}^{\mathrm{e}}+\vec{F}^{\mathrm{C}} \tag{5.3-9}$$

式中，

$$\vec{F}^{\mathrm{e}}=-m\vec{a}_C^{\mathrm{e}} \tag{5.3-10}$$

$$\vec{F}^{\mathrm{C}}=-m\vec{a}_C^{\mathrm{C}} \tag{5.3-11}$$

分别称它们为刚体的**牵连惯性力与科氏力**。

在5.2节中矢量在惯性基 $\vec{e}^0$ 上对时间求导简写为在相应的字母上加点。为了简洁起见，在本节将在动基 $\vec{e}$ 上对时间求导$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\ )$用$(\ddot{\ })$表示。这样由式(5.3-9)得到质点系质心 C 相对动基的动力学方程：

$$m\ddot{\vec{r}}=m\vec{a}_C^{\mathrm{r}}=\vec{F}^{\mathrm{a}}+\vec{F}^{\mathrm{n}}+\vec{F}^{\mathrm{e}}+\vec{F}^{\mathrm{C}} \tag{5.3-12}$$

它描述了刚体质心相对运动定理，即质点系质心的相对加速度矢量与其质量的乘积等于作用于质点系的主动力与理想约束力的主矢、牵连惯性力与科氏力的矢量和。

矢量方程(5.3-12)可以根据需要在动基 $\vec{e}$ 上也可在惯性基 $\vec{e}^0$ 上列出它们二维的标量坐标式。现将该矢量方程在动基 $\vec{e}$ 上的二维坐标式记为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}^{a} + \boldsymbol{F}^{n} + \boldsymbol{F}^{I} \tag{5.3-13}$$

称其为质点系质心的相对运动动力学方程。式中

$$\boldsymbol{F}^{I} = \boldsymbol{F}^{e} + \boldsymbol{F}^{C} \tag{5.3-14}$$

称为**惯性力**。将式(5.3-13)与式(5.2-8)比较可知,如果在刚体的质心上加上惯性力,刚体质心相对运动动力学方程在形式上与绝对运动动力学方程(5.2-8)一致。

下面推导牵连惯性力与科氏力在动基 $\vec{e}$ 上坐标式。

考虑到式(5.3-2),质心 C 的牵连加速度式(5.3-7)与科氏加速度式(5.3-8)变为

$$\vec{a}_C^{e} = \frac{{}^{0}\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{R}_O + \frac{{}^{0}\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\psi}(\vec{z}\times\vec{r}) + \dot{\psi}^2\vec{z}\times(\vec{z}\times\vec{r}) \tag{5.3-15}$$

$$\vec{a}_C^{C} = 2\dot{\psi}\vec{z}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} \tag{5.3-16}$$

考虑到矢径 $\vec{R}_O$ 在惯性基 $\vec{e}^0$ 的坐标阵为 $\boldsymbol{R}_O$,故式(5.2-13)中的 $\frac{{}^{0}\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{R}_O$ 在惯性基 $\vec{e}^0$ 的坐标阵为 $\ddot{\boldsymbol{R}}_O$,在动基 $\vec{e}$ 的坐标阵为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{R}}_O$。其中 $\boldsymbol{A}$ 为动基 $\vec{e}$ 关于惯性基 $\vec{e}^0$ 的方向余弦阵,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

这样,由式(1.4-8)与(1.4-9),牵连加速度与科氏加速度在动基的坐标阵为

$$\boldsymbol{a}_C^{e} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{R}}_O + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{r}\ddot{\psi} - \dot{\psi}^2\boldsymbol{r} \tag{5.3-17}$$

$$\boldsymbol{a}_C^{C} = 2\tilde{\boldsymbol{I}}\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\psi} \tag{5.3-18}$$

考虑到式(5.3-9)与(5.3-10),得到牵连惯性力与科氏力在动基的坐标阵

$$\boldsymbol{F}^{e} = -m\boldsymbol{a}_C^{e} = -m(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{R}}_O + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{r}\ddot{\psi} - \dot{\psi}^2\boldsymbol{r}) \tag{5.3-19}$$

$$\boldsymbol{F}^{C} = -m\boldsymbol{a}_C^{C} = -2m\tilde{\boldsymbol{I}}\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\psi} \tag{5.3-20}$$

[例 5.3-1] 图示一测振仪。仪器的机架内有一质量为 m 的振子,当机架随着外界运动时,振子相对与机架产生相对运动,振子上的笔尖将在机架的滚筒上记录下振子的相对运动。令振子上的弹簧刚度系数为 k,粘性摩擦系数为 c。当机架在作简谐振动 $b\sin\omega t$ 时,建立振子的相对运动方程。

解: 如图建立一惯性基 $\vec{e}^0$,在机架上建立一动基 $\vec{e}$。动基 $\vec{e}$ 与惯性基 $\vec{e}^0$ 无相对转动,$\vec{\omega}_0 = 0$。动基的基点 O 定义在振子的未振动时的平衡位置处,该点关于惯性基的矢径为 $\vec{R}_O$,由已知条件有

$$\vec{R}_O = (b_0 + b\sin\omega t)\vec{x}$$

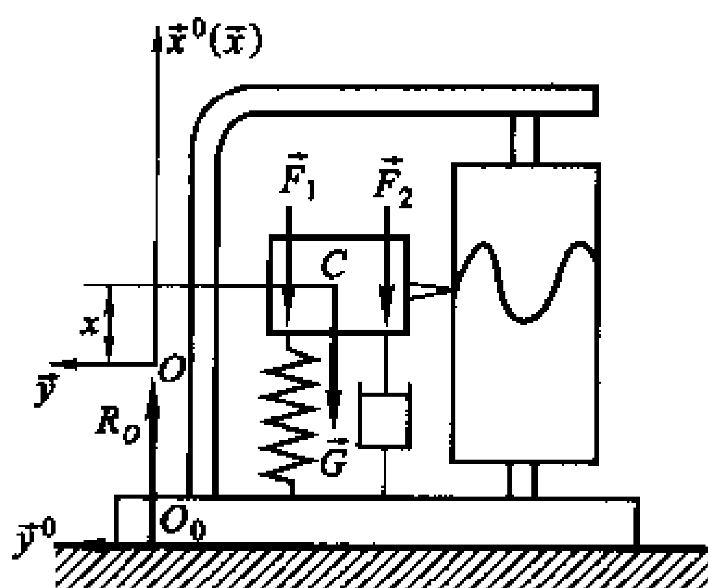
式中 b_0 为基点 O 的初始位置。加速度矢量为

$$\ddot{\vec{R}}_O = -(b\omega^2 \sin \omega t)\vec{x}$$

考虑到此式，由式(5.3－18)与(5.3－19)牵连惯性力与科氏力分别为

$$\vec{F}^e = (mb\omega^2 \sin \omega t)\vec{x} \quad (1)$$

$$\vec{F}^C = \vec{0} \quad (2)$$



例5.3－1图

振子的受力情况如图所示，重力 $\vec{G} = m\vec{g}$、弹性力 $\vec{F}_1$ 与粘性摩擦力 $\vec{F}_2$ 分别为

$$\vec{G} = -mg\vec{x},\ \vec{F}_1 = -k(x - l_0)\vec{x},$$
$$\vec{F}_2 = -c\dot{x}\vec{x} \quad (3)$$

式中 l_0 为弹簧的原长。将式(1)～(3)代入式(5.3－12)得到振子的相对运动动力学方程在 $\vec{x}$ 方向的坐标式

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - l_0) - c\dot{x} + mb\omega^2 \sin \omega t$$

考虑到振子处在平衡位置时有 $mg = kl_0$，上式经整理有

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ma\omega^2 \sin \omega t$$

由上例可知，利用非惯性基下刚体平面运动的相对动力学方程(5.3－13)，可以处理在给定动基运动规律情况下的刚体相对运动的动力学问题。当相对运动为已知的情况下利用式(5.3－13)也可得到在惯性基下的刚体质心的动力学方程。有时这样做可能比直接推导较为简单。请看下面的例子。

[例5.3－2] 图示为一质量为 m 的单摆，摆长 l 初始为 l_0，以后以等速 v 缩短，即 $l = l_0 - vt$。建立摆的动力学方程。

解： 如图在点 O 建立一惯性基 $\vec{e}^0$ 与一动基 $\vec{e}$，后者与摆线平行。动基相对与惯性基只有转动，即 $\boldsymbol{R}_O = \boldsymbol{0}, \psi = \psi(t)$。摆上受到的力为重力 $\vec{G}$ 与绳子的拉力 $\vec{F}_T$，它们在动基上的坐标阵为

$$\boldsymbol{G} = mg(\cos\psi \quad -\sin\psi)^T, \quad \boldsymbol{F}_T = (-F_T \quad 0)^T \quad (1)$$

摆的相对运动为沿动基 x 轴的平移，其矢径、速度加速度在动基上的坐标分别为

$$\boldsymbol{r} = (l \quad 0)^T = (l_0 - vt \quad 0)^T, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = (-v \quad 0)^T, \ \ddot{\boldsymbol{r}} = (0 \quad 0)^T \quad (2)$$

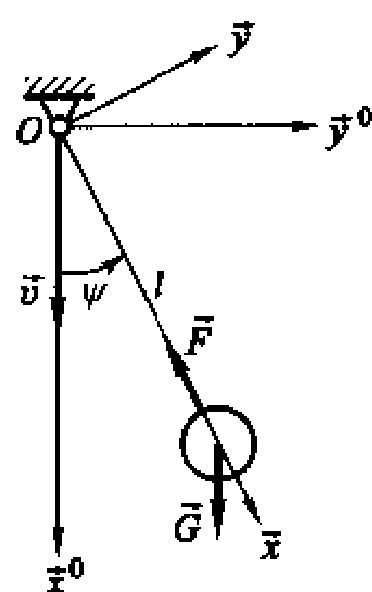
代入式(5.3－10)与(5.3－11)，得到摆的惯性力在动基上的坐标阵为

$$F^{e}=-m(\tilde{I}r\ddot{\psi}-\dot{\psi}^{2}r)=-m\begin{pmatrix}-\dot{\psi}^{2}(l_0-vt)\\ \ddot{\psi}(l_0-vt)\end{pmatrix} \quad (3)$$

$$F^{C}=-2m\tilde{I}\dot{r}\dot{\psi}=-2m\begin{pmatrix}0\\ -\dot{\psi}v\end{pmatrix} \quad (4)$$

将式(1)~(4)代入式(5.3-13),得到摆在非惯性基下的相对动力学方程

$$m\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=mg\begin{pmatrix}\cos\psi\\ -\sin\psi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-F_T\\ 0\end{pmatrix}-m\begin{pmatrix}-\dot{\psi}^{2}(l_0-vt)\\ \ddot{\psi}(l_0-vt)\end{pmatrix}-2m\begin{pmatrix}0\\ -\dot{\psi}v\end{pmatrix} \quad (5)$$



例 5.3-2 图

由式(5)的第二式,得到变摆长摆的动力学方程,即

$$(l_0-vt)\ddot{\psi}-2v\dot{\psi}+g\sin\psi=0$$

由式(5)的第一式,可得到变摆长摆的拉力的表达式,即

$$F_T=m\dot{\psi}^{2}(l_0-vt)+mg\cos\psi$$

5.3.2 刚体相对转动的动力学方程

将刚体相对于动基 $\vec{e}$ 与惯性基 $\vec{e}^0$ 的角速度矢量分别记为 $\vec{\omega}$ 与 $\hat{\vec{\omega}}$,根据如图 5-4 的定义,有

$$\vec{\omega}=\dot{\varphi}\vec{z} \quad (5.3-21)$$

根据角速度叠加原理,有

$$\hat{\vec{\omega}}=\vec{\omega}_0+\vec{\omega}=(\dot{\psi}+\dot{\varphi})\vec{z} \quad (5.3-22)$$

同样记刚体过质心 C 垂直于运动平面轴的转动惯量为 J_C,作用于刚体外力相对于质心 C 的主矩为 $\vec{M}_C=M_C\vec{z}$。将式(5.3-22)代入式(5.2-6)或(5.2-7),用 $\hat{\vec{\omega}}$ 的模 $\hat{\omega}$ 替代原来的 ω,有

$$J_C(\dot{\omega}_0+\dot{\omega})=J_C(\ddot{\psi}+\ddot{\varphi})=M_C$$

将外力的主矩分为主动力与理想约束力的主矩,分别记为 M_C^a 与 M_C^n。经整理,有

$$J_C\dot{\omega}=M_C^a+M_C^n+M_C^I \quad (5.3-23)$$

或

$$J_C\ddot{\varphi}=M_C^a+M_C^n+M_C^I \quad (5.3-24)$$

式中,

$$M_C^I=-J_C\ddot{\psi} \quad (5.3-25)$$

称为质点系关于质心 C 的**惯性力主矩**.

3. 刚体平面相对运动动力学方程

式(5.3－13)与(5.3－24)构成了非惯性基下平面运动刚体的动力学方程。它们可合并为矩阵式，即

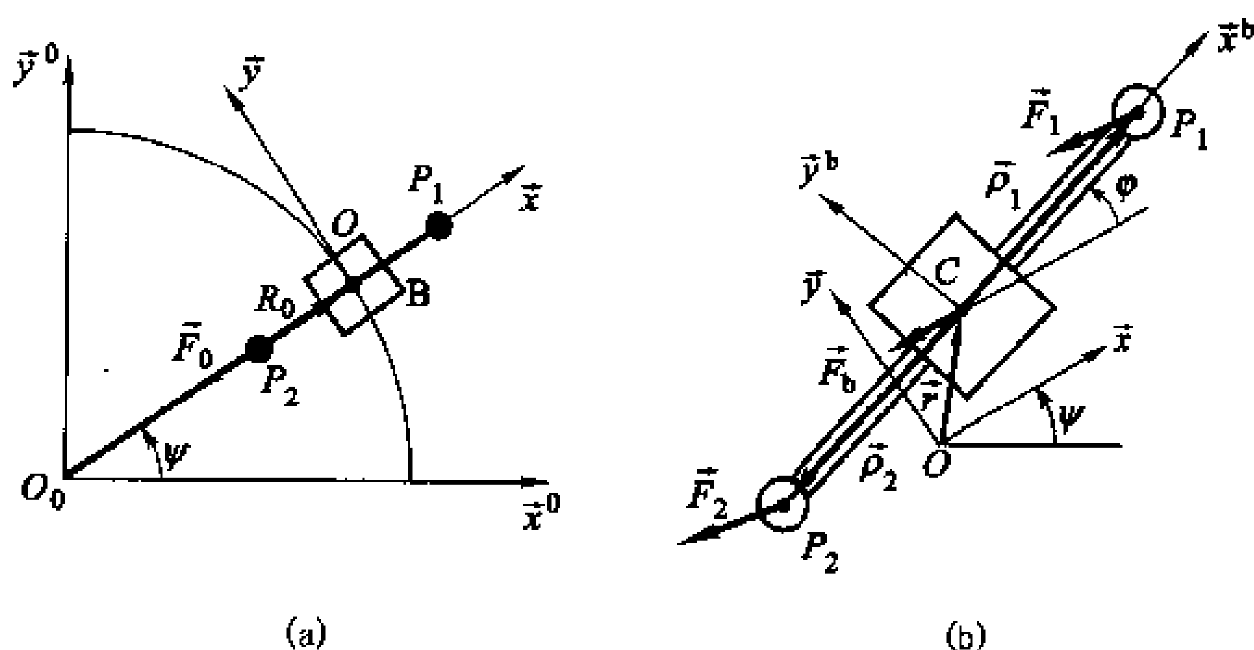
$$\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}} = \hat{\boldsymbol{F}}^{e} + \hat{\boldsymbol{F}}^{a} + \hat{\boldsymbol{F}}^{I} \qquad (5.3-26)$$

其中刚体的位形坐标 $\boldsymbol{q}$、增广质量阵 $\boldsymbol{Z}$、增广主动力阵 $\hat{\boldsymbol{F}}^{a}$ 与增广理想约束力阵 $\hat{\boldsymbol{F}}^{n}$ 的定义见式(5.2－11)。式中 $\hat{\boldsymbol{F}}^{I} = (F_x^I \quad F_y^I \quad M^I)^T$ 为**增广惯性力阵**。

[例5.3－3] 图示为一称为"重力梯度稳定卫星"的示意图。该卫星有一主体B与两个集中质量的质点 P_1 与 P_2 组成。主体B的质量为 m_0，P_1 与 P_2 的质量均为 m_1，距离系统质心 C 均为 l。如果卫星在正常稳定的运行状态时，卫星的质心 C 在一半径为 R_0 的圆轨道上运动，P_1，P_2 与地球中心 O_0 保持在一条直线上(见图a)。试建立卫星的动力学方程，且讨论卫星的运动。

解：如图a所示在地球中心 O_0 建立一个惯性基 $\vec{e}^0$。在卫星无扰动运动的圆轨道上的 O 点建立一动基 $\vec{e}$，其方向如图所示，通常称其为卫星的轨道坐标系。动基 $\vec{e}$ 关于惯性基 $\vec{e}^0$ 的方位角为 ψ，基点 O 关于基点 O_0 的矢径为 $\vec{R}_0$，它及其绝对加速度矢量在惯性基 $\vec{e}^0$ 的坐标阵分别为

$$\boldsymbol{R}_0 = R_0(\cos\psi \quad -\sin\psi)^T,\ \ddot{\boldsymbol{R}}_0 = -R_0\dot{\psi}^2(\cos\psi \quad -\sin\psi)^T \qquad (1)$$



例5.3－3图

卫星在正常运行的情况下质心 C 在作匀速圆周运动(见图a)。地球对卫星的引力的主矢 $\vec{F}_0$ 的方向应由质心 $C(O)$ 指向地心 O_0，其大小根据万有引力的定义，有

$$\vec{F}_0 = -\frac{\mu(2m_1 + m_0)}{R_0^3}\vec{R}_0 \qquad (2)$$

式中，μ 为万有引力常数。它在动基上的坐标阵为

$$\boldsymbol{F}_0 = -\frac{\mu(2m_1 + m_0)}{R_0^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{3}$$

此时卫星质心的惯性力只有牵连惯性力，考虑到式(1)，由式(5.3-10)，有

$$\boldsymbol{F}^e = -m\boldsymbol{A}^{\mathrm{r}}\ddot{\boldsymbol{R}}_0 = (2m_1 + m_0)R_0\dot{\psi}^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{4}$$

考虑到此时质心在点 O 相对静止，将式(3)与(4)代入方程式(5.3-13)，得到卫星作圆轨道运动的角速度、轨道半径及卫星惯量参数应满足的关系

$$\dot{\psi}^2 = \mu/R_0^3 \tag{5}$$

卫星在轨道平面受到扰动时，卫星的质心 C 将偏离 O 点，矢径为 $\vec{r}$。在 C 点建立一卫星的连体基 $\vec{e}^b$ 方向如图所示。卫星的姿态的偏离由方位角 φ 描述。此时质点 P_1,P_2 与星体 B 上所受的万有引力分别为

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu m_1}{R_1^3}\vec{R}_1,\quad \vec{F}_2 = -\frac{\mu m_1}{R_2^3}\vec{R}_2,\quad \vec{F}_b = -\frac{\mu m_0}{R^3}\vec{R} \tag{6}$$

式中：$\vec{R}_1 = \vec{R}_0 + \vec{r} + \vec{\rho}_1$；$\vec{R}_1 = \vec{R}_0 + \vec{r} + \vec{\rho}_2$；$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}$。考虑到如下的矢量在动基下的坐标阵，不难得到上述矢量在动基下的坐标阵，

$$\boldsymbol{R}_0 = R_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\rho}_1 = l\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\rho}_2 = -l\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix} \tag{7}$$

计算矢量 $\vec{R}_1$ 的模，经泰勒展开，有

$$\begin{aligned}R_1 &= (\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1)^{1/2}\\ &\approx R_0\left(1 + \frac{l^2}{R_0^2} + 2\frac{l}{R_0}\cos\varphi + 2\frac{x}{R_0} + 2\frac{lx}{R_0^2}\cos\varphi + 2\frac{ly}{R_0}\sin\varphi + \frac{x^2}{R_0^2} + \frac{y^2}{R_0^2}\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{8}$$

在下面的推导中假定卫星的扰动很小，令 x 与 y 为小量，$\cos\varphi\approx1$，$\sin\varphi\approx\varphi$。另外考虑到卫星的尺寸远小于轨道半径，故认为 l/R_0 也为小量。为了推导简洁，在下面的推导中将二阶以上的小量忽略。这样式(8)可简化为

$$R_1 \approx R_0(1 + 2l/R_0 + 2x/R_0)^{1/2} \tag{9}$$

同理有

$$R_2 \approx R_0(1 - 2l/R_0 + 2x/R_0)^{1/2},\quad R \approx R_0(1 + 2x/R_0)^{1/2} \tag{10}$$

将式(9)与(10)代入式(6)，计算它们的坐标式，有

$$\boldsymbol{F}_1 = -\frac{\mu m_1}{R_1^3}\boldsymbol{R}_1 \approx -\frac{\mu m_1}{R_0^2}\begin{pmatrix}1 + 2l/R_0 + 2x/R_0\\ 2y/R_0 + l\varphi/R_0\end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -\frac{\mu m_1}{R_2^3}\boldsymbol{R}_2 \approx -\frac{\mu m_1}{R_0^2}\begin{pmatrix}1 - 2l/R_0 + 2x/R_0\\ 2y/R_0 - l\varphi/R_0\end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{F}_b=-\frac{\mu m_1}{R^3}\boldsymbol{R}\approx-\frac{\mu m_1}{R_0^2}\begin{pmatrix}1+2x/R_0\\2y/R_0\end{pmatrix}\tag{13}$$

将式(1)与(4)代入式(5.3－18)与(5.3－19),惯性力的坐标式,有

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}=(2m_1+m_0)R_0\dot\psi^2\begin{pmatrix}1+x/R_0\\y/R_0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}^{\mathrm{C}}=-(2m_1+m_0)\dot\psi\begin{pmatrix}-\dot y\\\dot x\end{pmatrix}\tag{14}$$

将式(11)～(14)代入式(5.3－13),考虑到式(5),得到卫星质心相对运动方程有

$$\ddot x-2\dot\psi\dot y-3\dot\psi^2x=0\tag{15}$$

$$\ddot y+2\dot\psi\dot x=0\tag{16}$$

计算作用于卫星所有主动力关于质心 C 的矩。有

$$M_C^{\mathrm{a}}=(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1+(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_2\approx-6\frac{\mu m_1l^2}{R_0^3}\varphi\tag{17}$$

将上式代入式(5.2－23),考虑到 $M_C^{\mathrm{I}}=0$ 与式(5),得到卫星姿态的相对运动方程

$$J\ddot\varphi+6m_1l^2\dot\psi^2\varphi=0\tag{18}$$

方程(15),(16)与(18)构成卫星的一阶近似的动力学方程组。

由式(18)可解得

$$\varphi=\varphi_0\cos(kt+\xi)\tag{19}$$

其中 $k=\dot\psi\sqrt{6m_1l^2/J}$。可见,由于两集中质量的重力梯度,卫星的姿态将在平衡位置附近摆动。这种不需要动力的卫星姿态稳定的方法称为卫星的被动稳定,重力梯度稳定是被动稳定的一种。

将式(15)对时间求导,将式(16)代入,消去 y,得到

$$\dddot x+\dot\psi^2\dot x=0$$

可解得

$$x=d_0+d\sin(\dot\psi t+\eta)\tag{20}$$

代入式(16)有

$$\ddot y=-2\dot\psi a\cos(\dot\psi t+\eta)$$

可解得

$$y=b_0+b_1t+2d\cos(\dot\psi t+\eta)\tag{21}$$

再将式(20)与(21)代入式(15),可得到积分常数有如下关系:$b_1=-3\dot\psi d_0/2$。上式变为

$$y=b_0-\frac{3\dot\psi d_0}{2}t+2d\cos(\dot\psi t+\beta)\tag{22}$$

这样式(20)与(22)为质心相对运动的解,其中 d_0,d、b_0,η 为积分常数,可由初始条件确定。需要注意的是上述解的适用范围是质心为小扰动的情况。从解的

性态可知，当质心有扰动时质心的相对运动将偏离原来的平衡位置。

5.4 碰撞

碰撞是物体运动的特殊形式，其特点是在很短的时间间隔中物体的速度发生突然的变化。如工程中的锻铁、打桩，生活中踢足球，捶钉子等。此外，如果一个运动着的物体，突然对其施加约束，物体的速度也会发生突变。如机械臂突然抓住一个运动中的物体，物体与机械臂系统的运动将发生突变。在力学上凡物体的速度或动量发生突变的现象均称为**碰撞**。本节将根据动力学的基本原理对碰撞现象进行描述，讨论碰撞运动的基本规律。

5.4.1 研究碰撞的基本假定　恢复因数

两物体发生碰撞，在非常短暂的时间内速度有很大的变化。通常碰撞的时间间隔在千分之一到万分之一之间，故物体的加速度极大。据此，由动力学基本原理可知，在碰撞的时间间隔中物体相互的作用力将非常大。称这种在短暂时刻发生远大于普通力的力称为**碰撞力**。在这样巨大的碰撞力作用下，物体肯定产生变形，同时会发生声、光与热等物理现象。说明碰撞的物理现象很复杂，碰撞过程中将有一部分机械能转化为其他运动形式的能量，机械能不守恒。

要分析清楚上述物理现象将涉及到多门学科的知识，在理论力学中将不考虑碰撞时间间隔中的所有物理过程，主要讨论在碰撞力的作用下物体在碰撞前后的速度的变化。为此作如下的假定：

(1) 由于不考虑碰撞时间间隔中碰撞力 $\vec{F}$ 的变化，碰撞力对物体的作用直接用碰撞力的冲量来描述，碰撞力的冲量称为**碰撞冲量**，记为 $\vec{I}$。定义为

$$\vec{I} = \int_0^{\tau} \vec{F} \mathrm{d}t \tag{5.4-1}$$

式中，τ 为碰撞的时间间隔。

(2) 通常碰撞力是物体的普通作用力(如重力、弹性力等)的数百倍与数千倍。故在讨论碰撞的效应时只考虑碰撞力，其他的相互作用力均忽略。

(3) 由于碰撞的时间间隔 τ 非常短，质点的位移、刚体的位形变化也非常小，故忽略这种变化，只考虑它们的速度的变化。尽管该位形的变化很小，由于碰撞力很大，故碰撞力所作的功为一有限值，不能忽略。

考虑两个圆球正碰撞(见图 5-5)，所谓**正碰撞**是指碰撞前后两球中心的速度与两中心连线重合。牛顿在研究这个物理模型时将碰撞的过程分为两个阶段。第一阶段是从球 B_1 与球 B_2 相互接触(见图 5-5a)到两球速度一致，均为 u(见图 5-5b)。令两球相互接触时，球 B_1 与 B_2 的速度分别为 v_{10} 与 v_{20}

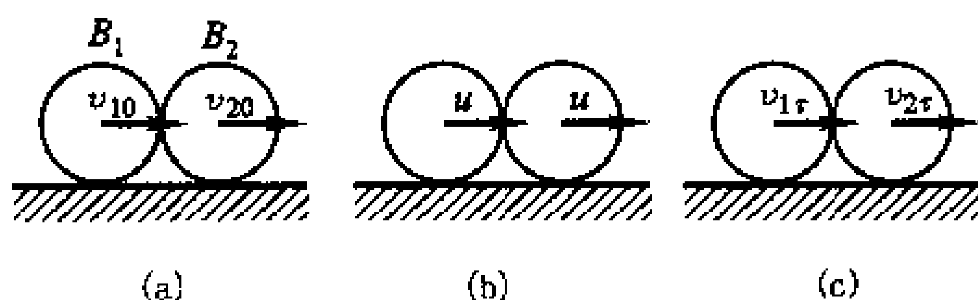


图 5-5　正碰撞的两个阶段

$(<v_{10})$。第二阶段是两球由状态 b 到开始分离。令两球分离时，球 B_1 与 B_2 的速度分别为 $v_{1\tau}$ 与 $v_{2\tau}(>v_{1\tau})$（见图 5-5c）。第一阶段称为物体的接触变形阶段，第二阶段称为物体的变形恢复阶段。

由动量定理的积分形式(4.3-9)，考虑到式(5.4-1)，在接触变形阶段有

$$m_1u-m_1v_{10}=-I,\ m_2u-m_2v_{20}=I \tag{5.4-2}$$

其中 m_1 与 m_2 分别为球 B_1 与 B_2 的质量，I 为该阶段球 B_1 作用于球 B_2 碰撞力的冲量。在变形恢复阶段有

$$m_1v_{1\tau}-m_1u=-I',\ m_2v_{2\tau}-m_2u=I' \tag{5.4-3}$$

其中 I' 为该阶段球 B_1 作用于球 B_2 碰撞力的冲量。牛顿认为这两个碰撞冲量的比为常数，且该常数与碰撞物体的材料性质有关，与物体的形状、大小和碰撞前的速度无关。将这个常数称为**恢复因数**，记为 e，即

$$e=I'/I \tag{5.4-4}$$

已知正碰撞初始时刻两球的速度 v_{10} 与 v_{20}，由式(5.4-2)可得到速度 u 与冲量 I，即

$$u=\frac{m_1v_{10}+m_2v_{20}}{m_1+m_2},\ I=\frac{m_1m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2} \tag{5.4-5}$$

由式(5.4-3)～(5.4-5)，在已知恢复因数的条件下可得到碰撞终了时刻两球的速度 $v_{1\tau}$ 与 $v_{2\tau}$ 与冲量 I'，即

$$\left.\begin{aligned}v_{1\tau}&=v_{10}-(1+e)\frac{m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}\\v_{2\tau}&=v_{20}+(1+e)\frac{m_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}\end{aligned}\right\} \tag{5.4-6}$$

$$I'=e\frac{m_1m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2} \tag{5.4-7}$$

由式(5.4-6)，可得到

$$e=\frac{v_{2\tau}-v_{1\tau}}{v_{10}-v_{20}} \tag{5.4-8}$$

这是恢复因数的另一个定义，即恢复因数等于碰撞前后两物体相对速度的绝对值之比。通常，可根据此定义由实验测定两物体间的恢复因数。表5.4－1给出了一些材料的恢复因数。尽管定义(5.4－8)是由正碰撞得到的，现在已将其推广为恢复因数等于两物体接触点碰撞前后相对速度绝对值之比。

表5.4－1　材料的碰撞因数

相碰撞的材料	铁/铅	木/橡皮	木/木	铁/铁	玻璃/玻璃
恢复因数 e	0.14	0.26	0.50	0.56	0.94

通常恢复因数 e 为小于1大于0的数。当 $e=0$ 时，由式(5.4－8)，$v_{2\tau}=v_{1\tau}$，两球将不会分离，即碰撞无变形恢复阶段，物体的碰撞处为塑性变形，这种碰撞称为**完全塑性碰撞**。当 $e=1$ 时，由式(5.4－8)，$v_{2\tau}-v_{1\tau}=v_{10}-v_{20}$，物体在变形恢复阶段，变形完全恢复，物体的碰撞处为弹性变形，这种碰撞称为**完全弹性碰撞**。

两球的碰撞前后的能量分别为

$$T_0=\frac{1}{2}(m_1v_{10}^2+m_2v_{20}^2),\ T_\tau=\frac{1}{2}(m_1v_{1\tau}^2+m_2v_{2\tau}^2)$$

考虑到上式与式(5.4－6)，可得到碰撞前后的能量差，即机械能的损失为

$$T_0-T_\tau=(1-e)^2\frac{m_1m_2(v_{10}-v_{20})^2}{2(m_1+m_2)} \qquad (5.4-9)$$

可见对于完全弹性碰撞，能量损失为零。完全塑性碰撞能耗最大。

5.4.2　碰撞冲量作用下刚体动量与动量矩的变化

动力学基本定理适用于所有的机械运动。考虑到碰撞动力学现象的特殊性，根据上节的假定，可以得到适用于碰撞动力学分析的数学模型。

1. 定轴转动刚体的碰撞问题

考虑绕轴 Oz 作定轴转动的刚体。在点 $P_k(k=1,2,\cdots,n)$ 受到主动碰撞力 $\vec{F}_k^a$ 的作用，此时在轴承 A 与 B 处将产生作用于轴上的碰撞理想约束力，将它们的主矢记为 $\vec{F}_A^n$ 与 $\vec{F}_B^n$。令刚体角速度矢量为 $\vec{\omega}=\omega\vec{z}$，绕该轴的转动惯量为 J_{Oz}，由质点系对定点 O 的动量矩的积分形式(4.4－11′)的第三式可知，由于 $M_{Oz}(\vec{F}_A^n)=M_{Oz}(\vec{F}_B^n)=0$，刚体碰撞前后对该轴动量矩的改变等于碰撞力对该轴的矩之和，即

$$\begin{aligned}L_{Oz\tau}-L_{Oz0}&=J_{Oz}\omega_\tau-J_{Oz}\omega_0\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\tau M_{Oz}(\vec{F}_k^a)\mathrm{d}t\end{aligned} \qquad (5.4-10)$$

式中

$$\int_0^{\tau} M_{Oz}(\vec{F}_k^a)\mathrm{d}t = \int_0^{\tau} \vec{z}\cdot(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^a)\mathrm{d}t$$

由上节的假定(3),碰撞前后刚体位形变化忽略不计,即矢径 $\vec{r}_k$ 与时间无关,故上述积分可表示为

$$\int_0^{\tau} M_{Oz}(\vec{F}_k^a)\mathrm{d}t = \vec{z}\cdot\left(\vec{r}_k \times \int_0^{\tau}\vec{F}_k^a\mathrm{d}t\right) = \vec{z}\cdot(\vec{r}_k \times \vec{I}_k^a)$$

代入式(5.4-10),有

$$L_{Oz\tau} - L_{Oz0} = J_{Oz}\omega_{\tau} - J_{Oz}\omega_0 = \sum_{k=1}^{n}\vec{z}\cdot(\vec{r}_k \times \vec{I}_k^a) \tag{5.4-11}$$

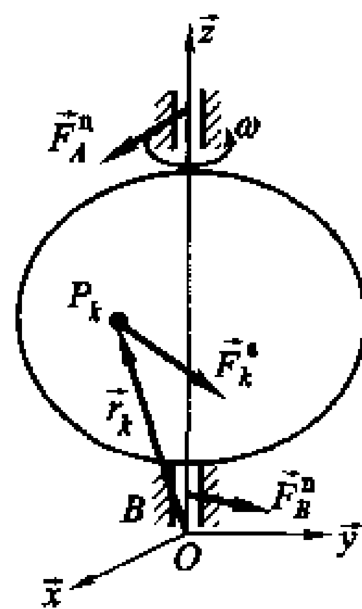
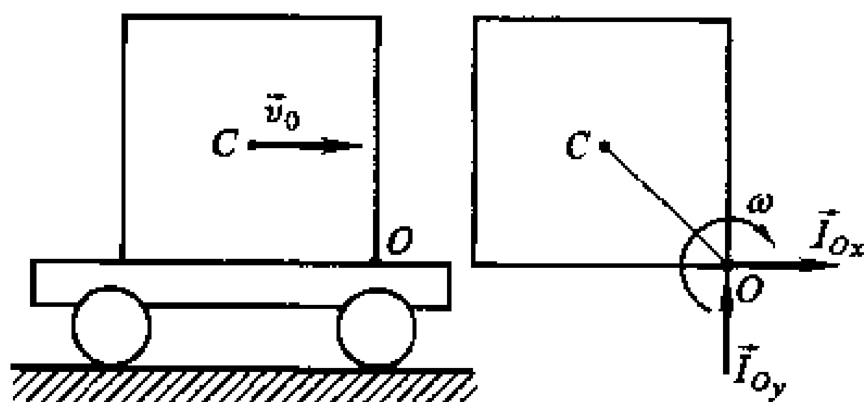


图5-6　受碰撞的刚体定轴转动

[例5.4-1]　图示一以速度为 v_0 匀速运动的小车上有一边长为 l 的方块。当小车突然停止时,方块将绕底面的一边翻转。求此时方块翻转的角速度与方块能量的损耗。



例5.4-1图

解: 小车突然停止,方块的运动从原来的平移突变为绕点 O 的定轴转动。方块绕点 O 的转动惯量为 $J_{Oz}=2ml^2/3$。方块上受到的理想约束力冲量作用与铰 O,分解为 I_{Ox} 与 I_{Oy}。如果对 O 取矩,这两个未知的冲量矩将不出现在方程(5.4-11)中。考虑到 $J_{Oz0}=mv_0l/2$,由式(5.4-11)有

$$\frac{2}{3}ml^2\omega - \frac{1}{2}mv_0l = 0$$

得到翻转角速度为 $\omega = 3v_0/4l$。

方块能耗为

$$T_0 - T_{\tau} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}J_{Oz}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}ml^2\cdot\left(\frac{3v_0}{4l}\right)^2 = \frac{5}{16}mv_0^2$$

2. 平面运动刚体的碰撞问题

对于作平面运动的刚体,在点 $P_k(k=1,2,\cdots,n)$ 受到外碰撞力 $\vec{F}_k$ 的作用,由平面运动的动力学条件,该力应在平面上。由动量定理的积分形式式(4.3-

9)，可以得到刚体在碰撞前后动量的改变等于作用于系统外碰撞冲量之和，即

$$m\vec{v}_{C\tau}-m\vec{v}_{C0}=\sum_{k=1}^{n}\vec{I}_k \tag{5.4-12}$$

式中 m 为刚体的质量，$\vec{v}_{C0}$ 与 $\vec{v}_{C\tau}$ 为碰撞前后的质心的速度，$\vec{I}_k$ 为外碰撞力 $\vec{F}_k$ 的碰撞冲量。式(5.4-12)的坐标式为

$$mv_{C\tau}-mv_{C0}=\sum_{k=1}^{n}I_k \tag{5.4-13}$$

令刚体绕质心 C 的角速度矢量为 $\vec{\omega}=\omega\vec{z}$，绕该轴的转动惯量为 J_{Cz}，由质点系对质心 C 的动量矩的积分形式式(4.4-17′)的第3式可知，刚体受碰撞前后对该轴动量矩的改变等于碰撞力对该轴的矩之和，即

$$L_{Cz\tau}-L_{Cz0}=J_{Cz}\omega_\tau-J_{Cz}\omega_0=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\tau}M_{Cz}(\vec{F}_k)\mathrm{d}t \tag{5.4-14}$$

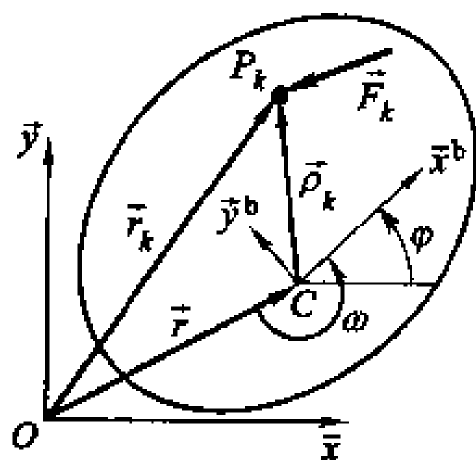


图5-7 受碰撞的刚体平面运动

式中

$$\int_0^{\tau}M_{Cz}(\vec{F}_k)\mathrm{d}t=\int_0^{\tau}\vec{z}\cdot(\vec{\rho}_k\times\vec{F}_k)\mathrm{d}t$$

由上节的假定(3)，碰撞前后物体变形忽略不计，即矢径 $\vec{\rho}_k$ 与时间无关，故上述积分可表示为

$$\int_0^{\tau}M_{Cz}(\vec{F}_k)\mathrm{d}t=\vec{z}\cdot\left(\vec{\rho}_k\times\int_0^{\tau}\vec{F}_k\mathrm{d}t\right)=\vec{z}\cdot(\vec{\rho}_k\times\vec{I}_k)$$

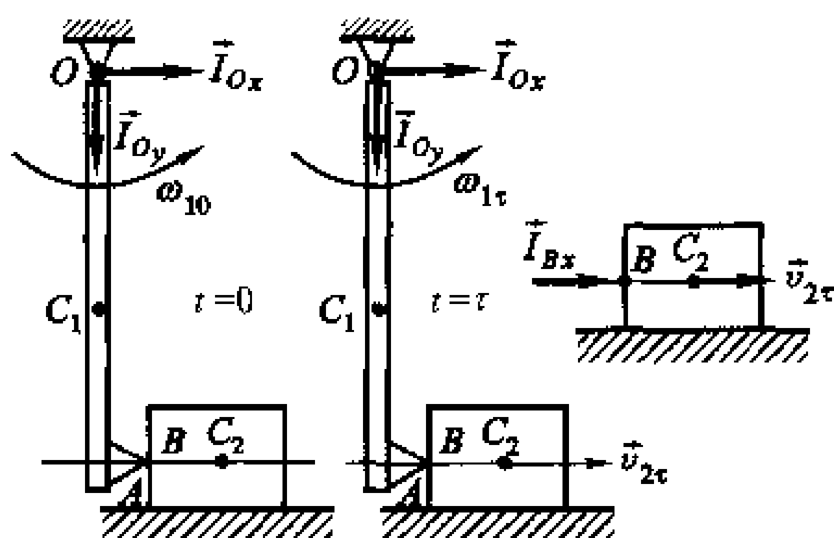
考虑到碰撞力 $\vec{F}_k$ 为运动平面上的力，故碰撞冲量也应为该平面上的矢量。由式(1.4-7)可知，$\vec{z}\cdot(\vec{\rho}_k\times\vec{I}_k)=(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_k=(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_k$，代入式(5.4-14)，有

$$L_{Oz\tau}-L_{Oz0}=J_{Oz}\omega_\tau-J_{Oz}\omega_0=\sum_{k=1}^{n}(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}'_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_k \tag{5.4-15}$$

综上所述，作平面运动的刚体受到碰撞时，碰撞前后的动量与动量矩的变化由式(5.4-13)与(5.4-15)确定。可以用它们进行碰撞动力学分析。

[例5.4-2] 均质杆 OA 质量为 m_1，长为 l，一端 O 由铰链与机座相连。从水平位置下落，在铅垂位置，杆的另一端 A 撞击一质量为 m_2 的方块。设点 A 与方块的质心 C_2 在同一水平线上。已知恢复因数为 e。求撞击后杆的角速度与方块的速度，杆对方块的冲量。

解： 在碰撞前，杆由水平位置下落到铅垂位置，以铅垂位置杆的质心 C_1 为零势面，由机械能守恒，$V=T$，即



例 5.4-2 图

$$m_1 g \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_1 l^2 \cdot \omega_1^2$$

可解得杆在铅垂位置的角速度为 $\omega_1 = \sqrt{3g/l}$。

以杆－方块系统为对象，撞击的外冲量只出现在铰 O 处。为了在方程中不出现未知的理想约束力冲量 I_{Ox} 与 I_{Oy}，对 O 取矩。碰撞前 $t=0$ 的状态：杆作定轴转动角速度为 $\omega_{10} = \sqrt{3g/l}$，方块静止。碰撞后 $t=\tau$ 的状态：杆作定轴转动角速度为 $\omega_{1\tau}$，方块平移的速度为 $v_{2\tau}$，故由式(5.4－11)，有

$$(m_2 v_{2\tau} l + J_{Oz}\omega_{1\tau}) - J_{Oz}\omega_{10} = 0 \tag{1}$$

碰撞发生在杆的点 A 与方块的点 B，点 B 的速度与其质心 C_2 的速度一致。由恢复因数的定义式(5.4－8)，有

$$e = \frac{v_{B\tau} - v_{A\tau}}{v_{A0} - v_{B0}} = \frac{v_{2\tau} - \omega_{1\tau} l}{\omega_{10} l - 0}$$

故可解得

$$v_{2\tau} = (\omega_{1\tau} + e\omega_{10}) l \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，可得到撞击后杆的角速度

$$\omega_{1\tau} = \frac{-m_2 l^2 e + J_{Oz}}{m_2 l^2 + J_{Oz}} \omega_{10} = \frac{m_1 - 3m_2 e}{m_1 + 3m_2}\sqrt{\frac{3g}{l}} \tag{3}$$

再将此式代入式(2)，可得到撞击后方块的速度

$$v_{2\tau} = (\omega_{1\tau} + e\omega_{10}) l\omega_{1\tau} = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + 3m_2} l\omega_{10} = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + 3m_2}\sqrt{3gl} \tag{4}$$

为了求杆对方块的冲量，需以其为对象(见图)。由式(5.4－13)

$$mv_{2\tau} - mv_{20} = m_2 v_{2\tau} = I_{Bx}$$

将式(4)代入上式，得到冲量为

$$I_{Bx} = \frac{(1+e)m_1}{(m_1 + 3m_2)m_2}\sqrt{3gl}$$

［例 5.4－3］ 质量为 m，长为 l 的两均质杆 OA 与 AB，以铰 A 相连，一端 O 由铰链与机座相连。现在杆 AB 的质心 C_2 作用一水平冲量 I，求撞击后两杆的角速度与点 C_2 的速度。

解：以杆 OA 为对象，它作定轴转动。杆上受的冲量如图所示，对点 O 取矩，由式(5.4－11)，有

$$J_{Oz}\omega_{1\tau} - J_{Oz}\omega_{10} = J_{Oz}\omega_{1\tau} = lI_{Ax} \tag{1}$$

其中 $\omega_{1\tau}$ 为杆 OA 撞击后的角速度。

以杆 AB 为对象，它作平面运动。杆上受的冲量如图所示，由式(5.4－15)与(5.4－13)，

$$J_{C_2z}\omega_{2\tau} - J_{C_2z}\omega_{20} = J_{C_2z}\omega_{2\tau} = \frac{1}{2}lI'_{Ax} \tag{2}$$

$$mv_{2x\tau} - mv_{2x0} = mv_{2x\tau} = I - I'_{Ax} \tag{3}$$

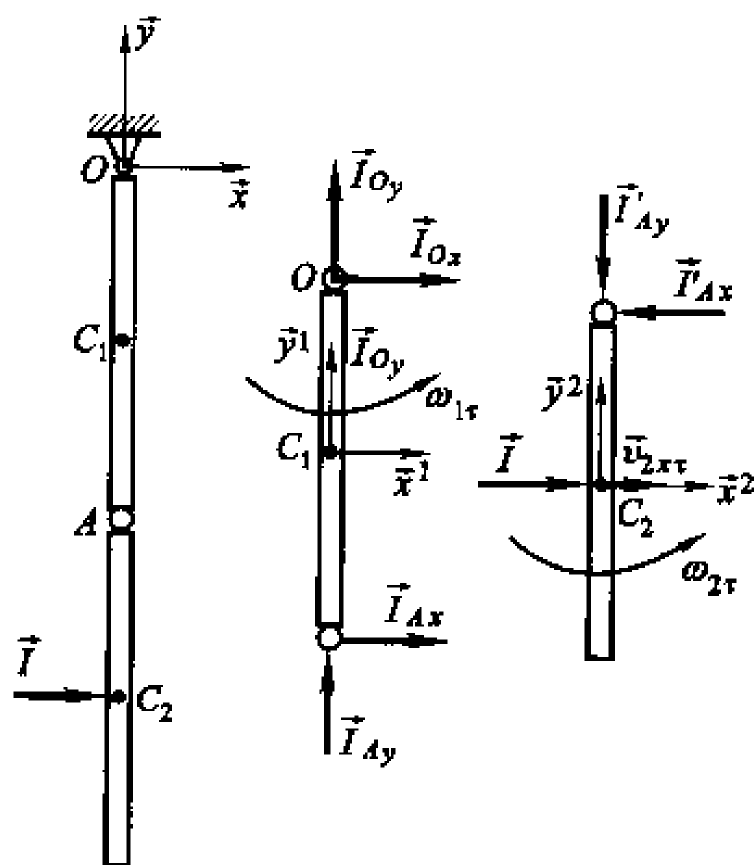
$$mv_{2y\tau} - mv_{2y0} = 0 = -I'_{Ay} \tag{4}$$

式(1)～(4)为系统的碰撞的动力学方程，由于 $I_{Ax} = I'_{Ax}$，$I_{Ay} = I'_{Ay}$，由方程(4)可得 $I_{Ay} = I'_{Ay} = 0$。此外经整理有

$$J_{Oz}\omega_{1\tau} = lI_{Ax} \tag{5}$$

$$2J_{C_2z}\omega_{2\tau} = lI_{Ax} \tag{6}$$

$$mv_{2x\tau} = I - I_{Ax} \tag{7}$$



例 5.4－3 图

方程(5)~(7)的未知量为 $\omega_{1\tau}, \omega_{2\tau}, v_{2x\tau}, I_{Ay}$ 共4个，方程只有3个，故需增加运动学条件。考虑到点 A 为两杆共点，建立速度约束条件。在杆 OA 上考察，点 A 的速度为 $v_A = \omega_{1\tau} l$。在杆 AB 上考察，点 A 的速度为 $v_A = v_{2x\tau} - \omega_{2\tau} l/2$。故有速度约束条件

$$v_{2x\tau} = \omega_{1\tau} l + \frac{1}{2}\omega_{2\tau} l \tag{8}$$

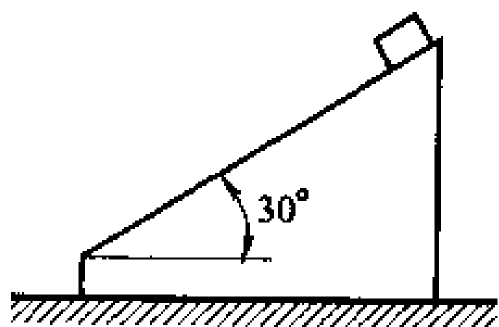
考虑到 $J_{Oz} = ml^2/3$ 与 $J_{C_2 z} = ml^2/12$，由方程(5)~(8)可解得

$$v_{2x\tau} = \frac{6I}{7m},\ \omega_{1\tau} = \frac{3I}{7m},\ \omega_{2\tau} = \frac{6I}{7m}$$

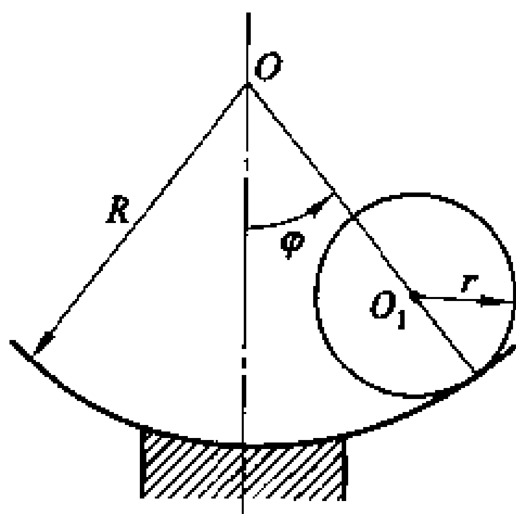
从以上的例子可见，碰撞问题中的未知量可能包括理想约束力的冲量、刚体质心速度与角速度等运动学量。在建立碰撞动力学方程时合理选取方程，尽可能减少未知量的出现，使问题求解方便(如例5.4-1与5.4-2)。对于较复杂的问题，也可利用程式化的方式，利用式(5.4-11)，(5.4-13)与(5.4-15)将所有方程建立起来。这样可能会出现未知量的个数超过方程的个数，需增加运动学条件。由于碰撞动力学方程均在速度的层次上，需要速度约束方程。这些条件可以通过约束方程求导得到，比较方便的是直接寻找速度约束关系(如例5.4-3)。此外，对于碰撞问题如果涉及碰撞前后速度的关系，可利用恢复因数式(5.4-8)这一条件。

习 题

5-1 在水平面上有一质量为4 kg的斜面，在斜面上放一质量为2 kg的方块。从静止开始，方块自斜面顶点下滑。不计所有的摩擦力，求方块脱离斜面时斜面滑动的速度。斜面长0.5 m



题5-1图



题5-4图

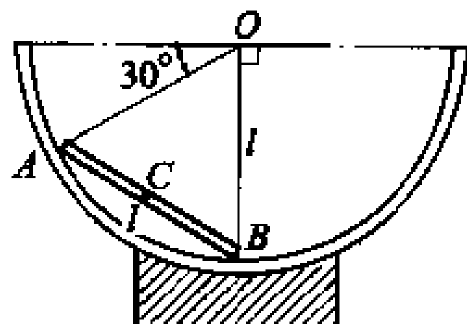
5-2　上题中，如果考虑方块与斜面间的摩擦阻力，则系统的机械能量不再守恒。今设方块与斜面间的摩擦因数为0.50，求方块脱离斜面时斜面的速度。

5-3　把上题中的方块改为匀质圆盘，并假定圆盘与斜面间有足够大的摩擦阻力阻止相对滑动。求圆盘脱离斜面时斜面的速度。

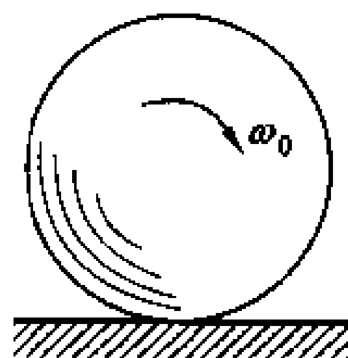
5-4　试用一般方法或独立坐标法求半径为r的匀质圆盘在半径为R的固定圆弧面内作微幅振动的周期。设圆盘在固定圆弧面内滚动而不滑动。

5-5　质量为m，长为l的匀质细杆AB在半径为l的固定光滑半圆槽中于图示位置（杆的一端B与点O在同一竖直线上）从静止释放。试用一般方法或独立坐标法建立杆的动力学方程并求刚释放的瞬时，在杆上A和B处的约束力，杆AB的角加速度及其质心C的加速度。

5-6　一半径为r的匀质圆球，令其绕通过其中心的水平轴以角速度ω_0转动，然后轻放于水平面上如图示。此时其中心的速度为零。设接触面间的摩擦因数为f，问经过多少时间后，圆球将在平面上作纯滚动？此时中心的速度多大？滚动阻力不计。



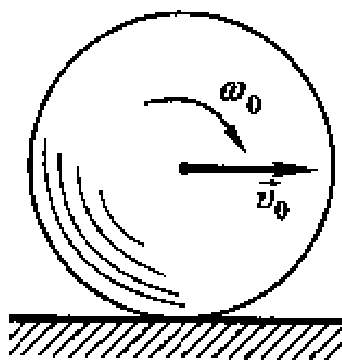
题5-5图



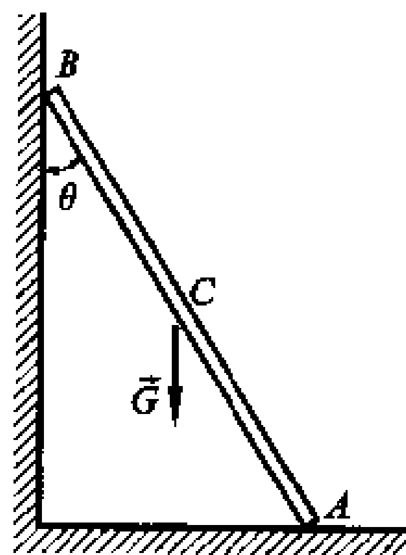
题5-6图

5-7　上题中，如果在开始时，圆球除了具有角速度ω_0外，其中心具有水平速度v_0如图示，$v_0 > r\omega_0$。问在这个情况下，经过多少时间后圆球作纯滚动？此时中心的速度多大？

5-8　均质杆AB，质量为m，长为l，在铅垂平面内一端沿着水平地面，另一端沿着竖直墙壁由与铅垂方向成θ角的位置无初速地滑下。不计接触处的摩擦力，试求在杆开始滑动的瞬时，地面与墙壁对杆的约束力

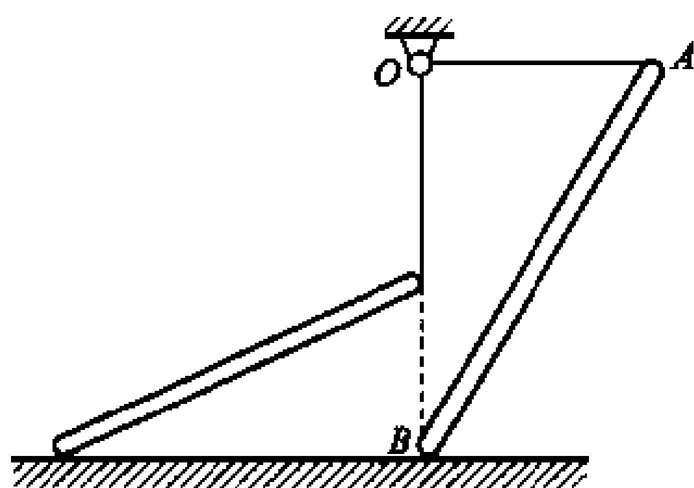


题5-7图

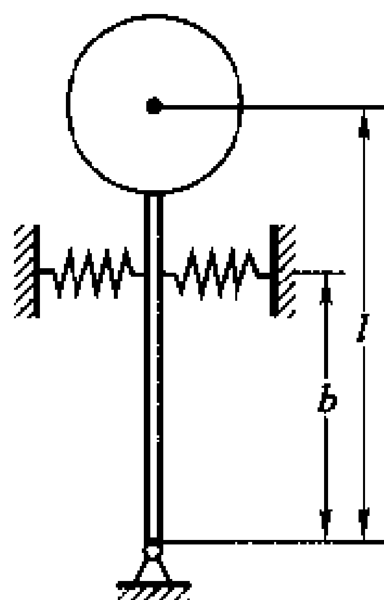


题5-8图

5-9 均质杆 AB 质量为 m，长 $2l$，一端用长 l 的软绳 OA 拉住，一端 B 置于光滑地面上，如图示。开始时，绳子位于水平位置，而 O，B 在同一铅垂线上，初速为零。求当 OA 运动到铅垂位置时 B 点的速度以及此时绳子的拉力和地面的约束力。



题 5-9 图

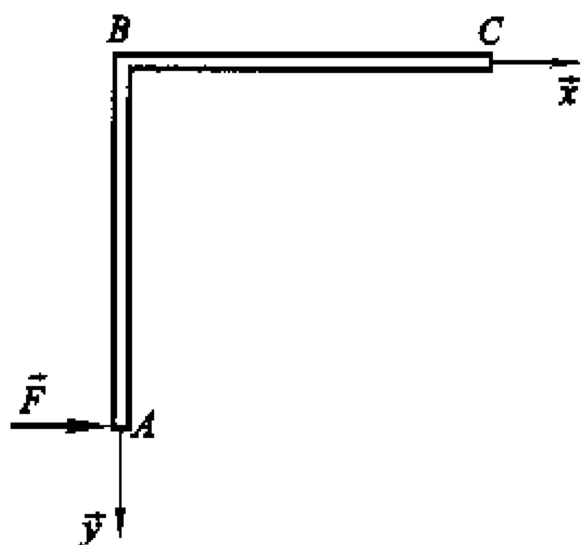


题 5-10 图

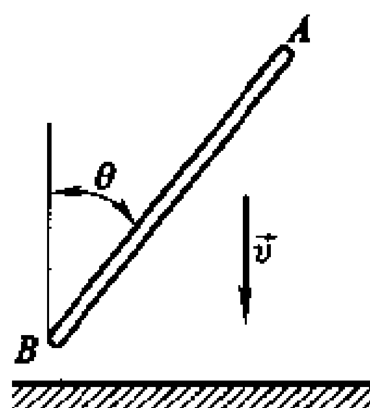
5-10 一倒置的摆由两弹簧支持如图示。设摆由圆球与直杆组成，球质量为 m，半径为 r，杆重不计。弹簧的刚度系数为 k。问当摆从平衡位置向左或向右有一微小偏移后，是否振动？写出能够发生振动的条件。

5-11 长 l，质量为 m 的匀质杆 AB 与 BC 在 B 点刚连成直角尺后放在光滑水平面上。求在 A 端作用一与 AB 垂直的水平力 $\vec{F}$ 后 A 点的加速度。

5-12 与铅垂线成 θ 角的匀质杆 AB 以速度 $\vec{v}$ 落到水平面上。设恢复因数为零，并有足够的摩擦阻力阻止 B 点滑动。求落下后 AB 的角速度以及 B 点的冲量。



题 5-11 图



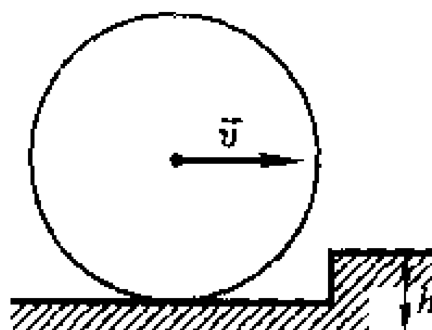
题 5-12 图

5-13 上题中，如果水平面是光滑的，求落下后 AB 的角速度。

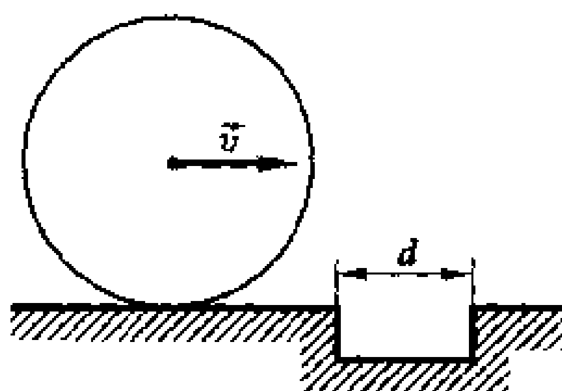
5-14 一半径为 r 的匀质圆盘在地面上滚动时遇到一高 h 的砖块如图示。问圆盘中心应有多大的速度始能越过这一砖块？假定接触处有足够的摩擦阻力并且碰撞是塑性的。

5-15 设上题中的圆盘半径 r 为 0.30 m。在滚动时遇到一宽 d 为 0.30 m 的凹坑如图示。问圆盘中心应有多大的速度方能滚过这一凹坑？

5-16　三根相同的匀质杆用铰链连接，并由铰链支持如图示。求在水平冲量 $\vec{I}$ 作用下的角速度 ω。杆长 l，质量为 m。



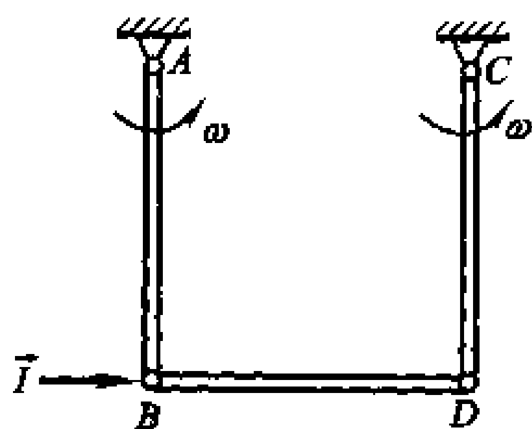
题 5-14 图



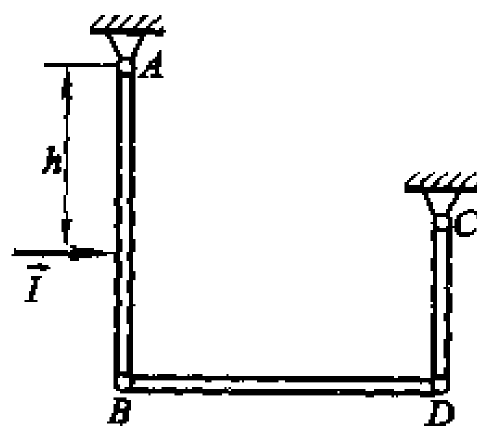
题 5-15 图

5-17　上题中，问水平冲量 $\vec{I}$ 应作用于 AB 杆上何处时，A 点的碰撞冲量为零？并求此时支点 C 处的碰撞冲量。

5-18　设上题中的 CD 杆为 AB 与 BD 杆的一半，支承如图示。求当 AB 杆上有一水平冲量 $\vec{I}$ 作用时的角速度 ω。



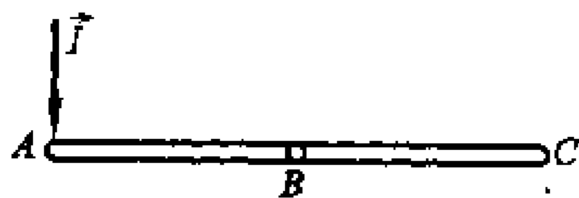
题 5-16 图



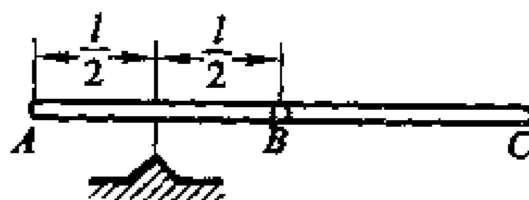
题 5-18 图

5-19　两根相同的直杆 AB 与 BC 铰接后放在桌面上，并在其一端 A 作用一与杆垂直的水平冲量 $\vec{I}$ 如图示。求 A，B，C 三点的速度。杆长 l，质量为 m。

5-20　上题中的两直杆铰接后水平地落到一支座上如图示。设到达支座时的速度为 $\vec{v}$，并假定碰撞是塑性的。求碰撞时动能的损失。



题 5-19 图



题 5-20 图

第 6 章　分析力学基础

在第 4 章与第 5 章中已经介绍了解决动力学问题的矢量动力学的基本原理与方法。对于处理动力学问题的一般方法,其动力学模型是含未知理想约束力的动力学方程与系统的加速度约束方程。对于利用独立坐标的动力学方程解决动力学问题,方程中将不含未知的理想约束力,但建立这类方程无程式化的特征。

从十八世纪开始,在力学发展史上又出现了与矢量力学并驾齐驱的另一力学体系,即**分析力学**。这个体系的特点是对能量和功的分析代替对力与力矩的分析。为了避免未知理想约束力的出现,分析力学的一种方法是在理想约束力与约束方程间建立起一种直接的关系,导出了比矢量力学一般方法程式化更为明显的动力学方程——**拉格朗日第一类方程**。分析力学的另一种方法是从独立坐标出发,利用纯数学分析方法,将用独立坐标描述的动力学方程用统一的原理与公式进行表达,克服了在矢量动力学中建立这种方程依赖技巧的缺点。这种统一的方程即**拉格朗日第二类方程**。上述工作均由拉格朗日于 1788 年奠定的。以拉格朗日方程为基础的分析力学,称为**拉格朗日力学**。1834 年哈密顿(Hamilton)将拉格朗日第二类方程变换成一种正则形式,将动力学基本原理归纳为变分形式的哈密顿原理,从而建立了**哈密顿力学**。

对于一个动力学系统,尽管建立该系统的拉格朗日第二类方程或哈密顿正则方程不依赖于技巧,但其数学推导过程相当繁琐,并且容易出错。因此用来建立自由度比较多的系统动力学方程相当困难。利用拉格朗日第一类方程解决某系统的动力学问题,与矢量动力学的一般方法一样,尽管建立方程比较容易,但其求解规模很大。正是由于这个原因,在力学发展史上因拉格朗日第一类方程并不比矢量动力学一般方法优越,而被搁置一边。

随着近代计算技术的发展,对于具有程式化特征的数学问题,规模再大也能迎刃而解。故解决动力学问题的拉格朗日第一类方程又引起广泛的注意。可以这样说目前在解决复杂动力学问题成功的计算机辅助分析软件中,均采用拉格朗日第一类方程与加速度约束方程作为系统的动力学模型。

本章首先介绍分析力学的两个基本原理,即**达朗贝尔**(J. le R. d'Alembert)**原理**与**虚位移原理**,在此基础上导出拉格朗日第一类方程与拉格朗日第二类方程。考虑到达朗贝尔原理在处理动力学的瞬时分析,虚位移原理在静力学分析

中有重要的地位,故要求读者掌握它们的分析方法。关于利用拉格朗日第一类方程处理刚体系动力学问题的原理与计算机辅助分析的方法将安排在下一章。

6.1 达朗贝尔原理

质点系的达朗贝尔原理是1743年由达朗贝尔提出的。它从与矢量动力学不同的另一个角度给出了作用于系统的力与系统运动的关系,构成了分析动力学的基础。

6.1.1 达朗贝尔惯性力与质点系的达朗贝尔原理

在研究刚体在非惯性基下的运动规律时引入了惯性力的概念。本节将定义另一种**惯性力**。

考虑在惯性基下的质点的运动。根据牛顿定律,该质点的动力学方程为

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{6.1-1}$$

如果定义

$$\vec{F}^* = -m\ddot{\vec{r}} \tag{6.1-2}$$

为该质点的**达朗贝尔惯性力**,那么动力学方程(6.1-1)可写为

$$\vec{F} + \vec{F}^* = 0 \tag{6.1-3}$$

由此可得到如下结论,即质点运动的任意时刻,质点的达朗贝尔惯性力与作用于质点的所有真实的作用力组成平衡力系。此结论称为**质点的达朗贝尔原理**。

上述的真实的作用力指作用于质点的外力(包括理想约束力)。需要注意的是,上述的达朗贝尔惯性力与非惯性基下的引进的惯性力是两种意义下的概念,后者是为了使非惯性基下相对运动的动力学方程与在惯性基下的动力学方程形式上相似而定义的惯性力,它与非惯性基运动有关。而这里引入达朗贝尔惯性力是为了将惯性基下的质点动力学方程(6.1-1)变换为一种力的平衡方程(6.1-3)的形式,尽管此时质点并非处在平衡状态。这种处理方法称为**动静法**。此外达朗贝尔惯性力与质点的绝对加速度有关,与有无非惯性基无关。有时达朗贝尔惯性力也简称为惯性力,读者不难从应用的过程中与非惯性基下的惯性力加以区分。

考虑有 n 个质点组成的质点系,作用于质点 $P_k(k=1,\cdots,n)$ 上的力中除了外力 $\vec{F}_k$ 外,还有其他质点作用于它的内力 $\vec{F}_{ki}(i=1,\cdots,n;i\neq k)$。将该质点上惯性力记为 $\vec{F}_k^* = -m\ddot{\vec{r}}_k$。考虑到质点系的质有的内力的和为零矢量,即 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ki} = \vec{0}$,这样可以得到如下结论,即质点系运动的任意时刻,系统中所有

质点的惯性力与作用于系统的外力构成平衡力系。此结论称为质点系的达朗贝尔原理。由式(4.1－29),可得

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k+\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^*=\vec{0} \tag{6.1-4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_k)+\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_k^*)=\vec{0} \tag{6.1-5}$$

[**例6.1－1**]　小球 P_1 与 P_2 与铅垂轴 AB 固连如图所示。将小球视为质点,质量分别为 m_1 与 m_2。求轴 AB 作匀角速度 ω 旋转时轴承 A 与 B 处所受的力。

解: 在小球 P_1 与 P_2 与铅垂轴 AB 构成的系统上,受到的外力有小球的重力 $m_1\vec{g}$ 与 $m_2\vec{g}$,轴承 A 与 B 作用在轴上的理想约束力 $\vec{F}_{Bx}$,$\vec{F}_{Ax}$ 与 $\vec{F}_{Ay}$。

如果在图示位置瞬时,系统瞬时"冻结",作动静法处理的话,质点 P_1 与 P_2 需加上惯性力。在图示瞬时的 xy 平面上考察。质点 P_1 与 P_2 的绝对加速度矢量为 $\vec{a}_i=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$,$(i=1,2)$。它们的大小分别为

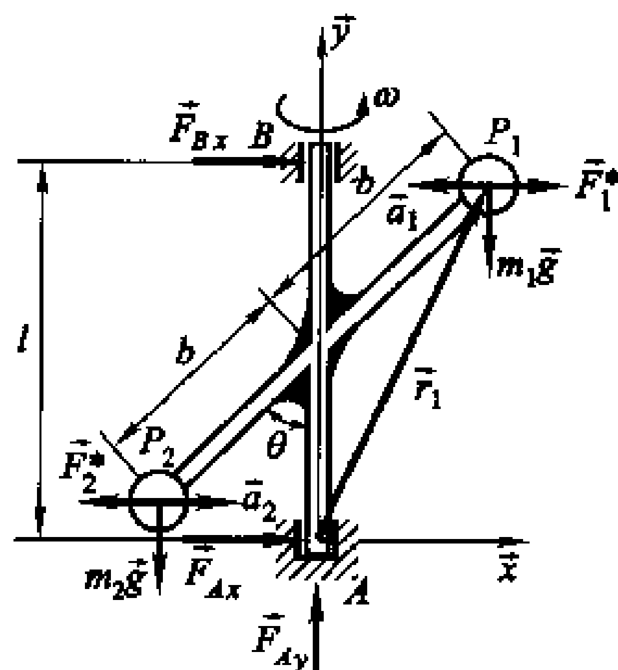
$$a_1=a_2=\omega^2 b\sin\theta$$

质点 P_1 与 P_2 的惯性力的大小分别为

$$F_1^*=F_2^*=m\omega^2 b\sin\theta$$

方向如图所示。两惯性力构成一力偶,力偶矩为

$$M=2b\cos\theta F_1^*=m\omega^2 b^2\sin 2\theta$$



例6.1－1图

建立平衡方程

$$\sum_k M_{Az}(\vec{F}_k)=0,\quad F_{Bx}l+M=0 \tag{1}$$

$$\sum_k F_x=0,\quad F_{Bx}+F_{Ax}=0 \tag{2}$$

$$\sum_k F_y=0,\quad F_{Ay}-2mg=0 \tag{3}$$

由式(1)与(3)分别可得

$$F_{Bx}=-\frac{m\omega^2 b^2}{l}\sin 2\theta,\ F_{Ay}=2mg$$

将上面的第一式代入式(2),得

$$F_{Ax}=\frac{m\omega^2 b^2}{l}\sin 2\theta$$

轴承上受到的力分别为图示的反方向。由于平面 xy 随轴 AB 一起转动,所

以轴承受到的力在惯性基上观察是在不断的改变方向。

[**例 6.1-2**] 利用达朗贝尔原理建立例 5.2-5 摆的动力学方程。

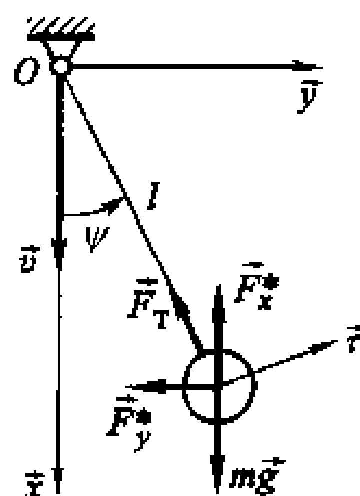
解：如图所示摆的位置在惯性基的坐标为

$$x=(l_0-vt)\cos\psi,\ y=(l_0-vt)\sin\psi$$

求两次导数，得到摆的加速度矢量在惯性基的坐标

$$\ddot{x}=-(l_0-vt)\ddot{\psi}\sin\psi-(l_0-vt)\dot{\psi}^2\cos\psi+2v\dot{\psi}\sin\psi$$

$$\ddot{y}=(l_0-vt)\ddot{\psi}\cos\psi-(l_0-vt)\dot{\psi}^2\sin\psi-2v\dot{\psi}\cos\psi$$



例 6.1-2 图

考虑到两坐标导数的正向与基矢量方向一致，摆的惯性力 $\vec{F}^*$ 在惯性基的坐标 F_x^* 与 F_y^* 如图所示，其大小为

$$F_x^*=m\ddot{x}=-m(l_0-vt)\ddot{\psi}\sin\psi-m(l_0-vt)\dot{\psi}^2\cos\psi+2mv\dot{\psi}\sin\psi \tag{1}$$

$$F_y^*=m\ddot{y}=m(l_0-vt)\ddot{\psi}\cos\psi-m(l_0-vt)\dot{\psi}^2\sin\psi-2mv\dot{\psi}\cos\psi \tag{2}$$

根据达朗贝尔原理，重力 $m\vec{g}$、拉力 $\vec{F}_T$ 和惯性力 $\vec{F}^*$ 在图示瞬时平衡。为了不出现未知的拉力，将矢量式在垂直该力的矢量方向 $\vec{\tau}$ 投影，有

$$-F_y^*\cos\psi+F_x^*\sin\psi-mg\sin\psi=0$$

将式(1)与(2)代入，得到动力学方程

$$(l_0-vt)\ddot{\psi}-2v\dot{\psi}+g\sin\psi=0$$

与例 5.2-5 的结果一致。

6.1.2 利用动静法处理刚体动力学瞬时分析问题

对于受约束的刚体，所有作用于刚体的外力中包括理想约束力，由于它们通常是未知的，与前面两章相同，将外力分为主动力与理想约束力。当主动力与理想约束力向点 O 简化，将其主矢分别记为 $\vec{F}^a,\vec{F}^n$；主矩分别记为 $\vec{M}_O^a,\vec{M}_O^n$。如果向质心 C 简化，主矢不变，主矩分别为 $\vec{M}_C^a,\vec{M}_C^n$。对于刚体的惯性力系可以如外力系一样进行简化，得到惯性力的主矢与关于该简化中心的主矩。为了使问题简洁，通常将简化中心取在质心，分别记为 $\vec{F}^*$ 与 $\vec{M}_C^*$。

这样对于刚体，达朗贝尔原理式(6.1-4)与(6.1-5)可表示为

$$\vec{F}^a+\vec{F}^n+\vec{F}^*=\vec{0} \tag{6.1-6}$$

$$\vec{M}_C^{\mathrm{a}} + \vec{M}_C^{\mathrm{n}} + \vec{M}_C^{*} = \vec{0} \tag{6.1-7}$$

对于平衡方程(6.1-6)与(6.1-7),包含了外力,理想约束力与惯性力,而惯性力实际上隐含着刚体位形的加速度的信息。因此由方程(6.1-6)与(6.1-7)给出了外力、理想约束力与刚体位形加速度的关系。矢量方程(6.1-6)与(6.1-7)的坐标式只有6个,如果用于瞬时分析,则只能解决有6个未知变量的情况。

用动静法处理动力学问题与直接用动力学方程的区别在于用动静法更具灵活性。如对于力矩平衡方程(6.1-7),可以根据需要对某定点 O 建立,这样式(6.1-7)变为

$$\vec{M}_O^{\mathrm{a}} + \vec{M}_O^{\mathrm{n}} + \vec{M}_C^{*} + \vec{OC} \times \vec{F}^{*} = \vec{0} \tag{6.1-8}$$

合理地选取点 O,对求解带来很大的方便。

不难看到上述的动力学瞬时分析问题的关键是计算达朗贝尔惯性力。下面将推导这些惯性力的主矢与主矩,通过一些例子说明如何方便地应用动静法处理刚体动力学瞬时分析的问题。

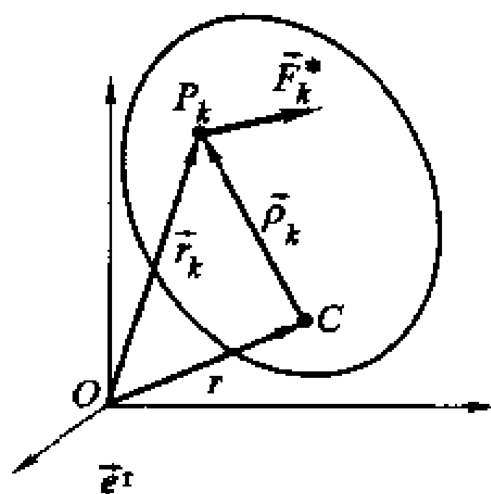


图6-1 惯性力的简化

1. 刚体一般运动惯性力的简化

由定义,刚体惯性力的主矢为

$$\vec{F}^{*} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{*} = -\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\vec{r}}_k = -m\ddot{\vec{r}} \tag{6.1-9}$$

式中:m 为刚体的质量;$\ddot{\vec{r}}$ 为刚体质心 C 的加速度矢量。与外力的主矢一样,惯性力的主矢与简化中心的选取无关。由图6-1定义的矢量,刚体惯性力关于质心的主矩为

$$\begin{aligned} \vec{M}_C^{*} &= \sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^{*} = -\sum_{k=1}^{n} \vec{\rho}_k \times m_k \frac{\mathrm{d}\dot{\vec{r}}_k}{\mathrm{d}t} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\rho}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{\rho}_k}{\mathrm{d}t} \times m_k \dot{\vec{r}}_k \end{aligned} \tag{6.1-10}$$

考虑到 $\vec{r}_k = \vec{r} + \vec{\rho}_k$ 与 $\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\rho}_k = \vec{0}$,上式的第二项为

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{\rho}_k}{\mathrm{d}t} \times m_k \dot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{\vec{\rho}}_k \times m_k (\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\rho}}_k) = -\dot{\vec{r}} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{\rho}}_k = \vec{0}$$

考虑到刚体关于质心动量矩的定义式(4.4-5),由式(6.1-7)可得到刚体惯性力关于质心的主矩为

$$\vec{M}_C^* = -\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C}{\mathrm{d}t} \tag{6.1-11}$$

2．平面运动刚体动力学问题

作为上述刚体惯性力简化的特殊情况，考虑到式(5.2-5)，由式(6.1-11)可得刚体平面运动惯性力关于质心的主矩为

$$\vec{M}_C^* = M_C^* \vec{z}, \quad M_C^* = -J_C\dot{\omega} = -J_C\ddot{\varphi} \tag{6.1-12}$$

由式(6.1-6)，可得刚体惯性力主矢的坐标阵为

$$\boldsymbol{F}^* = -m\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{6.1-13}$$

或

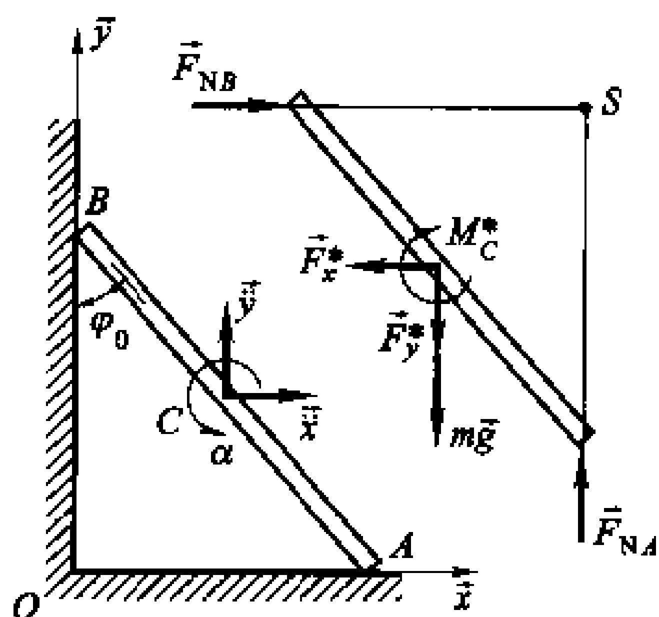
$$F_x^* = -m\ddot{x}, \quad F_y^* = -m\ddot{y} \tag{6.1-13'}$$

[例 6.1-3] 考虑例 5.2-1 的均质杆 AB，试利用达朗贝尔原理求解杆刚开始滑动时的角加速度与约束反力。

解： 杆 AB 作平面运动，在例 5.2-1 中根据约束方程得到了任意时刻质心 C 的加速度的表达式(5)与(6)，对于图示刚开始滑动瞬时，角速度为零，故有

$$\ddot{x} = \frac{l}{2}\cos\varphi_0\ddot{\varphi}_0$$

$$\ddot{y} = -\frac{l}{2}\sin\varphi_0\ddot{\varphi}_0$$



例 6.1-3 图

由式(6.1-13′)与(6.1-12)可得到在杆上的惯性力关于质心的主矢与主矩的方向如图所示，其大小为

$$F_x^* = m\ddot{x} = \frac{ml}{2}\cos\varphi_0\ddot{\varphi}_0 \tag{1}$$

$$F_y^* = m\ddot{y} = -\frac{ml}{2}\sin\varphi_0\ddot{\varphi}_0 \tag{2}$$

$$M_C^* = \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi}_0 \tag{3}$$

图中列出了外力，即重力与两个理想约束力。根据动静法，列出平衡方程为了在平衡方程中未知数出现最少，首先建立对点 S 的力矩平衡方程，即利用式(6.1-8)，使两个约束力不出现，有

$$\sum_k M_{Sz}(\vec{F}_k) = 0, \quad -M_C^* - \frac{F_x^* l}{2}\cos\varphi_0 + \frac{(F_y^* + mg)l}{2}\sin\varphi_0 = 0$$

将式(1)～(3)代入，可解得开始滑动瞬时的角加速度为

$$\alpha = \ddot{\varphi}_0 - \frac{3g}{2l}\sin\varphi_0 \tag{4}$$

列出另外两个平衡方程

$$\sum_k F_{kx} = 0,\quad F_{NB} - F_x^* = 0$$

$$\sum_k F_{ky} = 0,\quad F_{NA} - F_y^* - mg = 0$$

将式(4)代入，可得到此瞬时的约束力

$$F_{NB} = \frac{3mg}{4}\cos\varphi_0\sin\varphi_0,\quad F_{NA} = mg\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\varphi_0\right)$$

考虑刚体平面运动的特殊情况。当刚体作平移时，惯性力的主矩 $\vec{M}_C^*$ 为零。当刚体作平面定轴转动时，刚体惯性力可直接对转轴 Oz 简化。

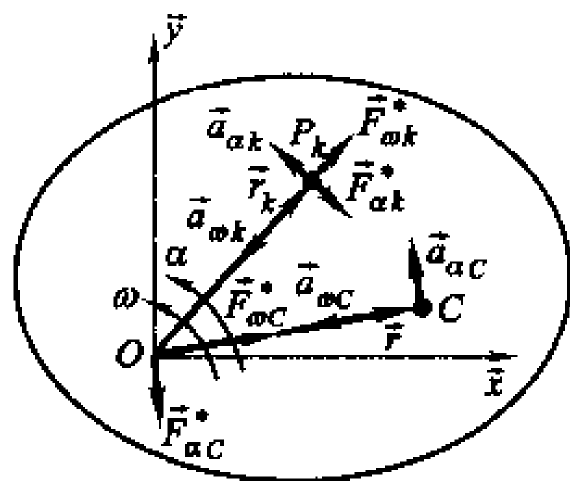


图6-2　平面刚体定轴转动惯性力的简化

令刚体绕定轴 Oz 转动的角速度为 ω。图6-2给出了点 P_k 的加速度矢量，它们分别为牵连法向加速度 $a_{\omega k} = r_k\omega^2$ 与牵连切向加速度 $a_{\alpha k} = r_k\dot{\omega}$，方向如图所示。它们相应的惯性力分别为 $F_{\omega k}^* = m_k r_k\omega^2$ 与 $F_{\alpha k}^* = m_k r_k\dot{\omega}$，方向如图所示。计算刚体的惯性力关于转动轴的矩。由定义可得

$$M_{Oz}^* = \sum_{k=1}^{n} r_k F_{\alpha k}^* = -\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2\dot{\omega} = -J_O\dot{\omega} \tag{6.1-14}$$

由定义，惯性力主矢仍为式(6.1-13)，考虑到质心的加速度 $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_{\omega C} + \vec{a}_{\alpha C} = -\omega^2\vec{r} + \dot{\omega}\vec{z}\times\vec{r}$，故惯性力的主矢为

$$\vec{F}^* = -m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\omega C}^* + \vec{F}_{\alpha C}^* \tag{6.1-15}$$

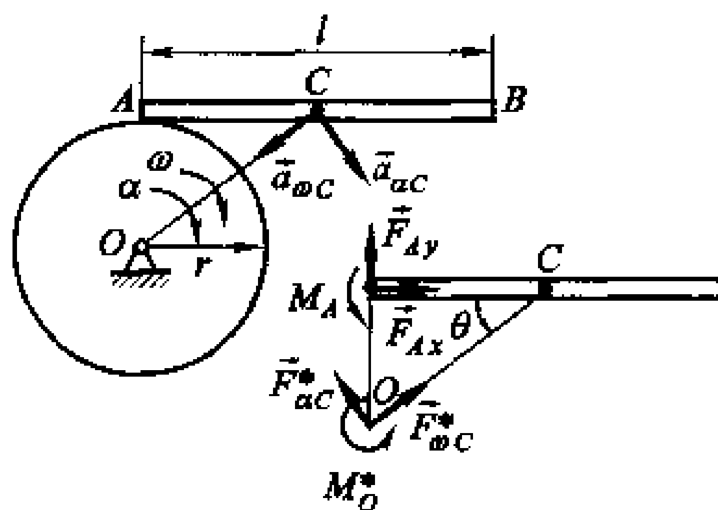
式中，

$$\vec{F}_{\omega C}^* = m\omega^2\vec{r},\quad \vec{F}_{\alpha C}^* = -m\dot{\omega}\vec{z}\times\vec{r} \tag{6.1-16}$$

分别称为刚体的**法向牵连惯性力**与**切向牵连惯性力**。

[例6.1-4]　质量为 m，长为 l 的均质杆 AB 一端 A 与半径为 r 的圆盘的边缘固结，圆盘以角速度 ω 与角加速度 α 绕 O 转动，求图示瞬时 AB 杆在 A 处因转动而引起的作用力。

解：分析杆 AB 的运动可知，它绕点 O 作定轴转动。图中给出了质心 C 的加速度，即法向牵连加速度 $a_{\omega C} = b\omega^2$ 与切向牵连加速度 $a_{\alpha C} = b\alpha$，其中 b 为点



例 6.1-4 图

O 与 C 间的距离,方向如图所示。根据式(6.1-16)与(6.1-14),计算杆 AB 的惯性力向点 O 简化的主矢与主矩,有

$$F^*_{\alpha C} = mb\alpha \tag{1}$$

$$F^*_{\omega C} = mb\omega^2 \tag{2}$$

$$M^*_O = J_O\alpha \tag{3}$$

方向如图所示。由图可知,$b = \sqrt{r^2 + l^2/4}$,$J_O = J_C + mb^2 = m(r^2 + l^2/3)$。

杆 AB 的 A 端的约束力有 $\vec{F}_{Ax}$,$\vec{F}_{Ay}$ 与 M_A。定义方向如图所示。利用达朗贝尔原理,有

$$\sum_k F_{kx} = 0,\quad F_{Ax} - F^*_{\alpha C}\sin\theta + F^*_{\omega C}\cos\theta = 0$$

$$\sum_k F_{ky} = 0,\quad F_{Ay} + F^*_{\alpha C}\cos\theta + F^*_{\omega C}\sin\theta = 0$$

$$\sum_k M_{Az}(\vec{F}_k) = 0,\quad M_A + M^*_O - rF^*_{\alpha C}\sin\theta + rF^*_{\omega C}\cos\theta = 0$$

将式(1)~(3)代入,考虑到 $b\cos\theta = l/2$ 与 $b\sin\theta = r$,由上式可得到理想约束力(矩),即

$$F_{Ax} = mr\alpha - ml\omega^2/2$$

$$F_{Ay} = -ml\alpha/2 - mr\omega^2$$

$$M_A = -ml^2\alpha/3 - mrl\omega^2/2$$

此题的惯性力可以考虑向质心 C 简化,读者可试求。

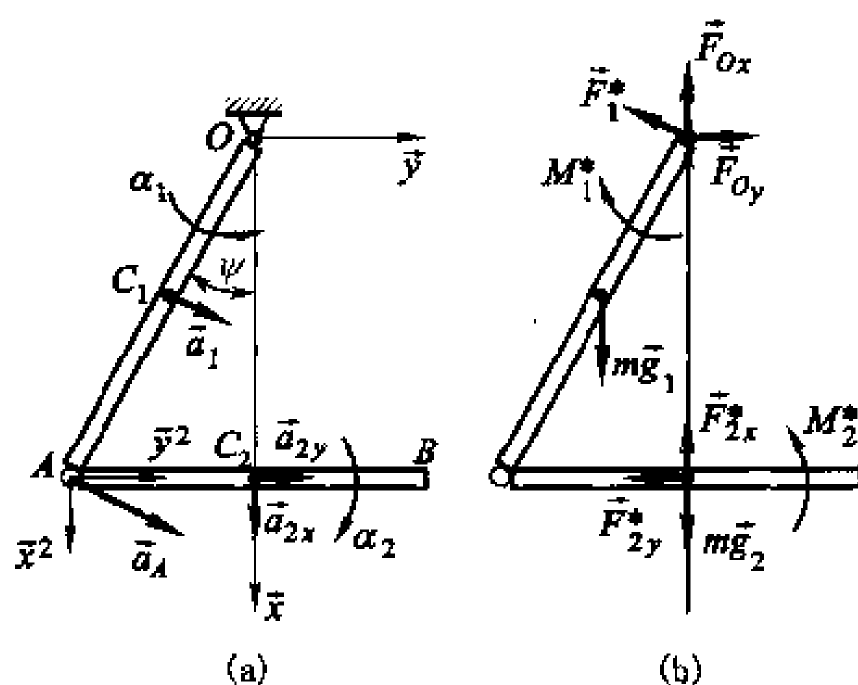
[例 6.1-5] 两根质量为 m,长为 l 的均质杆 OA 与 AB 以铰链连接,铰链 O 与机座连接。求在图示位置无初速开始运动时两杆的角加速度。

解: 这是由两个刚体组成的系统。首先对两杆在图示瞬时的运动状态进行分析。其中 OA 作定轴转动。由已知条件,该瞬时角速度为零,设定瞬时角加速度 α_1 的方向如图 a 所示。其质心 C_1 与点 A 只有牵连切向加速度,方向分别如图 a,大小分别为

$$a_1 = \alpha_1 l/2,\quad a_A = \alpha_1 l \tag{1}$$

杆 AB 作平面运动。过点 A 建立连体基。由已知条件,该瞬时角速度为零,设定瞬时角加速度 α_2 的方向如图 a 所示。由式(2.4-30),质心 C_2 的加速度在连体基的坐标阵为

$$\boldsymbol{a}'_2 = \boldsymbol{a}'_A - \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}'_2\alpha_2 \tag{2}$$



例6.1－5图

由图a，$\boldsymbol{a}'_A = \alpha_1 l(\sin\psi \quad \cos\psi)^{\mathrm{T}}$。考虑到 $\boldsymbol{\rho}'_2 = (0 \quad l/2)^{\mathrm{T}}$，由式(2)得到质心 C_2 的加速度为

$$a'_{2x} = \alpha_1 l\sin\psi + l\alpha_2/2,\ a'_{2y} = \alpha_1 l\cos\psi \tag{3}$$

根据上面的运动学分析，将惯性力进行简化。对于杆 OA，向 O 进行简化，有主矢 $\vec{F}_1^*$ 与 $\vec{M}_1^*$ 方向如图所示，考虑到式(1)，大小分别为

$$F_1^* = m\alpha_1 l/2,\ M_1^* = J_{1O}\alpha_1 \tag{4}$$

对于杆 AB，向 C_2 进行简化，有主矢 $\vec{F}_{2x}^*$，$\vec{F}_{2y}^*$ 与主矩 $\vec{M}_2^*$，方向如图所示，考虑到式(3)，大小分别为

$$F_{2x}^* = m\alpha_1 l\sin\psi + ml\alpha_2/2,\ F_{2y}^* = m\alpha_1 l\cos\psi,\ M_2^* = J_{2C}\alpha_2 \tag{5}$$

系统受到的外力有重力 $m_1\vec{g}$，$m_2\vec{g}$ 与铰 O 对杆 OA 的理想约束力 $\vec{F}_{Ox}$ 与 $\vec{F}_{Oy}$，后者的方向设定如图b所示。根据达朗贝尔原理，图b所示的力系平衡。为了直接求得两杆的瞬时角加速度，尽量不出现未知的约束力，首先对点 O 建立力矩的平衡方程，有

$$M_2^* - M_1^* - F_{2y}^* l\cos\psi + mgl\sin\psi/2 = 0$$

将式(4)与(5)代入，考虑到 $J_{1O} = ml^2/3$，$J_{2C} = ml^2/12$ 与 $\psi = \pi/6$，上式变为

$$13\alpha_1 - \alpha_2 = 3g/l \tag{6}$$

还需1个方程。考虑杆 AB，对点 A 的力矩平衡方程，将不出现 A 处的约束力，有

$$M_2^* + F_{2x}^* l/2 - mgl/2 = 0$$

将式(5)代入，上式变为

$$3\alpha_1 - 4\alpha_2 = 6g/l \tag{7}$$

由式(6)与(7)可解得

$$\alpha_1 = 18g/55l,\ \alpha_2 = 69g/55l$$

在此基础上，读者可求出约束力 $\vec{F}_{Ox}$ 与 $\vec{F}_{Oy}$。

3. 定轴转动刚体动力学问题　动反力

在 5.2.1 定义满足平面运动动力学条件的刚体为平面刚体，当该刚体在作定轴运动时，轴上的理想约束力在刚体的运动平面上。下面将要讨论不满足平面运动动力学条件的刚体在绕定轴 Oz 的转动情况。如图 6－3 所示，Oz 轴不是刚体的主轴，刚体的质心 C 也不在转轴上。这是刚体定轴转动的一般情况。

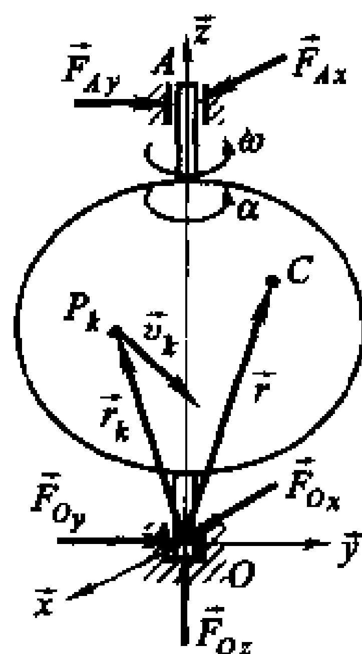


图 6－3　刚体定轴转动

如图 6－3 所示，过定点 O 建立连体基 $\underline{\vec{e}} = (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})^T$。令刚体绕 Oz 轴的转角为 φ，转动角速度矢量与角加速度矢量分别为

$$\vec{\omega} = \omega\vec{z} = \dot{\varphi}\vec{z},\ \vec{\alpha} = \alpha\vec{z} = \dot{\omega}\vec{z} = \ddot{\varphi}\vec{z} \tag{6.1-17}$$

刚体上的质点 P_k 的速度为

$$\dot{\vec{r}}_k = \omega\vec{z} \times \vec{r}_k \tag{6.1-18}$$

其加速度为

$$\ddot{\vec{r}}_k = \alpha\vec{z} \times \vec{r}_k + \omega^2\vec{z} \times (\vec{z} \times \vec{r}_k) \tag{6.1-19}$$

质点 P_k 的惯性力为

$$\vec{F}_k^{\,*} = -m_k\ddot{\vec{r}}_k = -\alpha m_k\vec{z} \times \vec{r}_k - \omega^2 m_k\vec{z} \times (\vec{z} \times \vec{r}_k) \tag{6.1-20}$$

对于质心 C，其加速度为

$$\ddot{\vec{r}} = \alpha\vec{z} \times \vec{r} + \omega^2\vec{z} \times (\vec{z} \times \vec{r}) \tag{6.1-21}$$

由式(6.1－9)，定轴转动刚体惯性力的主矢为

$$\vec{F}^{\,*} = -m\ddot{\vec{r}} = -m\alpha\vec{z} \times \vec{r} - m\omega^2\vec{z} \times (\vec{z} \times \vec{r}) \tag{6.1-22}$$

下面计算刚体的惯性力关于定点 O 的矩。由定义

$$\vec{M}_O^{\,*} = \sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\,*} = -\alpha\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{r}_k \times (\vec{z} \times \vec{r}_k) - \omega^2\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{r}_k \times [\vec{z} \times (\vec{z} \times \vec{r}_k)]$$

考虑到式(1.2－13)，有

$$\vec{r}_k \times [\vec{z} \times (\vec{z} \times \vec{r}_k)] = -(\vec{z} \cdot \vec{r}_k)(\vec{z} \times \vec{r}_k)$$
$$\vec{r}_k \times (\vec{z} \times \vec{r}_k) = r_k^2\vec{z} - (\vec{z} \cdot \vec{r}_k)\vec{r}_k$$

将两式代入，得到定轴转动刚体惯性力对点 O 的主矩为

$$\vec{M}_O^{\,*} = -\sum_{k=1}^{n}m_k[\alpha r_k^2\vec{z} - \alpha(\vec{z} \cdot \vec{r}_k)\vec{r}_k - \omega^2(\vec{z} \cdot \vec{r}_k)(\vec{z} \times \vec{r}_k)] \tag{6.1-23}$$

由式(6.1－22)与(6.1－23),可得到惯性力的主矢与主矩在连体基的坐标阵[①]

$$\boldsymbol{F}^{*} = -m\alpha\tilde{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{r} - m\omega^{2}\tilde{\boldsymbol{z}}\tilde{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{r} \qquad (6.1-24)$$

$$\boldsymbol{M}_{O}^{*} = -\sum_{k=1}^{n} m_{k}\left[\alpha r_{k}^{2}\boldsymbol{z} - \alpha(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{k})\boldsymbol{r}_{k} - \omega^{2}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{k})(\tilde{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{r}_{k})\right] \qquad (6.1-25)$$

考虑到

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{z}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_{k} = \begin{pmatrix} x_{k} \\ y_{k} \\ z_{k} \end{pmatrix},\quad r_{k}^{2} = x_{k}^{2} + y_{k}^{2} + z_{k}^{2}$$

由式(6.1－24),得到惯性力主矢在连体基的坐标阵

$$\boldsymbol{F}^{*} = m\begin{pmatrix} \alpha y + \omega^{2}x \\ -\alpha x + \omega^{2}y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6.1-24')$$

可见,惯性力的主矢在 Oz 轴上的坐标为零。由式(6.1－25)得到惯性力主矩的表达式

$$\boldsymbol{M}_{O}^{*} = \sum_{k=1}^{n} m_{k}\left[\alpha\begin{pmatrix} z_{k}x_{k} \\ z_{k}y_{k} \\ -x_{k}^{2} - y_{k}^{2} \end{pmatrix} + \omega^{2}\begin{pmatrix} -z_{k}y_{k} \\ z_{k}x_{k} \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

考虑到转动惯量与惯性积的定义式(4.2－2)与(4.2－4),上式可简写为

$$\boldsymbol{M}_{O}^{*} = \begin{pmatrix} J_{zx}\alpha - J_{zy}\omega^{2} \\ J_{zx}\alpha + J_{zy}\omega^{2} \\ -J_{z}\varepsilon \end{pmatrix} \qquad (6.1-25')$$

显然,当 Oz 轴为刚体的主轴时,即当 $J_{zx} = J_{zy} = 0$ 时,惯性力的主矩为

$$\vec{M}_{O}^{*} = -J_{z}\alpha\vec{z}$$

与式(6.1－14)对照可知,此时,刚体的定轴转动退化为平面刚体的定轴转动。

如果作用于刚体的主动力关于点 O 的主矢与主矩分别为 $\vec{F}^{a}$,$\vec{M}_{O}^{a}$,如图定义两轴承上的理想约束力 $\vec{F}_{Ax}$,$\vec{F}_{Ay}$,$\vec{F}_{Ox}$,$\vec{F}_{Oy}$ 与 $\vec{F}_{Oz}$。根据达朗贝尔原理,定轴转动的每个瞬时有如下平衡方程:

$$\sum_{k} F_{kx} = 0,\quad F_{x}^{*} + F_{x}^{a} + F_{Ax} + F_{Ox} = m\alpha y + m\omega^{2}x + F_{x}^{a} + F_{Ax} + F_{Ox} = 0 \qquad (6.1-26a)$$

$$\sum_{k} F_{ky} = 0,\quad F_{y}^{*} + F_{y}^{a} + F_{Ay} + F_{Oy} = -m\alpha x +$$

① 为了书写简洁,这节中矢量关于连体基的坐标阵的上标“′”省略。

$$m\omega^2 y + F_y^* + F_{Ay} + F_{Oy} = 0 \qquad (6.1-26b)$$

$$\sum_k F_{kz} = 0,\quad F_z + F_{Oz} = 0 \qquad (6.1-26c)$$

$$\sum_k M_{Ox}(\vec{F}_k) = 0,\quad M_{Ox}^* + M_{Ox}^a + \vec{r}_A \times \vec{F}_{Ay} = J_{xz}\alpha -$$

$$J_{zy}\omega^2 + M_{Ox}^a + \vec{r}_A \times \vec{F}_{Ay} = 0 \qquad (6.1-26d)$$

$$\sum_k M_{Oy}(\vec{F}_k) = 0,\quad M_{Oy}^* + M_{Oy}^a + \vec{r}_A \times \vec{F}_{Ax} = J_{zy}\alpha +$$

$$J_{zx}\omega^2 + M_{Oy}^a + \vec{r}_A \times \vec{F}_{Ax} = 0 \qquad (6.1-26e)$$

$$\sum_k M_{Oz}(\vec{F}_k) = 0,\quad M_{Oz}^* + M_{Oz}^a = -J_z\alpha + M_{Oz} = 0 \qquad (6.1-26f)$$

由以上 6 个方程可以解出理想约束力。不难看出，理想约束力除了与主动力(称这部分的理想约束力为**静反力**)有关外，还与刚体的转动的角速度与角加速度有关，称这部分的理想约束力为**动反力**。显然，当质心的位置在 Oz 轴上，Oz 轴又是刚体的主轴的情况，或者说 Oz 轴为刚体的一个中心主轴情况下，即有 $x=y=0, J_{zx}=J_{zy}=0$，动反力为零。此时称该定轴转动刚体达到了**动平衡**。工程上，对于高速转动的部件，由于安装误差或部件的惯量分布不匀称，会引起很大的动反力(见下面的两个例子)。为此必须通过调整刚体的质量分布，保证转轴为一中心主轴。

[例 6.1-6] 图示一质量为 m 均质圆盘的转子以匀角速度旋转，转速 $n=12\ 000$ r/min。转轴为圆盘中心轴，圆盘的质心 C 偏离该轴为 $e=0.01$ cm。轴承的布置对称，离转子中心均为 l。求轴承动反力。

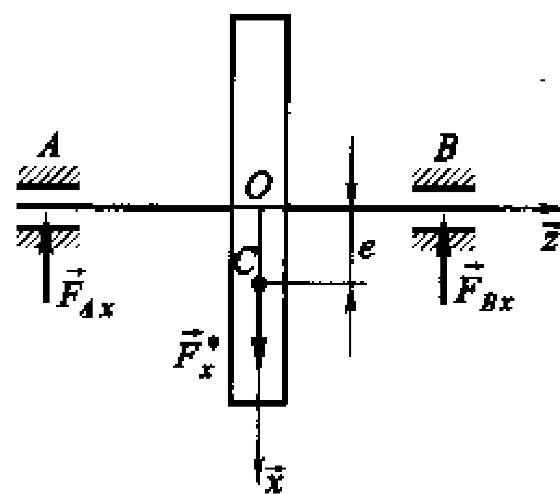
解： 按图过 O 建立连体基，质心 C 在该基上的坐标为 $x=e, y=0$。Oz 为主轴。由式(6.1-24)与(6.1-25)

$$F_x^* = m\omega^2 e,\ F_y^* = F_z^* = 0$$

$$M_{Ox}^* = M_{Oy}^* = M_{Oz}^* = 0$$

分别对点 A 与 B 取矩，可得动反力

$$F_{Ax} = F_{Bx} = m\omega^2 e/2 = m\left(\frac{n\pi}{30}\right)^2 e/2 = 16.1mg/2$$



例 6.1-6 图

如果转子不动，静反力为 $mg/2$。可见质心 C 偏离转轴 $e=0.01$ cm 引起的动反力是静反力的 16 倍。此外，动反力与角速度的平方成正比，当角速度增加时，上述的倍数将急剧增加。

[例 6.1-7] 考虑上例的转子的质心 C 偏置为零，但转轴与圆盘中心轴有如图所示一小偏角 $\theta=1°$ 的情况。转速 $n=12\ 000$ r/min，轴承的布置对称，离转子中心均为 $l=0.5$ m。求轴承动反力。

解： 如图所示质心 C 和点 O 重合，过 C 建立两个连体基 $\vec{e}'$ 与 $\vec{e}$。其中 $\vec{e}'$ 为中心主轴坐标系。

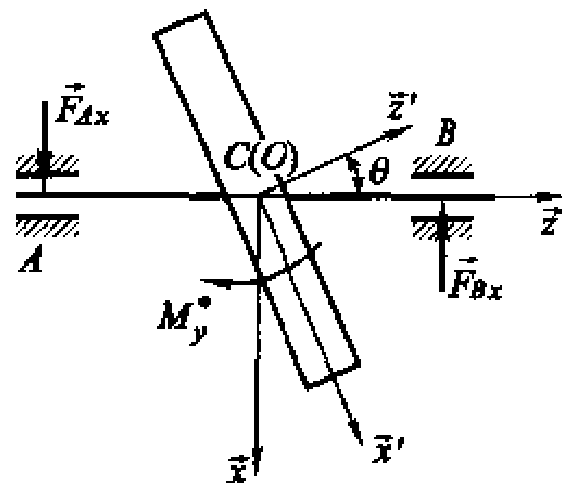
质心 C 的坐标为 $x=y=z=0$。Oz 不是主轴。但 Oy 仍为主轴，故 $J_{zy}=0$，$J_{zx}\neq 0$。由式(6.1-24)与(6.1-25)

$$F_x^*=F_y^*=F_z^*=0$$

$$M_{Ox}^*=0,\ M_{Oy}^*=J_{zx}\omega^2,\ M_{Oz}^*=0$$

考虑到对称性，由图可知 F_{Ax} 与 F_{Bx} 构成力偶与惯性力矩 M_{Oy}^* 平衡，有

$$F_{Ax}=F_{Bx}=J_{zx}\left(\frac{n\pi}{30}\right)^2/2l=J_{zx}\omega^2/2l \qquad (1)$$



例 6.1-7 图

由例 4.2-2 已得到计算 J_{zx} 的公式

$$J_{zx}=(J_{z'}-J_{x'})\sin\theta\cos\theta=\frac{mr^2}{4}\sin\theta\cos\theta$$

将其与已知条件代入式(1)，得

$$F_{Ax}=F_{Bx}=56.4mg/2$$

可见，与静反力 $mg/2$ 比较，转轴与圆盘中心轴的小偏角 $\theta=1°$ 引起的动反力为静反力的 56 倍多。此外，动反力与角速度的平方成正比，当角速度增加时，上述的倍数将急剧增加。

6.2 虚位移原理

虚位移原理为分析静力学的一个基本原理。与矢量力学处理静力学问题不同，它是从力的功出发直接建立起系统处于平衡时主动力之间的关系。该原理与达朗贝尔原理一起构成了分析动力学的基础。

6.2.1 虚位移

在描述受约束刚体与刚体系的位形时，在 3.1 节引入了约束方程的概念。本节讨论的对象定为更普遍的情况，即讨论一受约束的质点系。系统中有 n 个质点 $P_k(k=1,\cdots,n)$，其在参考基 $\vec{e}^r$ 的位置由矢径 $\vec{r}_k$ 确定。质点系的位形由如下坐标阵确定：

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \qquad (6.2-1)$$

式中：$\boldsymbol{r}_k=(x_k \quad y_k \quad z_k)^{\mathrm{T}}$ 为质点 P_k 的矢径 $\vec{r}_k$ 在基 $\vec{e}^r$ 的坐标阵；坐标阵 $\boldsymbol{q}$ 为 $3n$ 维的列阵。所谓质点系受约束是指这些质点的位置不独立，受到牵制。如果可用如下矢径与时间的约束方程表示，称这些约束为**完整约束**。

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0} \tag{6.2-2}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_s)^{\mathrm{T}}$；$s$ 为约束方程的个数。方程中不显含时间 t 的约束称为**定常约束**，否则称为**非定常约束**。

在外力的作用下，质点系的运动规律 $\boldsymbol{q}(t)$ 取决于动力学方程（包括初始条件）与质点系受到的约束方程(6.2－2)。两者均满足的运动就是实际发生的运动，称为真实运动。真实运动在无限小时间间隔内产生的位移称为质点系的**实位移**，记为 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}$，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q}=(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{6.2-3}$$

仅满足约束方程的运动称为**可能运动**，可能运动在无限小时间间隔内产生的位移称为质点系的**可能位移**，记为 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*$，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*=(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1^{*\mathrm{T}} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2^{*\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_n^{*\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{6.2-4}$$

可见，实位移是可能位移中的一种。

计算约束方程(6.2－2)对时间的微分，有

$$\boldsymbol{\Phi}_q\mathrm{d}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}_t\mathrm{d}t=\boldsymbol{0} \tag{6.2-5}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}_q$ 与 $\boldsymbol{\Phi}_t$ 的定义见式(1.1－37)与(1.1－36)，前者为约束方程(6.2－2)的雅可比。

取质点系在同一时刻、同一位置的两组可能位移，记为 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1^*$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2^*$，它们均应满足方程(6.2－5)，即

$$\boldsymbol{\Phi}_q\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1^*+\boldsymbol{\Phi}_t\mathrm{d}t=\boldsymbol{0} \tag{6.2-6}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_q\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2^*+\boldsymbol{\Phi}_t\mathrm{d}t=\boldsymbol{0} \tag{6.2-7}$$

将这两组可能位移之差定义为质点系的**虚位移**，记为 $\delta\boldsymbol{q}$，即

$$\delta\boldsymbol{q}=\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2^*-\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1^* \tag{6.2-8}$$

将式(6.2－7)减去式(6.2－6)，得到虚位移 $\delta\boldsymbol{q}$ 必须满足的方程

$$\boldsymbol{\Phi}_q\delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0} \tag{6.2-9}$$

由式(6.2－9)，可将虚位移理解为约束方程的等时变分。等时变分算子 $\delta(\ )$ 与微分算子 $\mathrm{d}(\ )$ 有类似的运算规则，但 $\delta t=0$。比较式(6.2－7)与(6.2－3)可知，对于定常约束，虚位移即为可能位移，实位移为无数虚位移之一。对于非定常约束，方程(6.2－7)与(6.2－3)不同，因此虚位移一般不是可能位移，实位移一般也不是无数虚位移之一。

由于有约束方程(6.2－2)的存在，描述质点系位形的 $3n$ 个坐标相互不独立。如果 s 个约束方程是独立的，坐标阵 $\boldsymbol{q}$ 中有 $\delta=3n-s$ 个是独立坐标，记为

$\boldsymbol{w}$；s 个为非独立坐标，记为 $\boldsymbol{u}$。故有 $\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，约束方程(6.2-2)的雅可比可写为 $\boldsymbol{\Phi}_q=(\boldsymbol{\Phi}_u\quad \boldsymbol{\Phi}_w)$。当 $\boldsymbol{\Phi}_u$ 为满秩时，由式(6.2-9)可得非独立坐标的虚位移与独立坐标虚位移之间的关系

$$\delta \boldsymbol{u}=-\boldsymbol{\Phi}_u^{-1}\boldsymbol{\Phi}_w\delta \boldsymbol{w} \tag{6.2-10}$$

需要指出的是独立坐标不一定为原坐标阵 $\boldsymbol{q}$ 中的坐标，可定义另外 δ 个标量作为独立坐标 $\boldsymbol{w}$，故这些独立坐标又称为**广义坐标**，如果坐标阵 $\boldsymbol{q}$ 的所有坐标总可以表示为这些独立坐标的函数，即有

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{w},t) \tag{6.2-11}$$

那么该独立坐标 $\boldsymbol{w}$ 也完全确定了质点系的位形。式(6.2-11)隐含着系统的约束方程(6.2-2)。这样真实位移与独立坐标真实位移之间的关系为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_w\mathrm{d}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{q}_t\mathrm{d}t \tag{6.2-12}$$

式中，$\boldsymbol{q}_w$ 与 $\boldsymbol{q}_t$ 为函数 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{w},t)$ 对变量 $\boldsymbol{w}$ 与 t 的偏导数(见式(1.1-37)与(1.1-36))。根据虚位移的定义，虚位移与独立坐标虚位移之间的关系为

$$\delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_w\delta\boldsymbol{w} \tag{6.2-13}$$

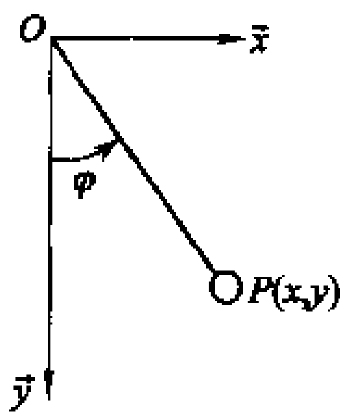
由上面的分析可知，如果要求某一质点的虚位移的表达式，可先写出该点坐标与广义坐标的表达式(6.2-11)，通过计算等时变分得到要求的虚位移表达式(6.2-13)。这种方法称为坐标法。另一种方法称为速度法。即先写出该点速度与广义坐标、广义速度的关系式，由式(6.2-11)，它们有如下的形式：

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{q}_w\dot{\boldsymbol{w}}+\boldsymbol{q}_t$$

由此式直接可得到微分式(6.2-12)，从而不难得到关系式(6.2-13)。

与直接取位形坐标作广义坐标相比，上述位形坐标与广义坐标虚位移的关系可回避雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_u$ 满秩的条件。见下面的例子。

[例6.2-1]　考虑图示一单摆，摆长为 l。求摆的虚位移。



例6.2-1图

解：如图建立惯性基。摆的坐标为 $\boldsymbol{q}=(x\quad y)^{\mathrm{T}}$。有一个约束方程为

$$\Phi=x^2+y^2-l^2=0 \tag{1}$$

故摆有1个自由度。令 y 为独立坐标，即 $w=(y)$；x 为非独立坐标即 $u=(x)$。摆的虚位移为 $\delta\boldsymbol{q}=(\delta x\quad \delta y)^{\mathrm{T}}$。下面推导 δx 与 δy 的关系。由于约束方程(1)的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q=(\boldsymbol{\Phi}_u\quad \boldsymbol{\Phi}_w)=(2x\quad 2y)$$

当 $x\neq0$，$\boldsymbol{\Phi}_u$ 为满秩，代入式(6.2-10)，有 $\delta x=-\dfrac{y}{x}\delta y$。故

$$\delta \boldsymbol{q}=\begin{Bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-y/x\\ 1\end{Bmatrix}\delta y \qquad (x\neq 0)$$

如果定义摆绳与铅垂轴的夹角 φ 为广义坐标。摆的坐标 $\boldsymbol{q}$ 与角 φ 的关系为

$$x=l\sin\varphi,\ y=l\cos\varphi$$

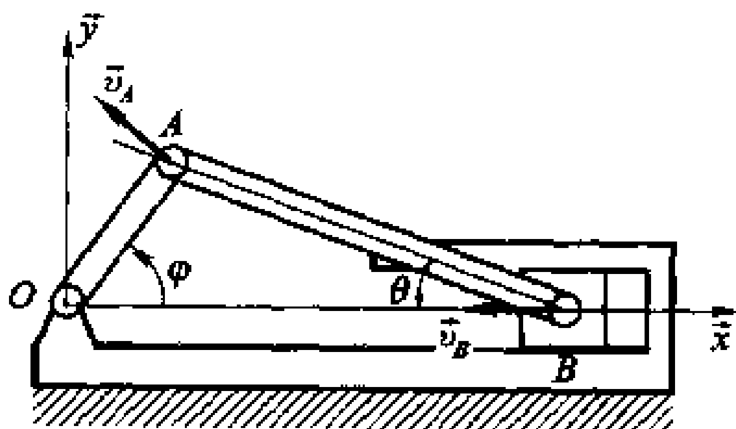
求等时变分，得到摆的虚位移与广义坐标虚位移的关系，即

$$\delta x=l\cos\varphi\delta\varphi,\ \delta y=-l\sin\varphi\delta\varphi$$

$$\delta \boldsymbol{q}=\begin{Bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}l\cos\varphi\\ -l\sin\varphi\end{Bmatrix}\delta\varphi$$

比较两种方法可知，合理选取广义坐标将得到较为简洁的点的虚位移的表达式.

[**例 6.2－2**] 图示一曲柄滑块机构，曲柄长 r，连杆长 l。该机构只有一个独立变量。令曲柄的转角 φ 为广义坐标，求点 A 与 B 的虚位移与该广义坐标虚位移的关系。



例 6.2－2 图

解： 方法 1(坐标法)：写出点 A 与 B 的坐标，即

$$x_A=r\cos\varphi,\quad y_A=r\sin\varphi$$

$$x_B=r\cos\varphi+l\cos\theta,\quad y_B=0$$

取等时变分

$$\delta x_A=-r\sin\varphi\delta\varphi,\quad \delta y_A=r\cos\varphi\delta\varphi \tag{1}$$

$$\delta x_B=-r\sin\varphi\delta\varphi-l\sin\theta\delta\theta,\quad \delta y_B=0 \tag{2}$$

为了消去 θ，考虑约束方程

$$r\sin\varphi-l\sin\theta=0 \tag{3}$$

取等时变分，经整理，有

$$\delta\theta=(r\cos\varphi/l\cos\theta)\delta\varphi$$

将其代入上式的第一式，有

$$\delta x_B = -[r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta]\delta\varphi \tag{4}$$

式中,θ 与 φ 的关系由式(3)可以得到。

方法2(速度法):写出点 A 与点 B 的速度。

曲柄作定轴转动,点 A 的速度 $\vec{v}_A$ 垂直于曲柄,方向如图,大小为 $v_A = r\dot{\varphi}$,故有

$$\dot{x}_A = v_{Ax} = -v_A\sin\varphi = -r\dot{\varphi}\sin\varphi,\quad \dot{y}_A = v_{Ay} = v_A\cos\varphi = r\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{5}$$

连杆作平面运动,考虑到连杆的长度不可改变,点 A 与点 B 的速度矢量在杆上的投影相等,有

$$v_A\cos(\pi/2-\varphi-\theta) = v_B\cos\varphi$$

故有

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_B &= v_{Bx} = -v_B = -v_A\cos(\pi/2-\varphi-\theta)/\cos\varphi = -r\dot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)/\cos\varphi\\ \dot{y}_B &= 0\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由式(5)与(6)可得到真实位移的表达式

$$\mathrm{d}x_A = -r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,\mathrm{d}y_A = -r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}x_B = -[r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta]\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}y_B = 0$$

由此可直接得到虚位移的表达式(1),(2)与(4)

6.2.2 虚位移原理及其应用

虚位移原理表达如下:具有双面理想约束的质点系,其平衡的充分必要条件为系统内所有主动力对于质点系的任意虚位移所作的元功之和为零,即

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{a}\cdot\delta\vec{r}_k = 0 \tag{6.2-14}$$

主动力对虚位移所作的元功 δW 称为**虚功**,故虚位移原理也称为**虚功原理**。

虚位移原理的最大的优点是当质点系平衡时直接给出了主动力之间的关系而避免出现理想约束力。

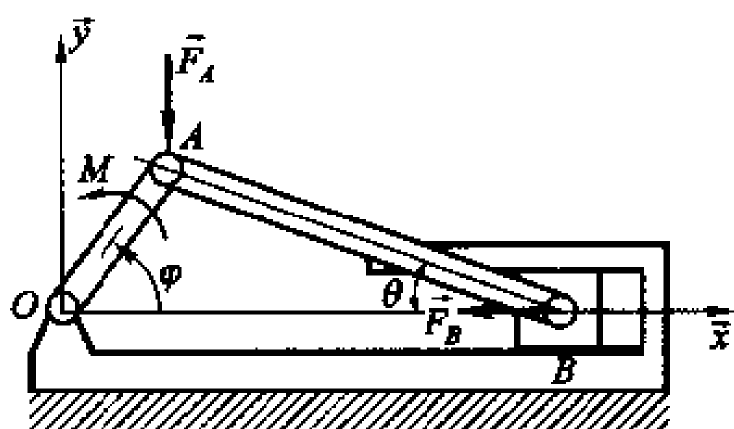
[例 6.2-3] 图示一曲柄滑块机构,曲柄长 r,连杆长 l。在图示位置,系统受到力偶 M、铅垂力 $\vec{F}_A$ 与水平力 $\vec{F}_B$,该机构处于平衡,求这些主动力(偶)之间的关系。

解: 以系统为对象,由虚位移原理(6.2-14),有

$$M\delta\varphi - F_A\delta y_A - F_B\delta x_B = 0$$

注意 F_A 与 F_B 前的负号是因为两力定义的方向分别与两虚位移 $\delta\vec{y}_A$ 与 $\delta\vec{x}_B$ 方向相反。

将例 6.2-2 中的虚位移的关系式(1),(2)与(4)代入上式,有



例 6.2-3 图

$$[M - F_A r\cos\varphi + F_B r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta]\delta\varphi = 0 \tag{1}$$

由于 $\delta\varphi$ 为独立坐标的变分，故得到主动力(偶)之间的关系为

$$M - F_A r\cos\varphi + F_B r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta = 0$$

其中，θ 与 φ 的关系由例 6.2-1 中式(3)可以得到。如果主动力与力偶为已知，由上式与例 6.2-1 中式(3)可得到机构平衡时的位形坐标 φ。如果角 φ(与 θ)给定，上式给出了在该位形达到平衡时主动力与力偶应满足的条件。

从上例求解平衡问题的过程可知，通常以整个系统为对象，在分析系统的受力时不考虑理想约束力，只考虑主动力(包括非理想约束力部分)。这对解决复杂机构的平衡问题带来很大的方便。

[例 6.2-4] 图示机构是由八根连杆铰接成三个相同的菱形。菱形的边长为 b，铰 O 固定，铰 A，B 与 C 限定在铅垂线上运动。不计各杆的重量，求机构在如图所示位置处于平衡时，力 F_A 与 F_C 的比。

解：根据已知条件，该机构有一个自由度，即当角 φ 给定后机构位形确定。

以系统为对象，由虚位移原理(6.2-14)，有

$$-F_A\delta y_A + F_C\delta y_C = 0 \tag{1}$$

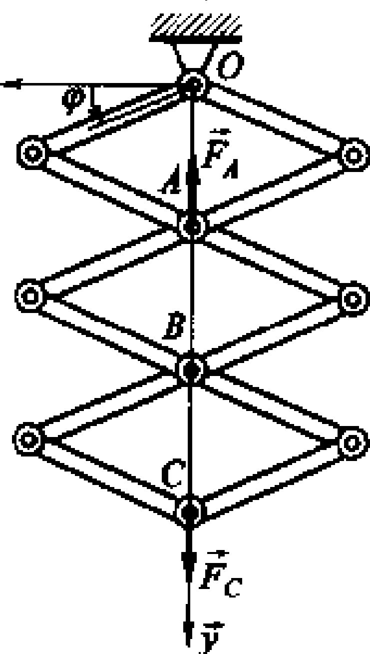
下面考虑虚位移之间的关系。由图可知点 A 与 C 的 y 坐标分别为

$$y_A = 2b\sin\varphi,\ y_C = 6b\sin\varphi$$

取等时变分，

$$\delta y_A = 2b\cos\varphi\delta\varphi,\ \delta y_C = 6b\cos\varphi\delta\varphi$$

将其代入式(1)，考虑到 $\delta\varphi$ 为独立坐标的变分，有



例 6.2-4 图

$$\frac{F_A}{F_C}=\frac{\delta y_C}{\delta y_A}=3$$

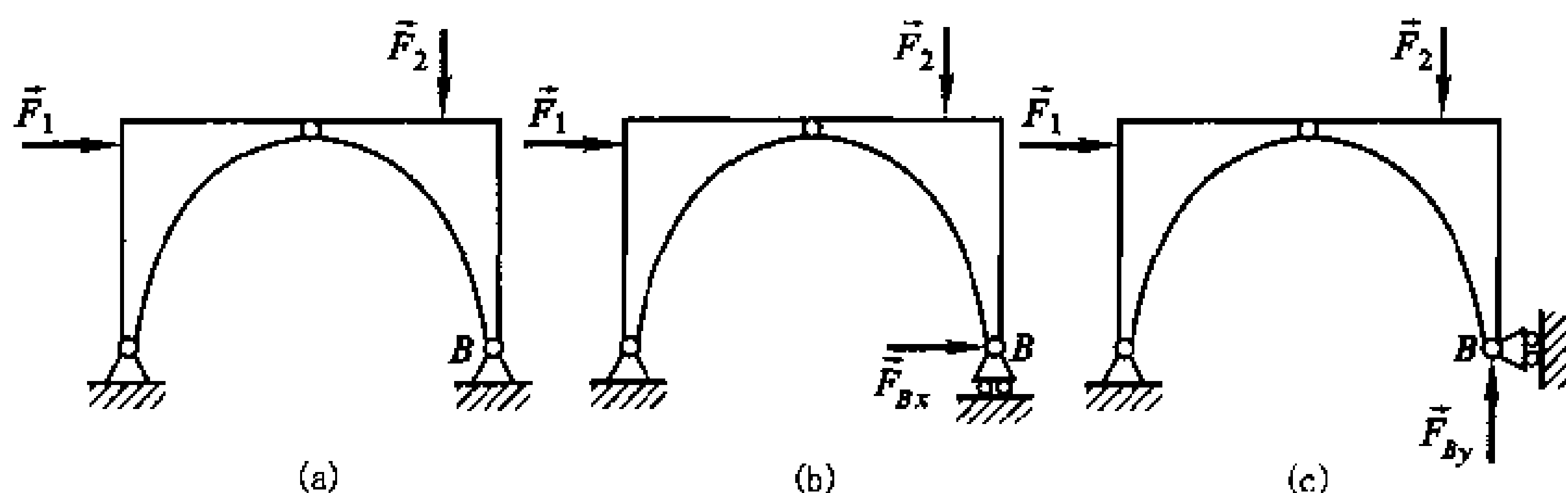


图 6－4　利用虚功原理求约束反力

上述的例子说明利用虚功原理可处理有运动自由度刚体系的平衡问题，可得到刚体系平衡时主动力的关系或平衡时的位形。对于求一无自由度结构的理想约束力问题可采取如下的方法，即将与待求的约束力相关的约束解除，把该约束力作为主动力处理，从而可得到它与主动力的关系。如图 6－4 所示的一三铰拱桥受到主动力 $\vec F_1$ 与 $\vec F_2$ 的作用。这是一个结构，系统无自由度。如果要求支座 B 的约束力，可以先解除支座 B 的 x 方向的约束，引入约束力 $\vec F_{Bx}$（见图 6－4b）。系统有一个自由度，利用虚功原理可求出该约束力与主动力的关系。然后，解除支座 B 的 y 方向的约束，引入约束力 $\vec F_{By}$（见图 6－4c），同样利用虚功原理可求出该约束力与主动力的关系。

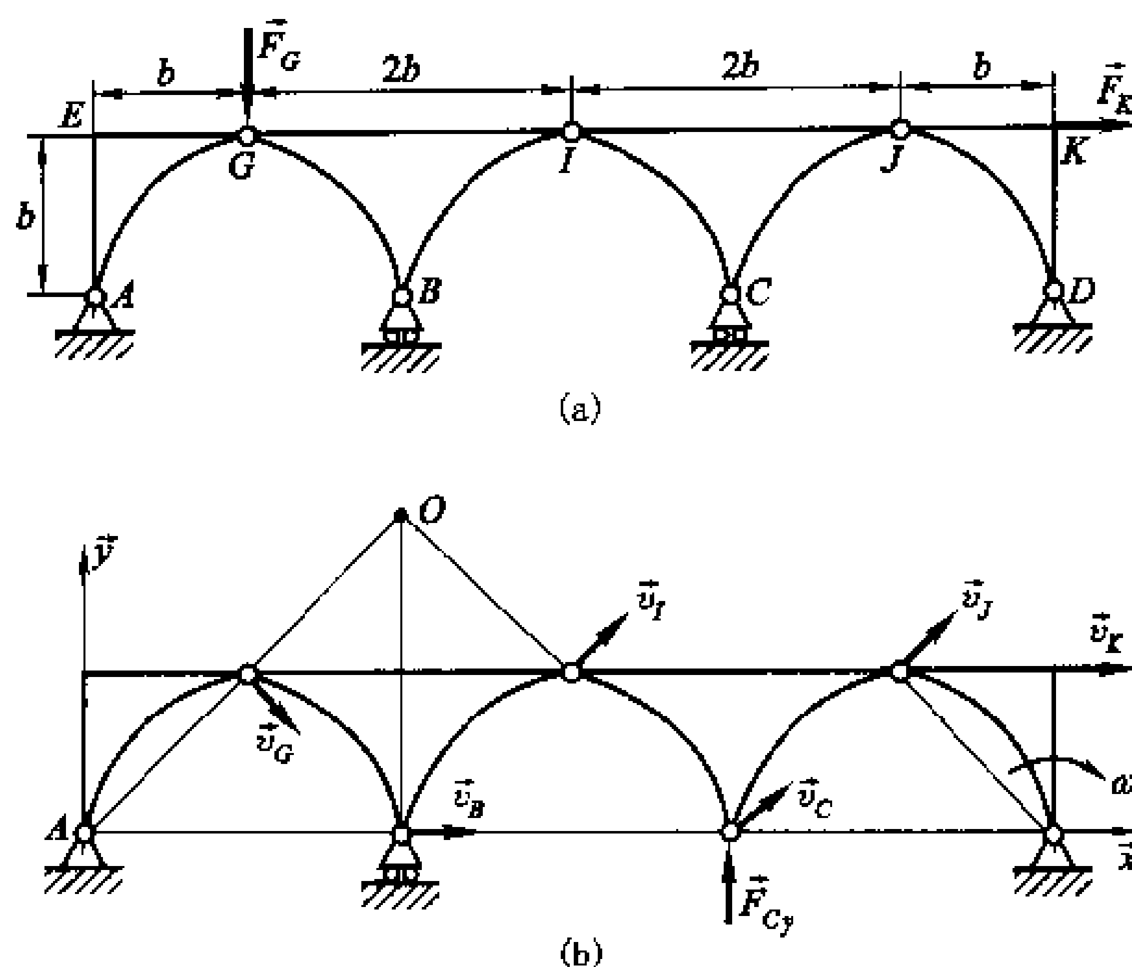
［例 6.2－5］　图示一三孔拱桥，不计桥自重，桥上有两集中载荷 $\vec F_G$ 与 $\vec F_K$，求支座 C 的理想约束力。

解： 如图所示，解除约束 C，加上约束反力 $\vec F_{Cy}$。系统有一个自由度。由虚功原理(6.2－14)，有

$$F_{Cy}\delta y_C - F_G\delta y_G + F_K\delta x_K = 0 \tag{1}$$

下面推导虚位移之间的关系。本例用速度法比较方便。图 b 上画出了几个特殊点的速度方向。由 $\vec v_D$ 与 $\vec v_H$ 的方向可得到刚体 BGI 的瞬时速度中心 O，由此可得到速度 $\vec v_I$。考虑到速度 $\vec v_J$ 与 $\vec v_I$ 平行，故刚体 CIJ 作瞬时平移，由此速度 $\vec v_C$ 与 $\vec v_I$ 相等。根据上面分析，令绕铰 D 的角速度为 $\omega=\dot\varphi$，有 $v_K=\omega b$，$v_C=v_I=v_J=\omega\sqrt{2}b$。由于 $OG=OI$，故 $v_G=v_I=\omega\sqrt{2}b$。这样，

$$\dot x_K=v_K=b\dot\varphi,\ \dot y_C=v_C\cos(\pi/4)=b\dot\varphi,\ \dot y_G=-v_C\cos(\pi/4)=-b\dot\varphi$$



例6.2-5图

由此可得到虚位移的关系

$$\delta x_K = b\delta\varphi, \delta y_C = b\delta\varphi, \delta y_G = -b\delta\varphi$$

将其代入式(1),有

$$(F_{Cy} - F_G + F_K)\delta\varphi = 0 \tag{2}$$

考虑到 $\delta\varphi$ 为独立坐标的变分,有

$$F_{Cy} = -F_G - F_K$$

6.2.3 质点系的平衡条件

1. 广义力及由其描述的质点系平衡条件

从上节的例子,可以总结利用虚位移原理解决系统平衡问题的过程。首先写出主动力的虚功的表达式;由于各点的虚位移不独立,通过运动学的关系(或位置关系或速度关系)作等时变分,得到各点的虚位移与独立坐标变分的关系式;最后代入虚功的表达式,得到只含独立坐标变分的等式,从而得到了主动力的关系。上节的例子均为单自由度系统,本节将上述方法推广到一般的系统。

考虑质点系由 n 个质点 $P_k(k=1,\cdots,n)$ 组成,其在参考基 $\vec{e}^r$ 的位置由矢径 $\vec{r}_k$ 确定。系统的位形由 $3n$ 维坐标阵 $\boldsymbol{q}$(6.2-1)确定。由于存在 s 个独立的约束方程(6.2-2),可以定义 δ 个广义坐标 $\boldsymbol{w}$,即

$$\boldsymbol{w} = (w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_\delta)^{\mathrm{T}} \tag{6.2-15}$$

展开式(6.2-11)，质点 P_k 的矢径 $\vec{r}_k$ 的坐标阵与广义坐标 $\boldsymbol{w}$ 的关系可表示为

$$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{w},t) \quad (k=1,\cdots,n) \tag{6.2-16}$$

取等时变分，有

$$\delta \boldsymbol{r}_k=\sum_{j=1}^{\delta}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j}\delta w_j \quad (k=1,\cdots,n) \tag{6.2-17}$$

如果质点 P_k 上的主动力 $\vec{F}_k^{a}$ 在参考基的坐标阵为 $\boldsymbol{F}_k^{a}$，根据定义，系统的虚功可表示为

$$\begin{aligned}\delta W&=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{a}\cdot\delta\vec{r}_k=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^{a\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{r}_k=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^{a\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{\delta}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j}\delta w_j\right)\\&=\sum_{j=1}^{\delta}\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^{a\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j}\right)\delta w_j\end{aligned} \tag{6.2-18}$$

令

$$Q_j=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^{a\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.2-19}$$

称其为作用于系统所有主动力关于广义坐标 w_j 的**广义力**。由于 $Q_j\delta w_j$ 的量纲与功的量纲相同，故广义力的量纲取决于广义坐标的量纲。当 w_j 为长度时，Q_j 为力；w_j 为角度时，Q_j 为力偶。将式(6.2-19)代入式(6.2-18)，系统的总虚功可表示为

$$\delta W=\sum_{j=1}^{\delta}Q_j\delta w_j \tag{6.2-20}$$

读者不难从上节的例子中找到广义力。如例6.2-3中，由式(1)可得系统主动力关于独立坐标 φ 的广义力为 $Q_\varphi=M-F_A r\cos\varphi+F_B r\sin(\varphi+\theta)/\cos\theta$。由例6.2-5中由式(2)，可得系统主动力关于独立坐标 φ 的广义力为 $Q_\varphi=(F_{Cy}+F_G+F_K)b$。两惯性力的量纲均为力偶。

将式(6.2-20)代入虚功原理的表达式(6.2-14)，有

$$\delta W=\sum_{j=1}^{\delta}Q_j\delta w_j=0 \tag{6.2-21}$$

对于完整系统，广义坐标的变分 $\delta w_j(j=1,\cdots,\delta)$ 为独立变量，故有上式得

$$Q_j=0 \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.2-22}$$

因此**虚位移原理**可表示为：具有双面理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件为所有关于广义坐标的广义力均为零。

具体计算系统主动力关于广义坐标的广义力的方法有两种：

(1) 列出所有主动力的虚功，根据约束方程推导上述虚功表达式中虚位移与广义坐标虚位移的关系，利用式(6.2-18)进行广义坐标虚位移的同类项合并，即得到关于各广义坐标的广义力。上节的例子与本节的推导是以这种方法

进行的。

(2) 取某广义坐标的变分 δw_j,令其他广义坐标的变分为零,计算由于该变分引起的各主动力所作的虚功 δW_j,则广义力为

$$Q_j = \delta W_j / \delta w_j \tag{6.2-23}$$

[例 6.2-6] 图示一双摆,摆长分别为 l_1 与 l_2,质量分别为 m_1 与 m_2。在摆端 B 上受到一水平力 $\vec{F}$。求系统平衡时,双摆的位形。

解: 如图建立惯性基。质心 C_1 与 C_2 的坐标分别为

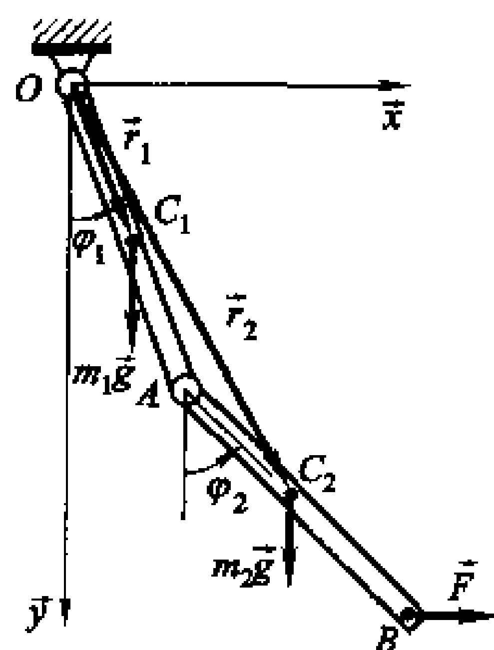
$$\boldsymbol{r}_1 = (x_1 \quad y_1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{r}_2 = (x_2 \quad y_2)^{\mathrm{T}}$$

如图所示,所有主动力的虚功为

$$\delta W = m_1 g \delta y_1 + m_2 g \delta y_2 + F \delta x_B \tag{1}$$

系统有 2 个自由度,取广义坐标 φ_1 与 φ_2。由约束条件可得

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= l_1 \cos \varphi_1 / 2 \\ y_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 / 2 \\ x_B &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$



例 6.2-6 图

采用上述的方法(2)求广义力。先令 $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_2 = 0$。对上式取等时变分有

$$\begin{cases} \delta y_1 = -(l_1 \sin \varphi_1 / 2) \delta \varphi_1 \\ \delta y_2 = -(l_1 \sin \varphi_1) \delta \varphi_1 \\ \delta x_B = (l_1 \cos \varphi_1) \delta \varphi_1 \end{cases}$$

将它们代入式(1),有

$$\delta W_{\varphi_1} = [-m_1 g (l_1 \sin \varphi_1 / 2) - m_2 g (l_1 \sin \varphi_1) + F (l_1 \cos \varphi_1)] \delta \varphi_1 \tag{3}$$

再令 $\delta\varphi_2 \neq 0, \delta\varphi_1 = 0$。对式(2)取等时变分有

$$\delta y_1 = 0, \quad \delta y_2 = -(l_2 \sin \varphi_2 / 2) \delta \varphi_2, \quad \delta x_B = (l_2 \cos \varphi_2) \delta \varphi_2$$

将它们代入(1),有

$$\delta W_{\varphi_2} = [-m_2 g (l_2 \sin \varphi_2 / 2) + F (l_2 \cos \varphi_2)] \delta \varphi_2 \tag{4}$$

由式(3)与(4),考虑到式(6.2-21),可得到系统关于广义坐标 φ_1 与 φ_2 的广义力,它们分别为

$$Q_{\varphi_1} = -m_1 g (l_1 \sin \varphi_1 / 2) - m_2 g (l_1 \sin \varphi_1) + F (l_1 \cos \varphi_1)$$

$$Q_{\varphi_2} = -m_2 g (l_2 \sin \varphi_2 / 2) + F (l_2 \cos \varphi_2)$$

由虚位移原理(6.2－20),上述两式均为零,从而可得平衡位置的位形坐标为

$$\varphi_1 = \arctan[2F/(m_1 g + 2m_2 g)]$$

$$\varphi_2 = \arctan(2F/m_2 g)$$

2. 势力场中质点系的平衡条件与稳定性

在势力场中(见4.5.3),质点系中的质点 $P_k(k=1,\cdots,n)$ 上受到的主动力均为有势力 $\vec{F}_k$,其势函数为

$$U_k = U_k(\boldsymbol{r}_k) \quad (k=1,\cdots,n) \tag{6.2-24}$$

式中 $\boldsymbol{r}_k$ 为质点P_k 的矢径 $\vec{r}_k$ 在参考基 $\vec{\boldsymbol{e}}^r$ 的坐标阵。由式(4.5－25),势力 $\vec{F}_k$ 在该基的坐标阵$\boldsymbol{F}_k$ 与势函数 U_k 的关系可写为

$$\boldsymbol{F}_k = (U_k)_r^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial U_k}{\partial \boldsymbol{r}_k}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \quad \frac{\partial U_k}{\partial y_k} \quad \frac{\partial U_k}{\partial z_k}\right)^{\mathrm{T}} \quad (k=1,\cdots,n) \tag{6.2-25}$$

将其代入式(6.2－19),得到系统关于广义坐标 w_j 的广义力的表达式为

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U_k}{\partial \boldsymbol{r}_k}\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U_k}{\partial w_j} \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.2-26}$$

考虑到式(6.2－16),势函数 U_k(6.2－24)可改写

$$U_k = U_k(\boldsymbol{q}) \quad (k=1,\cdots,n) \tag{6.2-27}$$

将系统的总势函数定义为

$$U(\boldsymbol{q}) = \sum_{k=1}^{n} U_k(\boldsymbol{q}) \tag{6.2-28}$$

这样由式(6.2－26),在势力场中,系统关于广义坐标 w_j 的广义力为

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial w_j} \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.2-29}$$

如果改用系统总势能函数 $V=-U$,上式可表为

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial w_j} \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.2-30}$$

有以上两式可知,在势力场中,系统关于某广义坐标的广义力或等于其势函数对该广义坐标的偏导数,或等于其势能函数对该广义坐标的偏导数的负值。

根据平衡的充要条件(6.2－22),得到

$$\frac{\partial V}{\partial w_j} = 0 \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.2-31}$$

由此得到结论:在势力场中,质点系在平衡位形处的势能取极值。

质点系平衡的另一个重要概念为质点系的平衡位形的稳定性。它是具有重要实际意义的问题。当质点系在某平衡位形处受到微小扰动时,其位形只在平衡位置附近运动而不产生明显的偏离,则称为该平衡位形是**稳定**的,否则称为**不稳定**。在实际问题中只有稳定的平衡位形才可能存在。判断平衡位形的经典定

理为**拉格朗日－狄利克雷**(P. G. L. Dirichlet)**定理**：若质点系在平衡位形上的势能具有极小值，则该平衡位形是稳定的。李雅普诺夫(A. M. Lyapunov)则提出：若质点系在平衡位形上的势能取极大，则平衡位置不稳定。

判断势能是否极小的判据是高等代数的内容。下面介绍几种简单的情况。

对于单自由度系统，对于 $q=q^*$，有

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=q^*}=0$$

则 $V(q^*)$取极值。若势能 $V(q)$的不等于零的最低阶导数是偶数阶，如果为正，则势能 $V(q)$在 $q=q^*$ 有极小，此时平衡位形 $q=q^*$ 为稳定；如果为负则势能 $V(q)$在 $q=q^*$ 有极小值，此时平衡位形 $q=q^*$ 为不稳定。

对于二自由系统，对于 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*=(q_1^* \quad q_2^*)^{\mathrm{T}}$，有

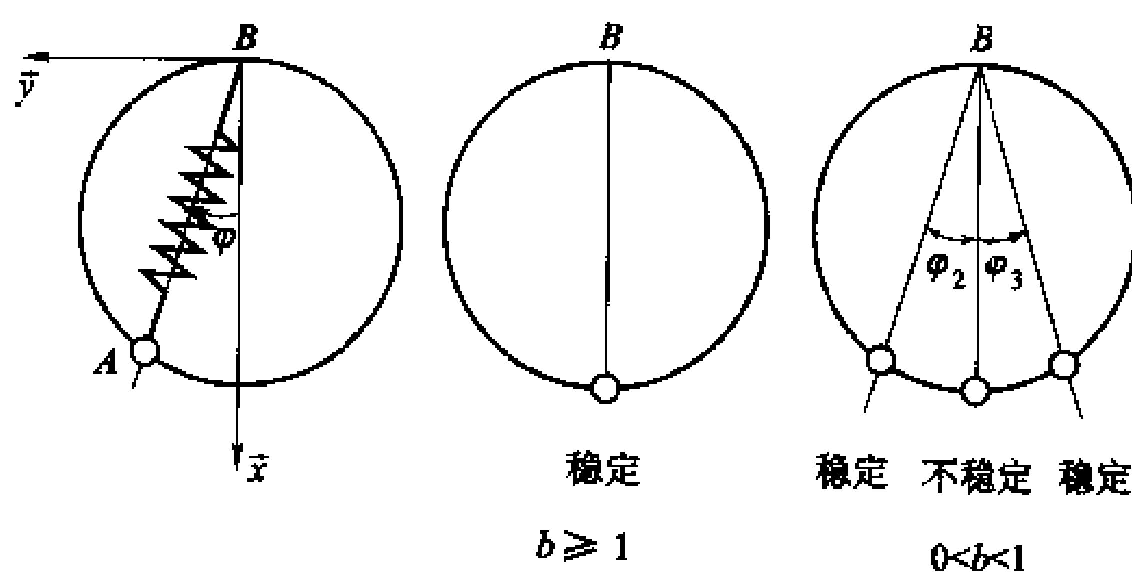
$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_1}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*}=0,\quad \left.\frac{\partial V}{\partial q_2}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*}=0$$

则 $V(q_1,q_2)$在 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*$ 取极值。若势能 $V(q_1,q_2)$在 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*$ 满足以下条件，则势能 V 在 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*$ 有极小值：

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*}>0,\quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*}>0,\quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\right)_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*}>0$$

此时平衡位形 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*$ 为稳定的。

[例 6.2－7] 图示一质量为 m 的小球 A 套在一半径为 r 的圆环上，圆环平面在铅垂平面内。小球可在环上滑动，不计摩擦。小球通过一线弹簧与环上的 B 相连。弹簧刚度为 k(令 $kr>mg$)，原长为 l_0。求小球的平衡位置，且讨论其稳定性。



例 6.2－7 图

解：将小球 A 视为质点，其位置由图示的角 φ 确定。小球处在重力场与弹

性力场中，两力场均为势力场。定义过 B 的水平面为重力场的零势面，以 B 为圆心 l_0 为半径的圆为弹性力场的零势面，则系统的势能为两势能之和，由式(4.5－31′)与(4.1－32)，有

$$V=-2mgr\cos^2\varphi+k(2r\cos\varphi-l_0)^2/2 \tag{1}$$

为了找平衡位置，由式(6.2－31)，即

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}=2r\sin\varphi[kl_0-2(kr-mg)\cos\varphi]=0$$

有

$$\sin\varphi=0,\ \cos\varphi=kl_0/2(kr-mg)=b$$

当 $b\geqslant1$，有一个平衡位置

$$\varphi_1=0$$

由已知条件，当 $0<b<1$，有三个平衡位置

$$\varphi_1=0,\ \varphi_2=\arccos b,\ \varphi_3=-\arccos b$$

下面讨论平衡位置的稳定性。求势能的二阶导数有

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}=2rkl_0[\cos\varphi+(1-2\cos^2\varphi)/b] \tag{2}$$

对于平衡位置 $\varphi_1=0$，代入式(2)，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi_1=0}=2rkl_0(1-1/b)\begin{cases}>0 & 当\ b>1\\=0 & 当\ b=1\\<0 & 当\ 0<b<1\end{cases}$$

由此可见，当 $b>1$，势能函数在平衡位置 $\varphi_1=0$ 为极小，该平衡位置稳定；当 $0<b<1$，势能函数在平衡位置 $\varphi_1=0$ 取极大，该平衡位置不稳定。对于 $b=1$，需求势能 V 的三阶导数，当 $\varphi_1=0$ 时代入为零，再对势能 V 求四阶导数，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^4V}{\mathrm{d}\varphi^4}\right|_{\varphi_1=0}=2rkl_0[-\cos\varphi+4\cos2\varphi)]=6rkl_0>0$$

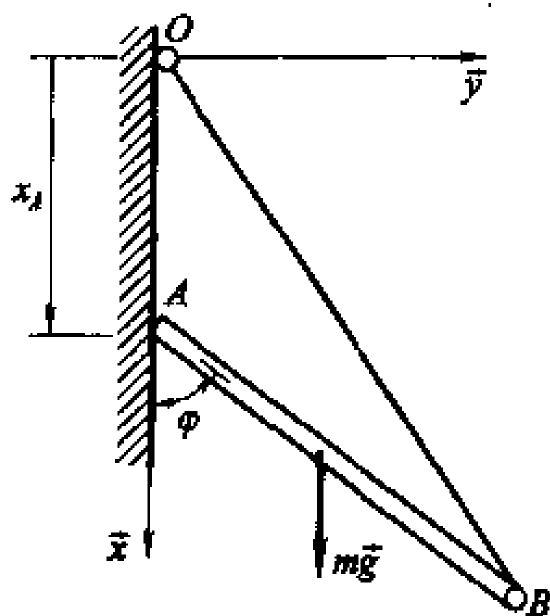
可知势能 V 取极小值，平衡位置 $\varphi_1=0$ 稳定。

对于平衡位置 $\varphi=\varphi_{2,3}$，即 $\cos\varphi_{2,3}=b$，代入式(2)，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_{2,3}}=2rkl_0(1-b^2)/b>0$$

由此，势能函数在这两平衡位置为极小，平衡位置 $\varphi=\varphi_{2,3}$ 稳定。

[例6.2－8]　图示一质量为 m，长为 l 的均质杆 AB，其一端 A 靠在铅垂的光滑墙上，一端 B 用长为 $l_1(l_1>l)$ 的软绳 BO 拉住。求平衡位置，且讨论其稳定性。



例 6.2－8 图

解：如图建立惯性基。取点 A 的坐标 x_A 为广义坐标。以点 O 为零势面，杆 AB 的势能函数为

$$V=-mg\left(x_A+\frac{l}{2}\cos\varphi\right)$$

其中 $\cos\varphi=(l_1^2-l^2-x_A^2)/2lx_A$。代入上式，经整理有

$$V=-\frac{mg}{4}\left(3+\frac{l_1^2-l^2}{x_A^2}\right)$$

求

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_A}=\frac{mg}{4}\left(-3+\frac{l_1^2-l^2}{x_A^2}\right)$$

当杆处于平衡时，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}x_A=0$，由此得平衡位置在

$$x_A=x_A^*=\sqrt{\frac{l_1^2-l^2}{3}}$$

讨论该平衡位置的稳定性。求

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x_A^2}\right|_{x_A=x_A^*}=-\frac{mg}{2}\left.\left(\frac{l_1^2-l^2}{x_A^3}\right)\right|_{x_A=x_A^*}<0$$

故在平衡位置 $x_A=x_A^*$ 势能取极大，平衡位置不稳定

6.3 动力学普遍方程

考虑由 n 个质点组成的质点系，由质点系的达朗贝尔原理知，系统中所有质点的惯性力与作用于系统的外力构成平衡力系。加在质点 $P_k(k=1,\cdots,n)$ 上的外力包括主动力 $\vec{F}_k^a$ 与理想约束力 $\vec{F}_k^n$，由式(6.1－4)，有

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^a+\vec{F}_k^n+\vec{F}_k^*=\vec{0} \tag{6.3-1}$$

由此式，惯性力 $\vec{F}_k^*$ 在这个平衡力系中相当于主动力的地位。又由虚功原理知，具有双面理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件为系统内所有主动力对于质点系的任意虚位移所作的元功之和为零。考虑到式(6.3－1)，由式(6.2－14)有

$$\sum_{k=1}^{n}\delta\vec{r}_k\cdot(\vec{F}_k^a+\vec{F}_k^*)=0 \tag{6.3-2}$$

或考虑到式(6.1－2)，可写成

$$\sum_{k=1}^{n}\delta\vec{r}_k\cdot(-m_k\ddot{\vec{r}}_k+\vec{F}_k^{a})=0 \tag{6.3-3}$$

上式在参考基下的坐标式为

$$\sum_{k=1}^{n}\delta\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}(-m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k+\boldsymbol{F}_k^{a})=0 \tag{6.3-4}$$

上式称为**虚功形式的动力学普遍方程**,或称为**达朗贝尔－拉格朗日原理**。

如果该质点系是自由的,那么所有质点矢径的变分 $\delta\boldsymbol{r}_k(k=1,\cdots,n)$ 相互独立,上式的括号内的各项同时为零,即可得到如下微分形式的方程

$$m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k=\boldsymbol{F}_k^{a}\quad(k=1,\cdots,n)$$

即质点系的牛顿定律。如果该质点系受到约束,那么各质点矢径的变分 $\delta\boldsymbol{r}_k(k=1,\cdots,n)$ 相互不独立,得不到上式。

下面将根据动力学普遍方程推导受约束质点系的微分形式的方程。

6.4　拉格朗日第一类方程

令质点系的坐标阵为

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\quad\cdots\quad\boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{6.4-1}$$

坐标的个数为 $3n$。如果该系统受到约束,独立约束方程为 s 个,即

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0} \tag{6.4-2}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1\quad\Phi_2\quad\cdots\quad\Phi_s)^{\mathrm{T}}$。那么系统的变量中只有 $\delta=3n-s$ 个为独立的,即系统的自由度数为 δ。

利用表达式(6.4－1),系统变分形式的动力学普遍方程(6.3－4)可表为矩阵表达式

$$\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{F}^{a})=0 \tag{6.4-3}$$

式中

$$\delta\boldsymbol{q}=(\delta\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\quad\delta\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\quad\cdots\quad\delta\boldsymbol{r}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\mathscr{R}^{3n\times1}$$

$$\boldsymbol{F}^{a}=(\boldsymbol{F}_1^{a\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{F}_2^{a\mathrm{T}}\quad\cdots\quad\boldsymbol{F}_n^{a\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\mathscr{R}^{3n\times1} \tag{6.4-4}$$

$$\boldsymbol{m}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{m}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{m}_n)\in\mathscr{R}^{3n\times3n} \tag{6.4-5}$$

式中

$$\boldsymbol{m}_k=\mathrm{diag}(m_k\quad m_k\quad m_k)\in\mathscr{R}^{3\times3}$$

对约束方程(6.4－2)取等时变分,有

$$\boldsymbol{\Phi}_q\delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0} \tag{6.4-6}$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}_q\in\mathscr{R}^{s\times n}$ 为约束方程的雅可比。引入 s 个待定系数 $\lambda_i(i=1,\cdots,s)$,称其为**拉格朗日乘子**。将其构成列阵

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_s)^{\mathrm{T}} \tag{6.4-7}$$

对式(6.4－6)两边转置，再将拉格朗日乘子阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 右乘两边，得

$$\delta \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{6.4-8}$$

将方程(6.4－3)与式(6.4－8)相减，得

$$\delta \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} (-m\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{a}}) = 0 \tag{6.4-9}$$

如果拉格朗日乘子选择适当，令事先指定的不独立的坐标变分前的系数为零，这样可得到 s 个方程。于是在方程(6.4－9)中只包含独立坐标变分前的 δ 个和式。既然这些坐标变分是独立的，那么这些变分前的系数也为零。这样由式(6.4－9)可得如下微分形式的方程：

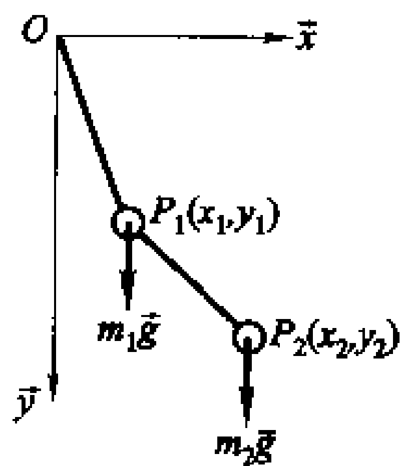
$$m\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{a}} \tag{6.4-10}$$

这就是**带拉格朗日乘子的质点系动力学方程**，或称为**拉格朗日第一类方程**。需要指出的是在推导拉格朗日第一类方程(6.4－10)用到了变分式(6.4－6)，事实上该变分式不一定限制由完整约束方程(6.4－2)得到。对于非完整约束如果它具有式(6.4－6)的变分关系，拉格朗日第一类方程(6.4－10)同样成立。

如果将方程(6.4－10)的含拉格朗日乘子项 $\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}$ 右移，将方程展开再与质点系的牛顿方程(4.3－4)比较，不难看出含拉格朗日乘子项 $-\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}$ 的物理意义为作用于系统各质点的内力或理想约束力。

注意方程(6.4－10)的个数为 $3n$，但变量中除了 $3n$ 个坐标变量外还引入了 s 个未知的拉格朗日乘子。故需增加 s 个约束方程，与方程(6.4－10)一起才能求解。这种求解过程与矢量力学求解动力学问题的一般方法类似(见5.2.3节)。两种方法区别在于拉格朗日第一类方程(6.4－10)中不含理想约束力，在建立方程时不必对其进行受力分析。

[例6.4－1] 图示一双质点摆，摆球 P_1 与 P_2 的质量分别为 m_1 与 m_2，摆长分别为 l_1 与 l_2。试利用拉格朗日第一类方程建立该双质点摆的动力学方程。



例6.4－1图

解：如图建立惯性基。双质点摆为两质点系，系统的坐标阵为

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2)^{\mathrm{T}}$$

约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad (1)$$

可见坐标数为4，约束方程数为2，故系统自由度为2。引入拉格朗日乘子阵 $\boldsymbol{\lambda} =$

$(\lambda_1 \quad \lambda_2)^{\mathrm{T}}$。约束方程(1)的雅可比为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 \\ -2(x_2-x_1) & -2(y_2-y_1) & 2(x_2-x_1) & 2(y_2-y_1) \end{pmatrix}$$

主动力只有重力，主动力阵为

$$\boldsymbol{F}^{a} = (\boldsymbol{F}_1^{a\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{F}_2^{a\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (0 \quad m_1 g \quad 0 \quad m_2 g)^{\mathrm{T}}$$

将上述分析的结果代入式(6.4-10)，有动力学方程

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1 & -2(x_2-x_1) \\ 2y_1 & -2(y_2-y_1) \\ 0 & 2(x_2-x_1) \\ 0 & 2(y_2-y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 g \\ 0 \\ m_2 g \end{pmatrix} \tag{2}$$

或展开得

$$\left.\begin{aligned} & m_1\ddot{x}_1 + 2x_1\lambda_1 - 2(x_2-x_1)\lambda_2 = 0 \\ & m_1\ddot{y}_1 + 2y_1\lambda_1 - 2(y_2-y_1)\lambda_2 = m_1 g \\ & m_2\ddot{x}_2 + 2(x_2-x_1)\lambda_2 = 0 \\ & m_2\ddot{y}_2 + 2(y_2-y_1)\lambda_2 = m_2 g \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

上述4个方程中有6个变量。需与约束方程(1)一起求解。这是一微分-代数方程组，求解比较困难。通常作如下处理，将式(1)对时间求二阶导数，得到加速度约束方程，即

$$x_1\ddot{x}_1 + y_1\ddot{y}_1 + \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = 0$$

$$(x_2-x_1)(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1) + (y_2-y_1)(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1) + (\dot{x}_2-\dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2-\dot{y}_1)^2 = 0$$

将这2个微分方程与动力学方程(3)一起求解。首先设法消去拉格朗日乘子，然后进行积分。

6.5 拉格朗日第二类方程

由于拉格朗日第一类方程中包含未知的拉格朗日乘子，不仅方程的规模较大，而且需引入加速度约束方程组才能进行动力学问题的求解。下面将要推导的方程将以广义坐标为变量，并且不出现拉格朗日乘子。

6.5.1 方程的推导

考虑一质点系 $P_k(k=1,\cdots,n)$ 的自由度为 δ，引入广义坐标阵 $\boldsymbol{w}$，由6.2节可知，质点 P_k 的矢径在惯性基的坐标阵可表示为广义坐标阵 $\boldsymbol{w}$ 的函数，即

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{w}, t) \quad (k=1,\cdots,n) \tag{6.5-1}$$

将上式对时间求导，得到质点 P_k 的速度在惯性基的坐标阵为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \dot{w}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{6.5-2}$$

由此式可得到虚位移与广义坐标虚位移之间的关系，即

$$\delta \boldsymbol{r}_k = \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \delta w_j \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{6.5-3}$$

将上式代入动力学普遍方程(6.3－4)，得

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\delta} \delta w_j \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \right)^{\mathrm{T}} (- m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k + \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{a}}) = 0$$

改变求和次序，有

$$\sum_{j=1}^{\delta} \delta w_j \left[- \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \right)^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{r}}_k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{a}} \right] = 0 \tag{6.5-4}$$

考虑上式括号中的第一式，有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \right)^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{r}}_k &= \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \right)^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d} \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \right)^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_k \right] - \sum_{k=1}^{n} m_k \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \right)^{\mathrm{T}} \right] \dot{\boldsymbol{r}}_k \end{aligned}$$

$$(j = 1, \cdots, \delta) \tag{6.5-5}$$

在继续推导前先推导一些关系式。首先将式(6.5－2)对广义速度 $\dot{w}_j$ 求偏导数，有

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{w}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{6.5-6}$$

接着将式(6.5－2)对广义坐标 w_i 求偏导数，有

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j \partial w_i} \dot{w}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_k}{\partial t \partial w_i} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

如果先将式(6.5－1)对广义坐标 w_i 求偏导数，再对时间求导，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_i} \right) = \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_k}{\partial w_i \partial w_j} \dot{w}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_k}{\partial w_i \partial t} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

考虑到二阶偏导数的求导次序可交换，故以上两式左边相等，改变 w_i 的下标可得到如下关系式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j} \right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial w_j} \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{6.5-7}$$

将式(6.5－6)与(6.5－7)代入式(6.5－5)，有

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j}\right)^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{w}_j}\right)^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_k\right] - \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial w_j}\right)^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_k \quad (j = 1,\cdots,\delta)$$

改变求和与求偏导数的次序，考虑到系统动能的表达式(4.5－1)，有

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j}\right)^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{w}_j} \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2} m_k (\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_k)\right]\right\} - \frac{\partial}{\partial w_j} \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2} m_k (\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_k)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_j} - \frac{\partial T}{\partial w_j} \quad (j = 1,\cdots,\delta)$$

将上式代入式(6.5－4)括号内的第一式，考虑到由式(6.2－19)，括号内第二式为广义力 $Q_j (j=1,\cdots,\delta)$，故式(6.5－4)可改写为

$$\sum_{j=1}^{\delta} \delta w_j \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_j} + \frac{\partial T}{\partial w_j} + Q_j\right) = 0 \tag{6.5－8}$$

这是以动能表达的动力学普遍方程。在推导方程(6.5－8)时，用到的约束方程(6.5－1)不要求为完整约束，故变分方程(6.5－8)对具有完整与非完整约束都成立。

如果约束方程(6.5－1)描述的为相互独立的完整约束，δ 个广义坐标的变分 $\delta w_j (j=1,\cdots,\delta)$ 相互独立①，故上式可得到微分形式的动力学方程，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_j} - \frac{\partial T}{\partial w_j} = Q_j \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.5－9}$$

这个微分方程组称为**拉格朗日第二类方程**。考虑到上式的条件，该方程只适用于具有完整约束的质点系。方程给出了系统的动能与广义力之间的关系。

考虑到式(6.5－2)，系统的动能可写为

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k \left(\sum_{i=1}^{\delta} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_i}\dot{w}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\right)^{\mathrm{T}} \left(\sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j}\dot{w}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} T_2 + T_1 + T_0 \tag{6.5－10}$$

式中，T_2，T_1 与 T_0 分别表为广义速度的二次、一次与零次的齐次式，即

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\delta}\sum_{j=1}^{\delta}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_i}\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j}\right]\dot{w}_i \dot{w}_j \tag{6.5－11}$$

$$T_1 = \sum_{j=1}^{\delta}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial w_j}\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\right]\dot{w}_j \tag{6.5－12}$$

---

① 对于非完整约束，它的 δ 个广义坐标的变分不相互独立，详见有关分析力学的专著，如陈文良等著《分析动力学》，上海交通大学出版社，1990。

$$T_0 = \sum_{i=1}^{\delta} \left[\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} \right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} \right] \tag{6.5-13}$$

对于定常约束，由式(6.5－12)与(6.5－13)知，$T_1 = T_0 = 0$，有 $T = T_2$，即系统动能为广义速度的二次齐次式。

由式(6.5－10)知，系统动能是广义速度的二次式。当动能对广义速度求偏导数，再对时间求导，故拉格朗日方程是广义坐标的二阶微分方程。

[例 6.5－1] 试用拉格朗日第二类方程建立一质量为 m 的自由质点的动力学方程。

一自由质点的自由度为 3。将其的笛卡尔坐标 $\boldsymbol{r} = (x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}}$ 作为广义坐标，该质点的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

故

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{1}$$

它们分别为质点的动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 的三个坐标。此外

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

如果作用在该质点上的外力的合力为 $\vec{F}_{\mathrm{R}}$，由于质点不受约束，该力即主动力。令该力的坐标阵为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = (F_{\mathrm{R}x} \quad F_{\mathrm{R}y} \quad F_{\mathrm{R}z})^{\mathrm{T}}$，它作的虚功为

$$\delta W = F_{Ox} \delta x + F_{Oy} \delta y + F_{Oz} \delta z$$

得该力的关于广义坐标的广义力为

$$Q_x = F_{\mathrm{R}x}, \quad Q_y = F_{\mathrm{R}y}, \quad Q_z = F_{\mathrm{R}z} \tag{3}$$

将式(1)～(3)代入方程(6.5－9)，有自由质点的动力学方程

$$m\ddot{x} = F_{\mathrm{R}x}, \quad m\ddot{y} = F_{\mathrm{R}y}, \quad m\ddot{z} = F_{\mathrm{R}z}$$

与矢量力学得到的方程(4.3－12)一致。

[例 6.5－2] 试用拉格朗日第二类方程建立图 5－1 所示定轴转动刚体的动力学方程。

定轴转动刚体具有一个自由度，令转角 φ 为坐标。刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\varphi}^2$$

故有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_{Oz} \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

与式(5.1-2)对照,可见$\partial T/\partial\dot{\varphi}$为刚体绕转轴的动量矩$L_{Oz}$。

如果作用在该刚体上的主动力绕Oz轴的主矩为M_{Oz}。由于主动力的虚功为$\delta W=M_{Oz}\delta\varphi$,故主动力关于$\varphi$的广义力$Q_\varphi=M_{Oz}$。

将以上各式代入方程(6.5-9),得到定轴转动刚体的动力学方程为

$$J_{Oz}\ddot{\varphi}=M_{Oz}$$

与矢量力学得到的方程(5.1-4)一致。

[例6.5-3] 用拉格朗日第二类方程建立例5.3-2中变摆长单摆的动力学方程。

解: 由例5.2-5的图可知,摆球的笛卡尔坐标与广义坐标ψ的关系为

$$x=(l_0-vt)\cos\psi,\quad y=(l_0-vt)\sin\psi$$

这是具有非定常约束的自由度为1的系统。将上式对时间求导,有

$$\dot{x}=-(l_0-vt)\dot{\psi}\sin\psi-v\cos\psi$$

$$\dot{y}=-(l_0-vt)\dot{\psi}\cos\psi-v\sin\psi$$

摆球的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}m[(l_0-vt)^2\dot{\psi}^2+v^2]$$

故有

$$\frac{\partial T}{\partial\psi}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}=m(l_0-vt)^2\dot{\psi}$$

且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}=m(l_0-vt)^2\ddot{\psi}-2mv(l_0-vt)\dot{\psi}$$

重力的关于ψ的广义力为

$$Q_\psi=-mgl\sin\psi=-mg(l_0-vt)\sin\psi$$

将以上各式代入式(6.5-9),经整理后得变摆长单摆的动力学方程为

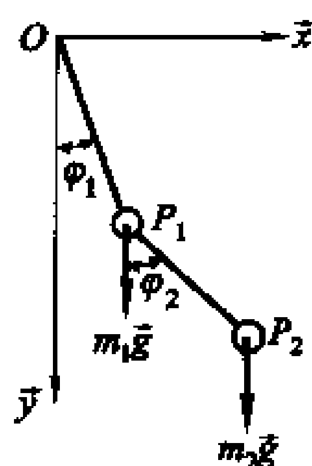
$$(l_0-vt)\ddot{\psi}-2v\dot{\psi}+g\sin\psi=0$$

与例5.2-5得到的结果一致。

[例6.5-4] 试用拉格朗日第二类方程建立例6.4-1所示双质点摆的动力学方程。

解: 双质点摆为两质点系,系统的自由度为2,定义广义坐标为$\boldsymbol{w}=(\varphi_1\ \ \varphi_2)^{\mathrm{T}}$。质点$P_1$与$P_2$的笛卡尔坐标与广义坐标的关系分别为

$$x_1=l_1\cos\varphi_1,\ y_1=l_1\sin\varphi_1 \tag{1}$$



例 6.5-4 图

$$x_2 = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2,\ y_2 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 \quad (2)$$

将以上两式对时间求导,可得到它们速度之间的关系,即

$$\dot{x}_1 = -l_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1,\ \dot{y}_1 = l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = -l_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2,$$

$$\dot{y}_2 = l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 \quad (4)$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

将式(3)与(4)代入上式,有

$$T=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\varphi}_1^2+l_2^2\dot{\varphi}_2^2+2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)] \quad (5)$$

将动能分别对广义坐标与广义速度求偏导数,有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial\varphi_1}&=m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\\ \frac{\partial T}{\partial\varphi_2}&=-m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}=(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}=m_2l_2^2\dot{\varphi}_2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

再分别将上式对时间求导,有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}&=(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1+m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\\ &\quad m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_1)\sin(\varphi_2-\varphi_1)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}&=m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2+m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\\ &\quad m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_1)\sin(\varphi_2-\varphi_1)\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

下面推导主动力 $m_1\vec{g}_1$ 与 $m_1\vec{g}_2$ 关于广义坐标 w 的广义力。

系统主动力的虚功为

$$\delta W = m_1g\delta y_1 + m_2g\delta y_2 \quad (8)$$

由式(3)与(4),可得虚位移 δy_1 和 δy_2 与广义坐标虚位移的关系,即

$$\delta y_1 = -l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1,\quad \delta y_2 = -l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2$$

将它们代入式(8),有

$$\delta W = -(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - m_2gl_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2 \tag{9}$$

由此式可得到主动力关于广义坐标的广义力分别为

$$\left.\begin{aligned} Q_{\varphi_1} &= -(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1 \\ Q_{\varphi_2} &= -m_2gl_2\sin\varphi_2 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

将式(6),(7)与(10)代入拉格朗日第二类方程(6.5-9),经整理有

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) - m_2l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1) = -(m_1+m_2)g\sin\varphi_1 \tag{11a}$$

$$m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1) + m_2l_1\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_2-\varphi_1) = -m_2g\sin\varphi_2 \tag{11b}$$

6.5.2 拉格朗日函数

如果作用于质点系的主动力为有势力,势能函数为 V,则广义力由式(6.2-30)确定。将此式代入拉格朗日方程(6.5-9),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_j} - \frac{\partial(T-V)}{\partial w_j} = 0 \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.5-14}$$

令质点系的动能与势能之差为**拉格朗日函数**,记为 L,即

$$L = T - V \tag{6.5-15}$$

考虑到势能函数 V 与广义速度无关,即$\partial V/\partial \dot{w}_j$,故式(6.5-14)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j} - \frac{\partial L}{\partial w_j} = 0 \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.5-16}$$

如果质点系还受到非势力的作用,将这些力关于广义坐标的广义力记为 $Q'_j(j=1,\cdots,\delta)$,则拉格朗日第二类方程(6.5-9)的另一种表达式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j} - \frac{\partial L}{\partial w_j} = Q'_j \quad (j=1,\cdots,\delta) \tag{6.5-17}$$

此外,由例6.5-1与例6.5-2显见,动能对广义速度对广义速度 $\dot{w}_j$ 的偏导数$\partial T/\partial \dot{w}_j$ 具有动量或动量矩量纲,故称$\partial T/\partial \dot{w}_j$ 为关于广义坐标 w_j 的**广义动量**。考虑到势能函数中不含广义速度 $\dot{w}_j$,有$\partial L/\partial \dot{w}_j = \partial T/\partial \dot{w}_j$,故$\partial L/\partial \dot{w}_j$ 为广义动量的另一种表达式。

[例6.5-5] 利用拉格朗日第二类方程解例5.2-6的问题。

解:由例5.2-6的分析,斜面-圆柱系统有2个自由度。根据例5.2-6图的定义,取广义坐标为 $\boldsymbol{q}=(x_1 \quad x'_2)^{\mathrm{T}}$。

对于斜面 B_1,质心 C_1 的绝对速度为

$$\vec{v}_1 = \dot{x}_1\vec{x}$$

圆柱 B_2 的质心 C_2 对于 B_1 连体基 $\vec{e}^1$ 是动点，由式(2.5－6)，有

$$\vec{v}_2=\vec{v}_2^r+\vec{v}_2^e=\vec{v}_2^r+\vec{v}_1=\dot{x}'_2\vec{x}^1+\dot{x}_1\vec{x}$$

该速度在基矢量 $\vec{x}$ 与 $\vec{x}^1$ 上的坐标分别为

$$v_{2x}=\dot{x}'_2\cos\theta+\dot{x}_1,\quad v_{2y}=-\dot{x}'_2\sin\theta$$

由于圆柱在斜面上作无滑动的滚动，圆柱相对动基 $\vec{e}^1$ 角速度为 $\dot{\varphi}'_2=\dot{x}'_2/r$。考虑到动基 $\vec{e}^1$ 在惯性基上作平移，故圆柱的绝对角速度 ω_2 等于 $\dot{\varphi}'_2$。

由于斜面 B_1 作平移，圆柱 B_2 作一般的平面运动，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2(v_{2x}^2+v_{2y}^2)+\frac{1}{2}J_{C_2}\omega_2^2$$

考虑到 $J_{C_2}=m_2r^2/2$，将上面的运动学分析的结果代入，经整理有

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+\frac{3}{4}m_2\dot{x}'^2_2+m_2\dot{x}_1\dot{x}'_2\cos\theta \tag{1}$$

主动力为有势力 $m_1\vec{g}$ 与 $m_2\vec{g}$。由于斜面 B_1 作水平平移，故势力 $m_1\vec{g}$ 不作功，它的势能 $V_1=0$。圆柱 B_2 的质心 C_2 在运动过程中，在垂直方向的位移为 $\Delta y_2=x'_2\sin\theta$，如果以 B_2 的初始位置为零势面，势力 $m_2\vec{g}$ 的势能 $V_2=-m_2g\Delta y_2$。系统的总势能为

$$V=V_1+V_2=-m_2gx'_2\sin\theta \tag{2}$$

由式(1)与(2)，根据式(6.5－15)计算拉格朗日函数 L，接着计算

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial x'_2}=m_2g\sin\theta \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=(m_1+m_2)\dot{x}_1+m_2\dot{x}'_2\cos\theta,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_2}=\frac{3}{2}m_2\dot{x}'_2+m_2\dot{x}_1\cos\theta \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}'_2\cos\theta,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_2}=\frac{3}{2}m_2\ddot{x}'_2+m_2\ddot{x}_1\cos\theta \tag{5}$$

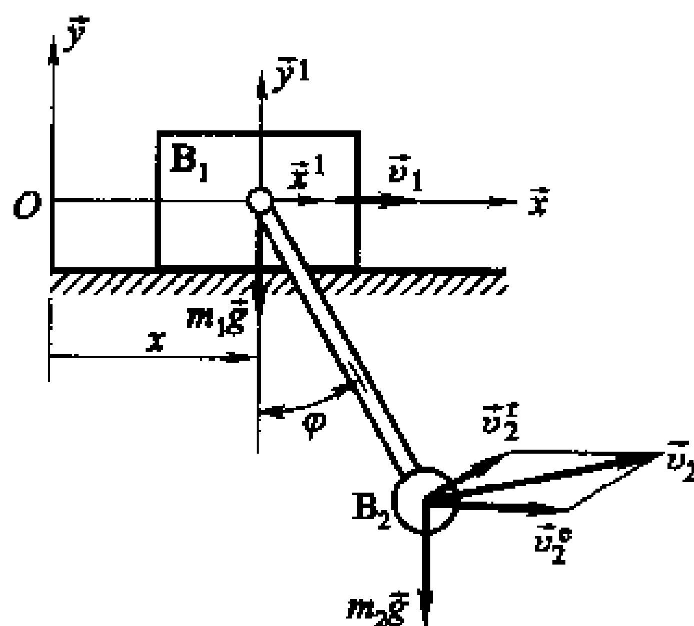
圆柱与斜面间的摩擦力 F_{f2} 为系统的非势力。由于圆柱在斜面上作无滑动的滚动，故摩擦力 F_{f2} 的作用点无相对速度，故该力的虚功为零。从另一个角度此结论是明显的。由于圆柱的无滑动滚动相当于圆柱与斜面间为齿轮与齿条的约束，理想约束力垂直于齿面的法线(参见图 4－13)，故可分解为图示的 $\vec{F}_N$ 与 $\vec{F}_f$，这两个理想约束力均不作功。因此该力关于广义坐标的广义力均为零，即 $Q'_{x_1}=Q'_{x'_2}=0$。考虑到此关系，将式(3)～(5)代入式(6.5－17)，有

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}'_2\cos\theta=0$$

$$\frac{3}{2}m_2\ddot{x}'_2+m_2\ddot{x}_1\cos\theta-m_2g\sin\theta=0$$

以上两式与例 5.2－6 的式(3)与(6)一致。

[例 6.5－6]　如图所示，一单摆 B_2 的支点固定在一可沿光滑的水平直线轨道平行移动的滑块 B_1 上，利用拉格朗日第二类方程建立系统的动力学方程，且分析系统的运动



例 6.5－6 图

解：如图建立惯性基 $\vec{e}$ 与滑块 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$。系统有两个自由度。取滑块 B_1 在 x 轴上的坐标 x 与单摆 B_2 偏离铅垂的偏角 φ 为广义坐标。取滑块 B_1 的绝对速度为 $v_1=\dot{x}$。摆球 B_2 为动基 $\vec{e}^1$ 的动点。该点的速度为 $\vec{v}_2=\vec{v}_2^r+\vec{v}_2^e$。其中相对速度 $\vec{v}_2^r$ 的大小为 $v_2^r=l\dot{\varphi}$，方向如图垂直于摆杆。牵连速度 $\vec{v}_2^e$ 的大小为 $v_2^e=\dot{x}$，方向如图水平向右。因此，摆球 B_2 的绝对速度为

$$\begin{aligned}v_2^2&=(v_2^r)^2+(v_2^e)^2-2v_2^r v_2^e\cos(\pi-\varphi)\\&=l^2\dot{\varphi}^2+\dot{x}^2+2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\end{aligned}$$

由上述运动学分析结果，可得系统的动能为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\\&=\frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2+m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2\dot{x}^2+2m_2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi)\end{aligned}$$

主动力为有势力，以 $y=0$ 为零势面，系统的势能为 $V=-m_2gl\cos\varphi$。写出拉格朗日函数 L，计算

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=(m_1+m_2)\dot{x}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi,\quad\frac{\partial L}{\partial x}=0\tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=m_2l^2\dot{\varphi}+m_2l\dot{x}\cos\varphi,\quad\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-m_2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\tag{2}$$

将式(1)与(2)代入式(6.5－16)，经整理，得到系统的动力学方程为

$$(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0\tag{3}$$

$$l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0\tag{4}$$

下面通过方程对运动进行分析。

首先由方程(3)与(4)将 $\ddot{x}$ 消去，有

$$(m_1+m_2)l\ddot{\varphi}-(m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\cos\varphi+(m_1+m_2)g\sin\varphi=0$$

考虑微振动的情况，令 $\sin\varphi\approx\varphi$，$\cos\varphi\approx1$。上式可简化为

$$m_1 l\ddot{\varphi}+(m_1+m_2)g\sin\varphi=0$$

此时，摆作微振动的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m_1 l}{(m_1+m_2)g}}$$

此外，由式(1)代入式(6.5-16)，有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=0$，故

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=c_1(\text{常数})\tag{5}$$

即系统关于坐标 x 的广义动量守恒。或将式(1)代入上式，有

$$(m_1+m_2)\dot{x}+m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi-c_1\tag{6}$$

不难看出，等式左边为系统的动量在 x 方向的坐标。由于作用于系统的外力在 x 方向的坐标为零，上述的结果是明显的。

如果系统初始时，B_1 与 B_2 的速度为零，故 $c_1=0$。代入式(6)有

$$\dot{x}=-\frac{m_2}{m_1+m_2}l\dot{\varphi}\cos\varphi\tag{7}$$

有解

$$x=-\frac{m_2}{m_1+m_2}l\sin\varphi+c_2\tag{8}$$

常数 c_2 决定于起始时 B_1 与 B_2 的位置。由图不难得到摆球的水平位置坐标 $x_2=x+l\sin\varphi$。故系统的质心的水平位置坐标 x_C 为

$$x_C=\frac{m_1x+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1x+m_2x+m_2l\sin\varphi}{m_1+m_2}=x+\frac{m_2}{m_1+m_2}l\sin\varphi$$

考虑到式(7)，有 $x_C=c_2$，即系统在运动的过程中系统质心的水平位置保持不变。

最后，研究摆球的运动轨迹。考虑到式(7)，摆球的坐标为

$$x_2=x+l\sin\varphi=c_2+\frac{m_1}{m_1+m_2}l\sin\varphi,\quad y_2=-l\cos\varphi$$

消去 φ 得到摆球的运动轨迹的方程为

$$\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2(x_2-c_2)^2+y_2^2=l^2$$

这是以 $x_2=c_2$，$y_2=0$ 为中心的椭圆方程。正是这个原因该系统称为椭圆摆。

6.5.3 方程的初积分

由例 6.5-6 可知，当拉格朗日方程具有如式(5)的降阶的方程时，对系统的

运动分析带来很大的方便。下面我们从更一般的意义上讨论这种情况。如果可由拉格朗日方程得到联系广义速度、广义坐标、时间与一常数的方程时,称它们为拉格朗日方程的**初积分**。现分几种情况进行讨论。

1. 拉格朗日函数 L 不显含某些广义坐标。

如果 L 不显含广义坐标 w_j 时,$\frac{\partial L}{\partial w_j}=0$,故$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}=0$,有初积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}=c(\text{常数}) \tag{6.5-18}$$

通常称 w_j 为**循环坐标**,上述初积分称为**循环积分**。由于$\partial L/\partial \dot{w}_j$ 为关于 w_j 的广义动量,故循环积分的物理意义为对应循环坐标的广义动量守恒。如例6.5-6 中的循环积分描述了系统在 x 方向的动量守恒。

2. 拉格朗日函数 L 不显时间 t。

考虑拉格朗日函数 L 对时间的导数,即

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{\delta}\left(\dot{w}_j\frac{\partial L}{\partial w_j}+\ddot{w}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}\right)+\frac{\partial L}{\partial t} \tag{6.5-19}$$

由于拉格朗日函数 L 不显时间 t,即$\partial L/\partial t=0$,故上式右边的第二项消失。将拉格朗日方程组(6.5-16)的每一个方程乘以相应的广义速度 $\dot{w}_j$,再把它们相加,有

$$\sum_{j=1}^{\delta}\left(\dot{w}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}-\dot{w}_j\frac{\partial L}{\partial w_j}\right)=0 \tag{6.5-20}$$

将式(6.5-19)与(6.5-20)相加,考虑到拉格朗日函数 L 不显时间 t($\partial L/\partial t=0$),有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{\delta}\left(\dot{w}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}+\ddot{w}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}\right)=\sum_{j=1}^{\delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{w}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}\right)$$

交换上式右边的求和与对时间求导的次序,移项后,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{\delta}\dot{w}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}-L\right)=0$$

由此可得到初积分

$$\sum_{j=1}^{\delta}\dot{w}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}-L=\sum_{j=1}^{\delta}\dot{w}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_j}-L=c \tag{6.5-21}$$

由式(6.5-11)~(6.5-13),可知 T_2,T_1 与 T_0 分别为广义速度的二次、一次与零次的齐次函数,故有

$$\sum_{j=1}^{\delta}\dot{w}_j\frac{\partial T_2}{\partial \dot{w}_j}=2T_2,\quad \sum_{j=1}^{\delta}\dot{w}_j\frac{\partial T_1}{\partial \dot{w}_j}=T_1,\quad \sum_{j=1}^{\delta}\dot{w}_j\frac{\partial T_0}{\partial \dot{w}_j}=0 \tag{6.5-22}$$

由于 $T=T_2+T_1+T_0$, $L=T_2+T_1+T_0-V$,考虑到式(6.5-22),初积分式(6.5-21)可表示为

$$2T_2+T_1-(T_2+T_1+T_0-V)=c$$

即

$$T_2-T_0+V=c \tag{6.5-23}$$

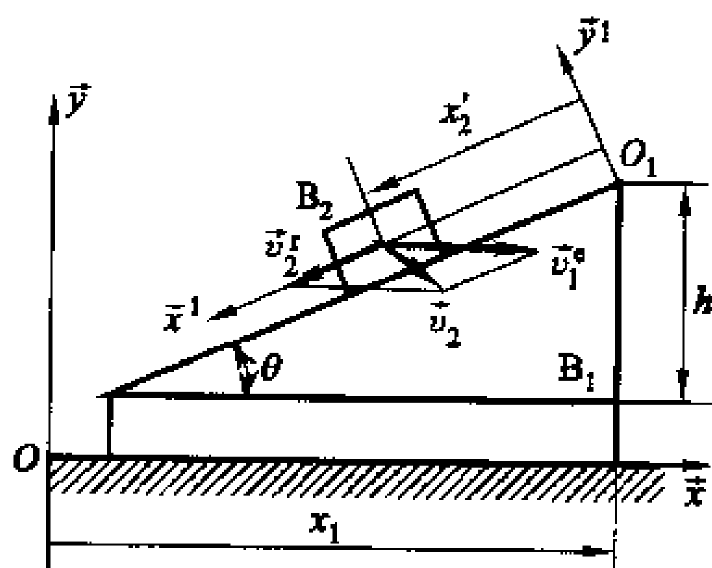
可见这是一个具有能量量纲的初积分,称为**广义能量积分**。它是雅可比在研究相对运动时得到的,故也称为雅可比积分。当约束为定常时,动能不显含时间 t,由式(6.5-11)~(6.5-13),可知 $T_1=T_0=0$,故 $T=T_2$。此时广义能量积分式(6.5-23)变为

$$T_2+V=T+V=c \tag{6.5-24}$$

它描述的是定常约束系统的机械能守恒(见4.5.5),故称为**能量积分**。

如前所述,拉格朗日方程的初积分是一降价的微分方程,它建立了广义速度、广义坐标与时间 t 的关系,在对系统进行速度分析时初积分给出的是它们的代数方程,因此将分析的工作变得很方便。

[**例6.5-7**] 如图所示,水平面上有一斜面 B_1,其上有一方块 B_2,质量分别为 m_1 与 m_2。斜面 B_1 的高度为 h,倾角为 θ。设初始时 B_2 在 B_1 的顶点,两物体均无速度。



例6.5-7图

(a) 求当方块 B_2 离开斜面时,方块 B_2 与斜面 B_1 的速度。

(b) 如果斜面 B_1 在力的作用下以匀速 v 向右运动,求方块 B_2 脱离斜面时,它相对斜面的速度。

解: (a) 如图建立惯性基 $\vec{e}$ 与斜面 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$。系统有两个自由度。取 B_1 的基点在 x 轴上的坐标 x_1 与 B_2 相对 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$ 的坐标 x'_2 为广义坐

标。

B_1 的绝对速度为 $v_1=\dot{x}_1$。B_2 为动基 $\vec{e}^1$ 的动点，该点的速度为 $\vec{v}_2=\vec{v}_2^r+\vec{v}_2^e$，其中相对速度 $\vec{v}_2^r$ 的大小为 $v_2^r=\dot{x}'_2$，方向沿斜面，牵连速度 $\vec{v}_2^e$ 的大小为 $v_2^e=\dot{x}_1$，方向水平向右，因此，B_2 的绝对速度为

$$v_2^2=(v_2^r)^2+(v_2^e)^2-2v_2^rv_2^e\cos\theta=\dot{x}'^2_2+\dot{x}_1^2-2\dot{x}_1\dot{x}'_2\cos\theta$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}'^2_2+\dot{x}_1^2-2\dot{x}_1\dot{x}'_2\cos\theta) \tag{1}$$

主动力为有势力 $m_1\vec{g}$ 与 $m_2\vec{g}$。由于斜面 B_1 作水平平移，故势力 $m_1\vec{g}$ 不作功，它的势能 $V_1=0$。方块 B_2 的质心 C_2 在运动过程中，在垂直方向的位移为 $\Delta y_2=x'_2\sin\theta$，如果以 B_2 的初始位置为零势面，势力 $m_2\vec{g}$ 的势能 $V_2=-m_2g\Delta y_2$。系统的总势能为

$$V=V_1+V_2=-m_2gx'_2\sin\theta \tag{2}$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}[(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}'^2_2-2m_2\dot{x}_1\dot{x}'_2\cos\theta]+m_2gx'_2\sin\theta$$

可见，$\partial L/\partial x_1=0$，即 x_1 为循环坐标。系统有相应的循环积分 $\partial L/\partial\dot{x}_1=0$，即

$$(m_1+m_2)\dot{x}_1-m_2\dot{x}'_2\cos\theta=c_1 \tag{3}$$

此外 $\partial L/\partial t=0$，系统有能量积分(6.5-24)

$$T+V=\frac{1}{2}[(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}'^2_2-2m_2\dot{x}_1\dot{x}'_2\cos\theta]-m_2gx'_2\sin\theta=c_2 \tag{4}$$

由初始条件，$t=0$ 时，$\dot{x}_1=0$，$x'_2=0$，$\dot{x}'_2=0$。代入以上两式可得有积分常数 $c_1=0$，$c_2=0$。这样式(3)与(4)可写为

$$(m_1+m_2)\dot{x}_1-m_2\dot{x}'_2\cos\theta=0 \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}[(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}'^2_2-2m_2\dot{x}_1\dot{x}'_2\cos\theta]-m_2gx'_2\sin\theta=0 \tag{6}$$

由(5)可得斜面的速度与方块相对速度间的关系

$$\dot{x}_1=\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\dot{x}'_2\cos\theta \tag{7}$$

将其代入式(6)，可得到方块相对速度 $\dot{x}'_2$ 与 x'_2 的关系式。当方块离开斜面，即 $x'_2=h/\sin\theta$ 时，此关系式为

$$\frac{m_1+m_2\sin^2\theta}{m_1+m_2}\dot{x}'^2_2=2gh$$

即得到方块离开斜面时的速度为

$$\dot{x}'_2=\sqrt{\frac{2gh(m_1+m_2)}{m_1+m_2\sin^2\theta}}$$

将其代入式(7),得到此时的斜面速度为

$$\dot{x}_1=m_2\cos\theta\sqrt{\frac{2gh}{(m_1+m_2)(m_1+m_2\sin^2\theta)}}$$

(b) 如果斜面 B_1 在力的作用下以匀速 v 向右运动,系统的自由度为 1。如图以相对位移 x'_2为广义坐标。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_2(\dot{x}'^2_2+v^2-2v\dot{x}'_2\cos\theta) \tag{8}$$

注意此式与式(1)的区别。动能的表达式(1)是广义速度的二次齐次式,而式(8)则不然,有

$$T_0=\frac{1}{2}m_2v^2,\quad T_1=-v\dot{x}'_2\cos\theta,\quad T_2=\frac{1}{2}m_2\dot{x}'^2_2 \tag{9}$$

此外,势能为 $V-m_2gx'_2\sin\theta$。拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_2v^2+m_2\dot{x}'^2_2-2m_2v\dot{x}'_2\cos\theta)+m_2gx'_2\sin\theta$$

可见$\partial L/\partial t=0$,系统有广义能量积分(6.5-23),考虑到式(9),有

$$T_2-T_0+V=\frac{1}{2}m_2\dot{x}'^2_2-\frac{1}{2}m_2v^2-m_2gx'_2\sin\theta=c \tag{10}$$

由初始条件,$t=0$ 时,$x'_2=0$, $\dot{x}'_2=0$。代入以上两式可得积分常数 $c=-m_2v^2/2$。这样式(10)可表示为

$$\frac{1}{2}m_2\dot{x}'^2_2-m_2gx'_2\sin\theta=0 \tag{11}$$

当方块离开斜面,即 $x'_2=h/\sin\theta$ 时,由此关系式可得到此时方块的相对速度为

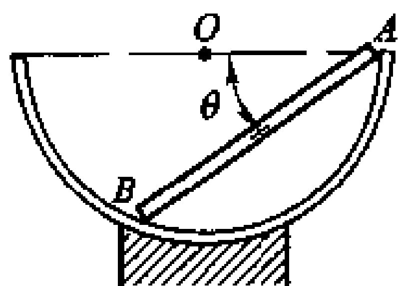
$$\dot{x}'_2=\sqrt{2gh}$$

习　题

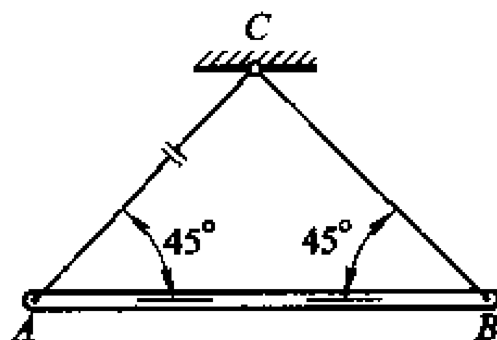
6-1　匀质杆 AB 长 l,重 G,沿光滑的圆弧轨道运动如图示。设当 OA 在水平位置时,$\theta=\arcsin 3/5$,　$v_A=\sqrt{5gl/12}$,求此时轨道对于 AB 杆的约束力。

6-2　匀质杆 AB 长 l,重 G,用两根软绳悬挂如图示。求当其中一根软绳切断,AB 开始运动时,另一根软绳中的拉力。

6-3　匀质杆 AB 长 $2l$,重 G,一端 A 用长 l 的软绳 OA 拉住,一端 B 放在光滑地面上如图示。设开始运动时,OA 在水平位置,AB 与铅垂线成θ 角,$\tan\theta=3/4$,速度为零。求 AB 杆的角加速度以及 B 点的加速度。



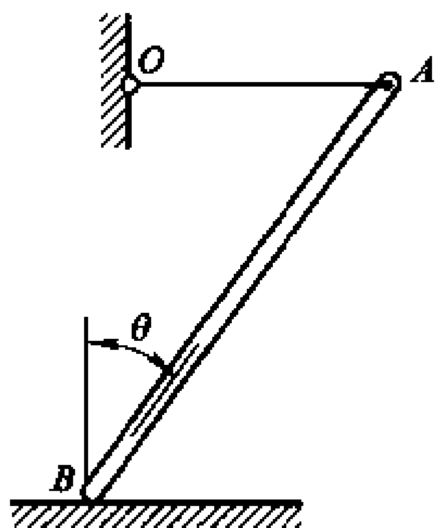
题6-1图



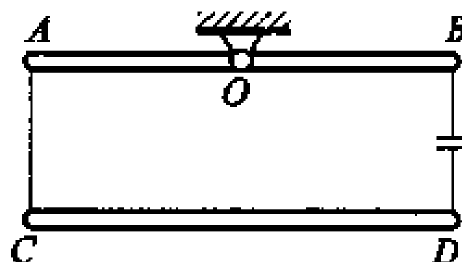
题6-2图

6-4　上题中，设开始运动时，A 点具有向下的速度，大小为$\sqrt{gl}$。求 $\dot{\alpha}_{AB}$ 与 $\dot{\alpha}_B$。

6-5　长、质量为 m 的匀质杆AB 与CD 以软绳AC 与BD 相连并在AB 的中点用铰链O 固定如图示。求当 BD 被剪断的瞬间 B 与 D 两点的加速度。

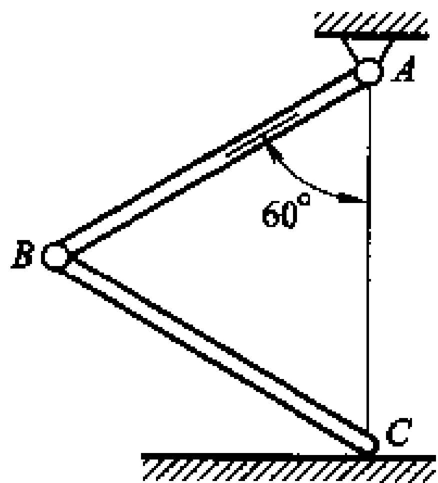


题6-3图

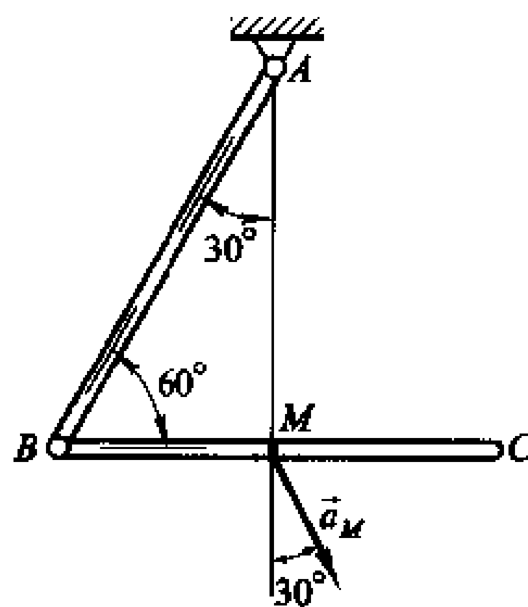


题6-5图

6-6　长 l、重 G 的两根相同的匀质杆 AB 与 CD 铰接后一端 A 用铰链固定，另一端 C 置于光滑水平面上如图示。求从图示位置无初速地开始运动时，水平面对杆的约束力。



题6-6图

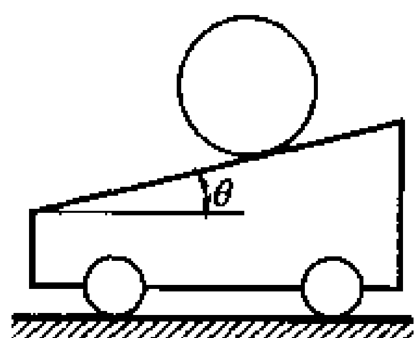


题6-7图

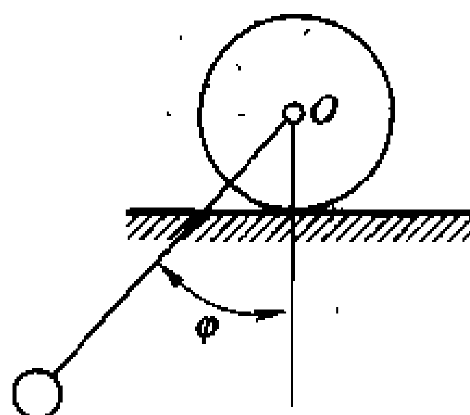
6-7　图中，AB，BC 为长度相等，质量不等的两匀质杆。已知从图示位置无初速地开始运动时，BC 杆中点 M 的加速度与铅垂线成30°角，求两杆质量之比。

6-8　一质量为 m 的斜面置于光滑水平面上，在斜面上又放一质量为 m_1 的匀质圆柱如图示。设圆柱与斜面间的摩擦因数为 f_s，求圆柱在斜面上作纯滚动的条件。

6-9　上题中，设圆柱与斜面间有足够的摩擦阻力阻止相对滑动，求圆柱中心相对于斜面的加速度以及斜面运动的加速度。



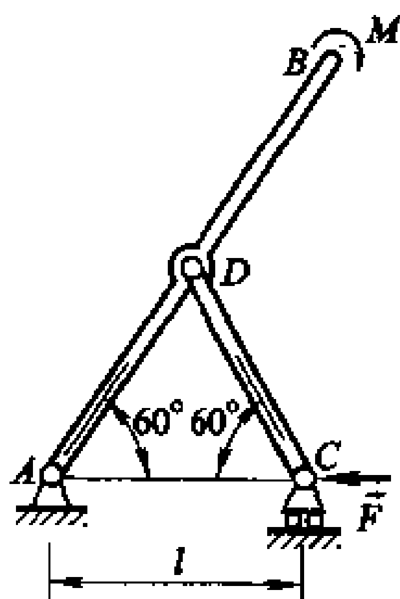
题 6-8 图



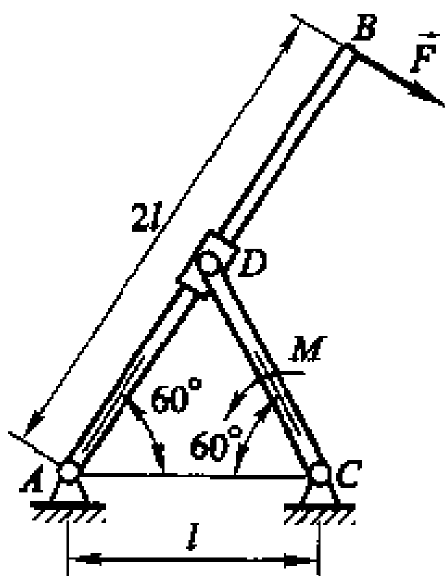
题 6-10 图

6-10　一质量为 m_1 的单摆，其支点固定于一圆轮的中心 O，圆轮则放在一粗糙的水平面上如图示。设圆轮的质量为 m，可以看作匀质圆盘。求在图示位置无初速地开始运动时轮心的加速度。

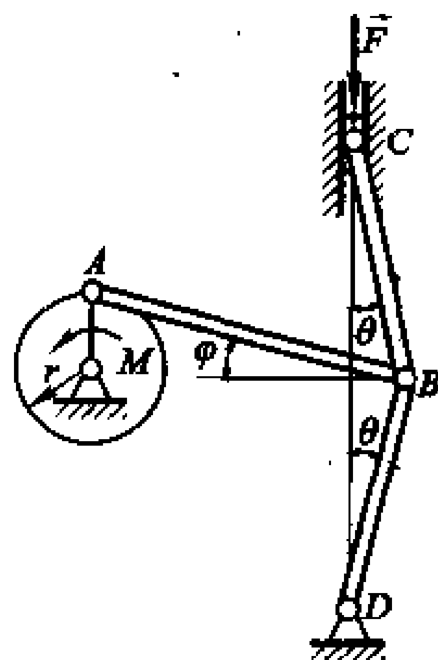
6-11　计算下列机构在图示位置平衡时主动力之间的关系。构件的重量以及摩擦阻力均可略去不计。



题 6-11(1)图



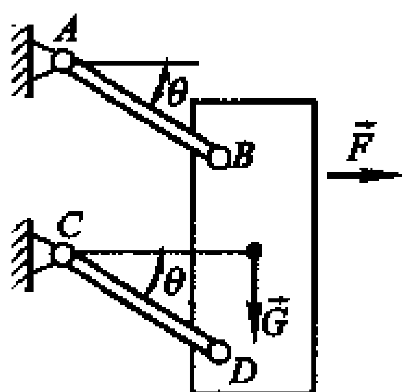
题 6-11(2)图



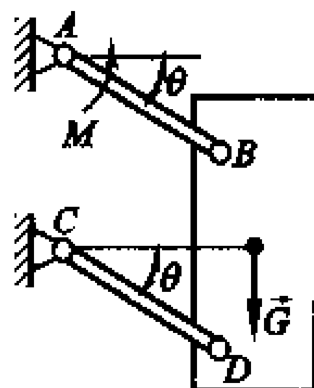
题 6-11(3)图

6-12　重 0.1 kN 的板用等长而平行的杆 AB 和 CD 支持如图示。设杆重可以不计，问在板上作用多大的水平力，始能在 $\theta=30°$ 时平衡？

6-13　上题中，设在 AB 杆上作用一力偶 M 来维持平衡，求此力偶矩的大小。已知杆长 0.2 m。如果力偶作用于板上，则结果有无不同？



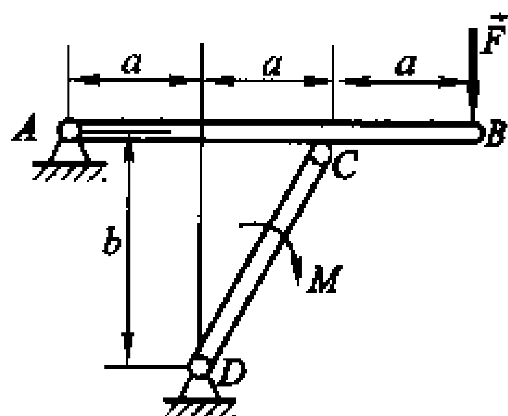
题6-12图



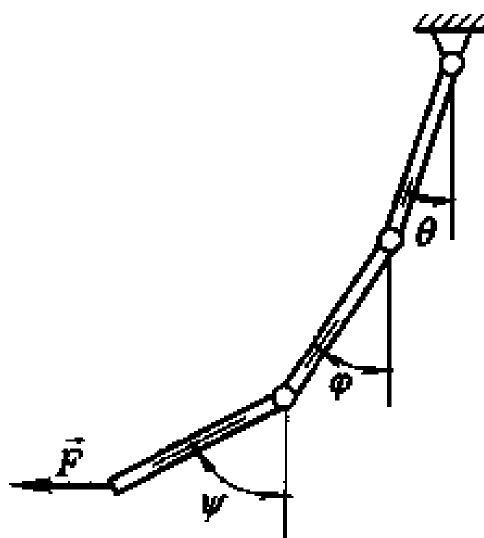
题6-13图

6-14 杆 AB,CD 由铰链 C 联结,并由铰链 A,D 固定如图示。在 AB 杆上作用一铅垂力 $\vec{F}$,在 CD 杆上作用一力偶,其矩为 M,不计杆重,求支座 D 处的约束力。

6-15 三根相同的匀质杆用铰链连接后,一端用铰链固定,一端有一水平力 $\vec{F}$ 作用如图示。设杆重 G。求平衡时的 θ 角。



题6-14图



题6-15图

6-16 上题中,已知平衡时 $\varphi=45^\circ$,求 θ 与 ψ。

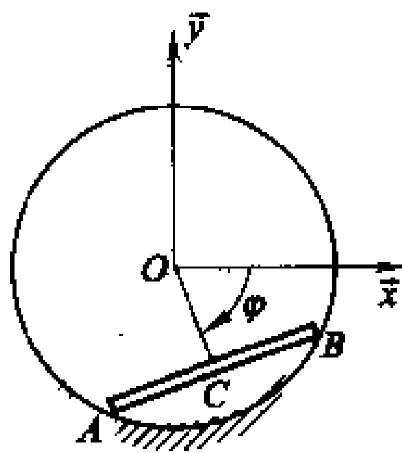
6-17 匀质杆 AB 重 G 长 l,约束在一光滑的固定铅直圆形容器中。圆的半径为 r。求杆的平衡位置,并讨论其稳定性。

6-18 匀质杆 AB 重 G,长 0.6 m,质量为 10 kg。$\theta=0^\circ$ 时弹簧无变形,弹簧刚度系数 $k=0.2$ kN/m,不计两小球的质量,求平衡时的 θ 角,并说明平衡的稳定性。

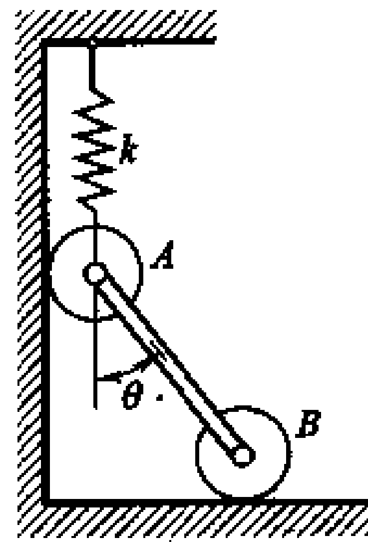
6-19 滑块 A 在一光滑斜面 B 上滑下如图示。如果斜面与水平面间的摩擦阻力可以忽略不计,则当 A 下滑的同时,斜面将在水平面上滑动。设 A 与 B 的质量分别为 m_1 与 m_2,用第二类拉格朗日方程求斜面运动的加速度以及 A 在斜面上滑下的加速度。

6-20 上题中,设 A 为一质量为 m_1 的圆柱,并假定圆柱与斜面间有足够的摩擦阻力阻止相对滑动。用第二类拉格朗日方程求斜面运动的加速度以及圆柱中心 A 相对于斜面的加速度。

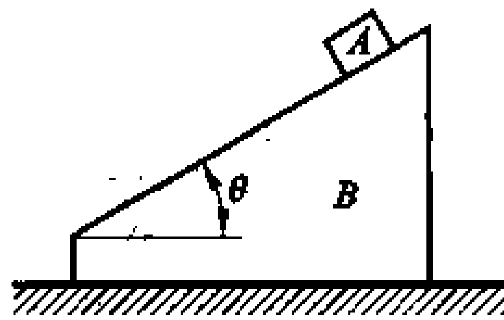
6-21 长 l 的匀质杆 AC 与 BC 以铰链 C 连接,一端 A 用铰链固定,一端 B 沿光滑水平面运动如图示。开始时 $\theta=60^\circ$,速度为零。求运动到 $\theta=30^\circ$ 时杆 AC 的角加速度。两杆均重 G。



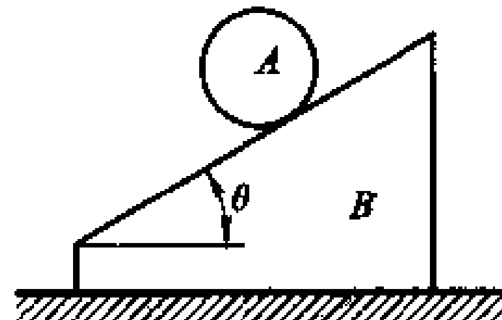
题 6-17 图



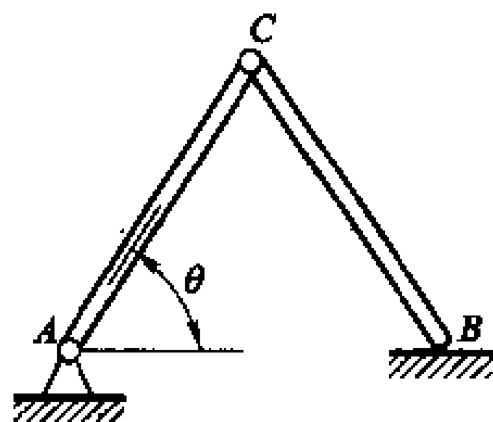
题 6-18 图



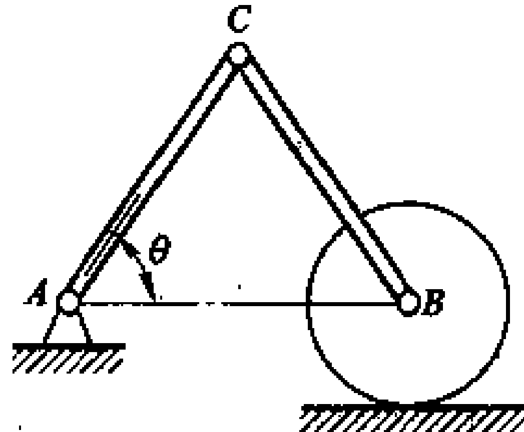
题 6-19 图



题 6-20 图



题 6-21 图



题 6-22 图

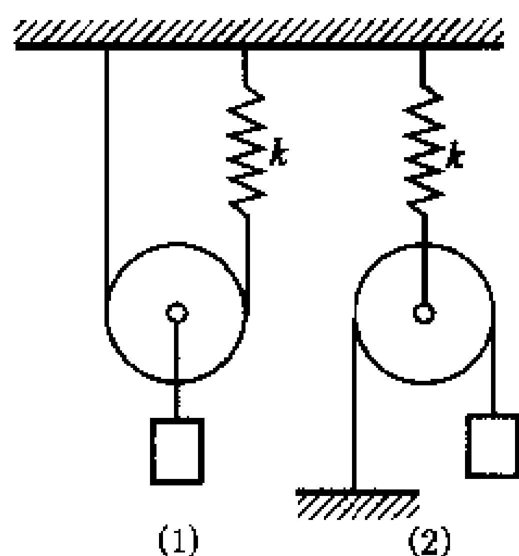
6-22 上题中,设在 BC 杆上装一轮子,轮子与杆的重量相同,可以看作匀质圆盘,在水平面上作纯滚动,其他条件同前,求 AC 杆在 $\theta=30°$时的角加速度。

6-23 求图示系统(1)与(2)的振动周期。已知重物的质量为 m,弹簧刚度系数为 k,滑轮的质量可以不计。

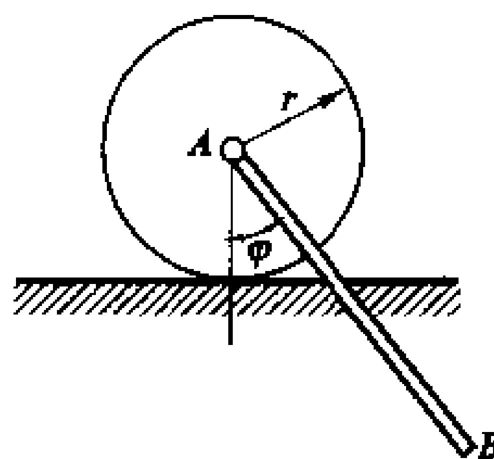
6-24 匀质圆轮的质量为 m,半径为 r,可在固定水平面上无滑动地滚动。匀质杆 AB 的质量为 m,长度为 $3r$。其 A 端与轮心用光滑铰链连接,如图所示。试用第二类拉格朗日方程建立系统的运动方程。

6-25 质量为 m 的匀质圆柱在三角块斜边上作纯滚动,如图所示。三角块的质量也为 m,置于光滑水平面上,其上有刚度系数为 k 的弹簧平行于斜面系在圆柱体轴心 O 上。设角

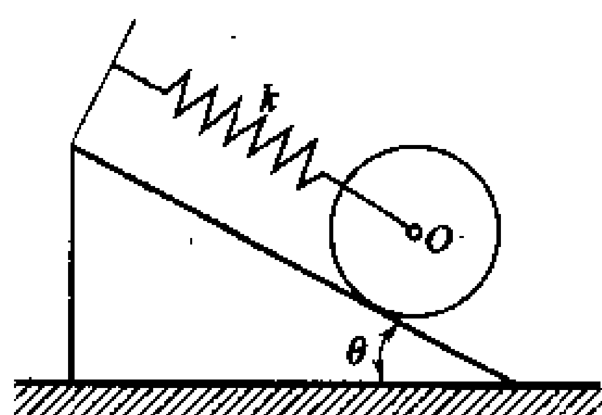
$\theta=30^\circ$，试用第二类拉格朗日方程建立系统的运动微分方程。



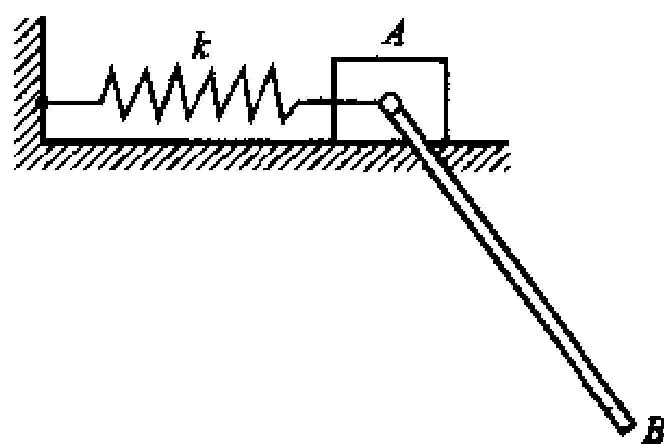
题6－23图



题6－24图



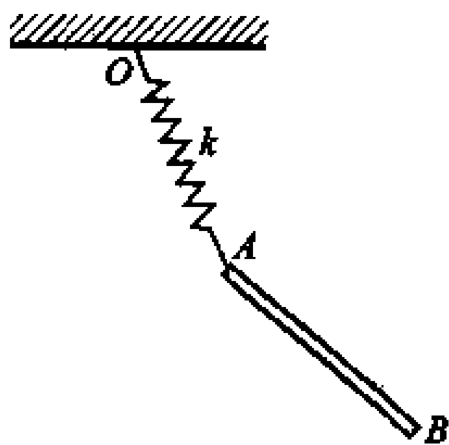
题6－25图



题6－26图

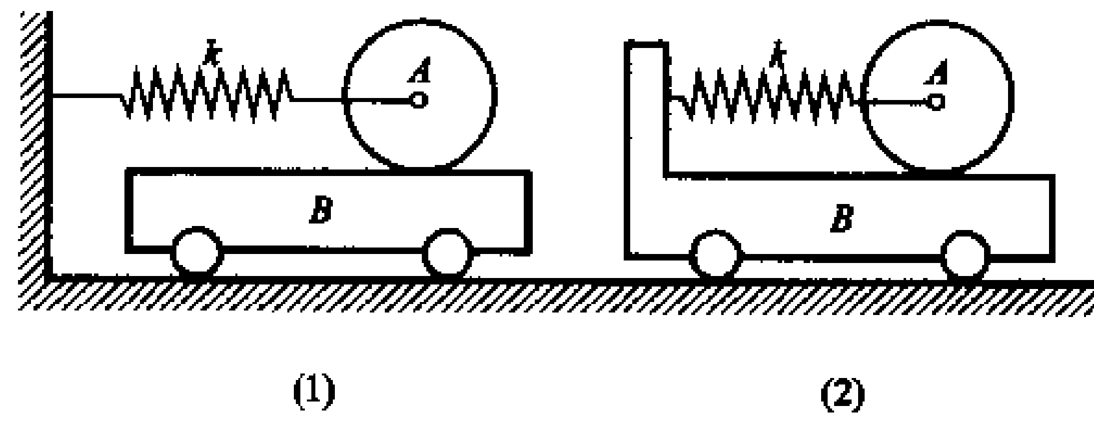
6－26　刚度系数为 k 的水平弹簧，一端固定，另一端与质量为 m 的滑块 A 相连，匀质直杆 AB 的质量为 m，长度为 l，其 A 端与滑块铰接。假设各处摩擦忽略不计，试用第二类拉格朗日方程写出系统的运动微分方程。

6－27　图示系统中，长为 $2a$，质量为 m 的匀质杆 AB 由刚度系数为 k 的弹簧悬挂在固定面上。弹簧的原长为 a，其质量忽略不计，系统在铅垂面内运动。试用第二类拉格朗日方程建立系统的运动微分方程。



题6－27图

6-28　求图示系统(1)与(2)的振动周期。已知 A 为匀质圆盘，质量为 m_A，小车 B 的质量为 m_B，弹簧刚度系数为 k。圆盘在车上只能作纯滚动而轨道的摩擦力可以不计。



题 6-28 图

6-29　上题中，设开始运动时，系统处于静止而弹簧有一伸长 δ，求此时小车 B 的加速度。

6-30　上题中，求当弹簧回到原长时小车的速度。

第 7 章　刚体系动力学及其计算机辅助分析

由第 4 章至第 6 章介绍的内容与例题可见，读者面临的动力学问题不外乎分为两类。一类是刚体与刚体系动力学瞬时分析问题，另一类是刚体与刚体系动力学过程分析问题。

对于前者读者可从矢量动力学出发，巧妙地利用动力学的三个基本定理与它们对应的守恒定理。或者从分析力学的基本原理出发，充分利用达朗贝尔原理与拉格朗日第二类方程的初积分。

对于动力学过程分析，其关键点是建立系统的动力学模型。如果处理的动力学问题不涉及理想约束力，通常可利用第 5 章提出的建立系统动力学模型的独立坐标法，或者利用第 6 章介绍的拉格朗日第二类方程。这两种方法的思路是一致的，即通过运动学分析合理地选取独立的广义坐标，建立的方程均为这些坐标的二阶常微分方程。两种方法的差别是一种从分析力与动量、动量矩出发，一种是从分析系统的功与能出发。如果处理的动力学问题涉及到理想约束力，通常可利用第 5 章提出的建立系统动力学模型的一般方法，或者利用第 6 章介绍的拉格朗日第一类方程。由于这两种方法建立的微分方程的个数均小于方程中变量的个数，故需增加系统的加速度约束方程参与一起求解。需要指出，对于复杂的工程对象，其刚体系的力学模型将相当复杂。无论利用独立坐标方法或拉格朗日第二类方程还是利用矢量动力学的一般方法或拉格朗日第一类方程，试图用手工推导系统的动力学方程与加速度约束方程是一件非常繁琐且极易出错的工作。

然而，带拉格朗日乘子的动力学方程与加速度约束方程的动力学模型的构成具有程式化与通用性的特征。它可将系统的动力学与静力学问题的分析相互贯通。分析过程便于计算机实现。因此这种数学模型已广泛应用于机械系统动力学、静力学的计算机辅助分析。

本章将介绍刚体系动力学、静力学的计算机辅助分析的基础。包括程式化刚体系动力学模型、动力学方程的求解方法、理想约束力的计算、刚体系静平衡分析等内容。本章最后介绍机械系统动力学、静力学的计算机辅助分析的过程。包括对工程对象的刚体系力学模型的建立，系统参数的定义与利用分析软件处理动力学问题。本书所附的软件《理论力学问题求解器》为读者提供了实践的机会。

7.1 带拉格朗日乘子刚体系动力学方程及其计算方法

7.1.1 单刚体动力学方程

在6.3节中已经推导了质点系虚功形式的动力学普遍方程(6.3-2)。刚体作为一种特殊的质点系,下面将由此式推导出单刚体平面运动虚功形式的动力学普遍方程。

图7-1所示一刚体。过定点O建立惯性基$\vec{e}$,过刚体质心C建立连体基$\vec{e}^{\mathrm{b}}$,刚体的位形由质心C的矢径$\vec{r}$在惯性基上的坐标阵$\boldsymbol{r}$与姿态角φ确定,即位形坐标为

$$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\quad\varphi)^{\mathrm{T}}=(x\quad y\quad\varphi)^{\mathrm{T}}\qquad(7.1-1)$$

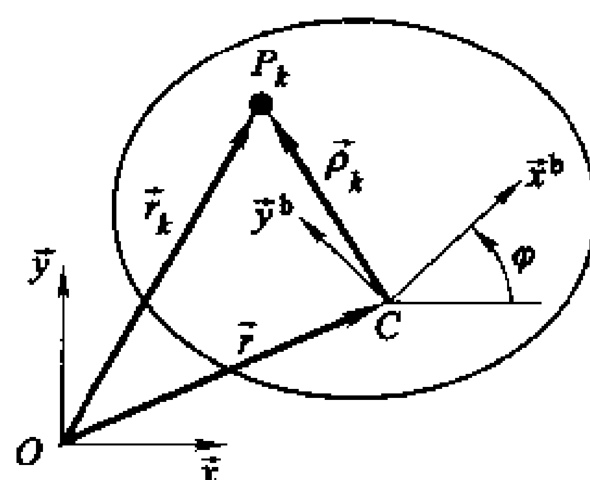


图7-1 平面刚体B_i位置矢量的定义

刚体上的任意点P_k关于O与C的矢径分别为$\vec{r}_k$与$\vec{\rho}_k$,由式(2.4-7)刚体上任意一点P_k的速度矢量可表为

$$\dot{\vec{r}}_k=\dot{\vec{r}}+\vec{\omega}\times\vec{\rho}_k\qquad(7.1-2)$$

式中:$\dot{\vec{r}}$为质心的速度矢量;$\vec{\omega}$为刚体的角速度矢量,且

$$\vec{\omega}=\dot{\varphi}\vec{z}\qquad(7.1-3)$$

这样P_k的真实位移可表示为

$$\mathrm{d}\vec{r}_k=\mathrm{d}\vec{r}+\mathrm{d}\varphi(\vec{z}\times\vec{\rho}_k)\qquad(7.1-4)$$

由此式可得到点P_k的虚位移与位形坐标虚位移的关系,

$$\delta\vec{r}_k=\delta\vec{r}+\delta\varphi(\vec{z}\times\vec{\rho}_k)\qquad(7.1-5)$$

将上式代入质点系虚功形式的动力学普遍方程(6.3-2)有

$$\delta\vec{r}\cdot\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k^*+\vec{F}_k^{\mathrm{a}})+\delta\varphi\sum_{k=1}^{n}(\vec{z}\times\vec{\rho}_k)\cdot(\vec{F}_k^*+\vec{F}_k^{\mathrm{a}})=0\qquad(7.1-6)$$

考虑到式(1.2-14),上式中的第二项求和号下的表达式可表为

$$(\vec{z}\times\vec{\rho}_k)\cdot(\vec{F}_k^*+\vec{F}_k^{\mathrm{a}})=\vec{z}\cdot(\vec{\rho}_k\times\vec{F}_k^*+\vec{\rho}_k\times\vec{F}_k^{\mathrm{a}})$$

回代到式(7.1-6),考虑到力矩的定义,有

$$\delta\vec{r}\cdot(\vec{F}^*+\vec{F}^{\mathrm{a}})+\delta\varphi\vec{z}\cdot(\vec{M}_C^*+\vec{M}_C^{\mathrm{a}})=0\qquad(7.1-7)$$

考虑到矢量$\vec{F}^*$与$\vec{F}^{\mathrm{a}}$在运动平面内,矢量$\vec{M}_C^*$与$\vec{M}_C^{\mathrm{a}}$垂直运动平面,与矢量$\vec{z}$平行。上式在惯性基的坐标阵为

$$\delta \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}^{*}+\boldsymbol{F}^{a})+\delta\varphi(M_C^{*}+M_C^{a})=0 \tag{7.1-8}$$

将惯性力的主矢与相对于质心 C 的主矩的表达式(6.1－13)与(6.1－12)代入上式,得到刚体平面运动虚功形式的动力学普遍方程,即

$$\delta \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(-m\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}^{a})+\delta\varphi(-J\ddot{\varphi}+M_C^{a})=0 \tag{7.1-9}$$

利用式(7.1－1),变分方程(7.1－9)可缩并成更紧凑的形式,即

$$\delta \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}}+\hat{\boldsymbol{F}}^{a})=0 \tag{7.1-10}$$

式中,

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{m} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & J\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & J\end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{F}}^{a}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}^{a}\\ M_C^{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_x^{a}\\ F_y^{a}\\ M_C^{a}\end{pmatrix} \tag{7.1-11}$$

分别称为**增广质量阵**与**增广主动力阵**。

对于自由刚体,位形坐标的变分 $\delta\boldsymbol{q}$ 相互独立,式(7.1－10)括号内的项应为零,故有

$$\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}}=\hat{\boldsymbol{F}}^{a} \tag{7.1-12}$$

或

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}^{a},\ J\ddot{\varphi}=M_C^{a}$$

即平面运动刚体动力学方程。

如果该刚体受到约束,位形坐标的变分 $\delta\boldsymbol{q}$ 相互不独立,得不到微分方程式(7.1－12)。令该刚体受到的约束可由 $s(<3)$ 个独立的约束方程,即

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0} \tag{7.1-13}$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1\ \ \cdots\ \ \Phi_s)^{\mathrm{T}}$。相应的速度与加速度约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}=-\boldsymbol{\Phi}_t \tag{7.1-14}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\gamma} \tag{7.1-15}$$

式中,$\boldsymbol{\Phi}_q\in\mathscr{R}^{s\times 3}$为约束方程的雅可比;加速度方程的右项

$$\boldsymbol{\gamma}=-(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}}-2\boldsymbol{\Phi}_{qt}\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\Phi}_{tt} \tag{7.1-16}$$

对约束方程(7.1－13)求等时变分,或直接由(7.1－14)可得该等时变分为

$$\boldsymbol{\Phi}_q\delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0} \tag{7.1-17}$$

引入 s 个待定的拉格朗日乘子 $\lambda_i(i=1,\cdots,s)$,构成列阵

$$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1\ \ \cdots\ \ \lambda_s)^{\mathrm{T}} \tag{7.1-18}$$

将式(7.1－17)两边转置,再将拉格朗日乘子阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 右乘两边,得

$$\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=0 \tag{7.1-19}$$

将方程(7.1－10)与(7.1－19)相减,得

$$\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}+\hat{\boldsymbol{F}}^{a})=0 \tag{7.1-20}$$

如果拉格朗日乘子选择适当,令事先指定的不独立的坐标变分前的系数为零,这样可得到 s 个方程。于是在方程(7.1-20)中只包含独立坐标变分前的 $\delta=3-s$ 个和式。既然这些坐标变分是独立的,那么这些变分前的系数也为零。这样则由式(7.1-20)可得如下微分形式的方程:

$$\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}} \tag{7.1-21}$$

这就是带拉格朗日乘子的刚体平面运动动力学方程。与式(5.2-10)比较知

$$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{n}}=-\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{7.1-22}$$

此式隐含了拉格朗日乘子与理想约束力(矩)的关系。

注意方程(7.1-21)的个数为3,但变量中除了3个位形坐标变量外还引入了 s 个未知的拉格朗日乘子,故需增加 s 个约束方程(7.1-13)。因此受约束刚体系的动力学模型为如下的微分-代数方程组:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}&=\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}\\\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)&=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \tag{7.1-23}$$

$3+s$ 个方程解 $3+s$ 个变量方程封闭。由于求解此方程的数值方法不成熟,故通常用加速度约束方程与方程(7.1-15)联立,即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}&=\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}\\\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}&=\boldsymbol{\gamma}\end{aligned}\right\} \tag{7.1-24}$$

或合并成一个矩阵式

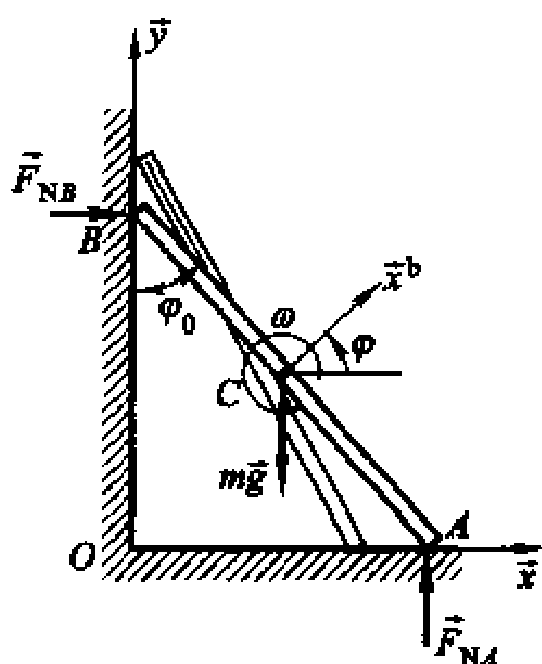
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\Phi}_q & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}}\\\boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}\\\boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix} \tag{7.1-25}$$

在利用矢量动力学的方法建立的动力学方程(5.2-10)求解系统动力学问题时,由于未知的理想约束力的存在,故需引入约束方程。对于利用拉格朗日乘子的动力学方程(7.1-21)求解同样的问题时,由于未知的拉格朗日乘子的存在,也需引入约束方程。可见两者在处理动力学问题的方法上是相通的。从表面上看方程(7.1-21)与(5.2-10)的差别似乎不大。其实不然,如果利用动力学方程(5.2-10),必须进行对理想约束力进行分析。不同的问题分析的过程与结果不同。而动力学方程(7.1-21)中不出现理想约束力,与该力有关的项统一用式(7.1-22)描述。在建立方程时不必对理想约束力进行分析,因此利用拉格朗日第一类方程建立方程(7.1-21)比利用矢量动力学方法建立动力学方程(5.2-10),更具有通用性与程式化。

[例 7.1-1] 利用拉格朗日第一类方程建立例 5.2-1 所示,均质杆 AB 的动力学方程。

解: 如图所示,在质心 C 建立杆的连体基 $\vec{e}^{\mathrm{b}}$,在 O 建立惯性基 $\vec{e}$。该杆关于

质心 C 的转动惯量为 $J_C = ml^2/12$。根据已知条件杆 AB 在运动过程中位形坐标之间有如下2个独立的约束方程($s=2$):



例7.1-1图

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} x - \dfrac{l}{2}\sin\varphi \\ y - \dfrac{l}{2}\cos\varphi \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

约束方程的雅可比与加速度约束方程的右项分别为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{l}{2}\cos\varphi \\ 0 & 1 & \dfrac{l}{2}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \dfrac{l}{2}\cos\varphi\ddot{\varphi} - \dfrac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2 \\ -\dfrac{l}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi} - \dfrac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

引入两个拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \quad \lambda_2)^{\mathrm{T}}$。系统受到的主动力为重力,由增广主动力阵的定义(7.1-11),有 $\hat{\boldsymbol{F}}^a = (0 \quad -mg \quad 0)^{\mathrm{T}}$。根据上面分析,由式(7.1-21)可得动力学方程

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ml^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{l}{2}\cos\varphi & \dfrac{l}{2}\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

或由式(7.1-25)可得到封闭的动力学方程

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{ml^2}{12} & -\dfrac{l}{2}\cos\varphi & \dfrac{l}{2}\sin\varphi \\ 1 & 0 & -\dfrac{l}{2}\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{l}{2}\sin\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \\ \dfrac{l}{2}\cos\varphi\ddot{\varphi} - \dfrac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2 \\ -\dfrac{l}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi} - \dfrac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

展开式(3),有

$$m\ddot{x} + \lambda_1 = 0 \tag{5}$$

$$m\ddot{y} + \lambda_2 = -mg \tag{6}$$

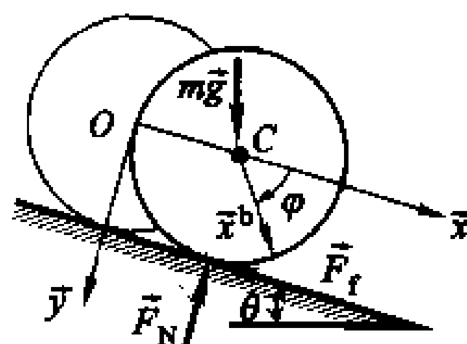
$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} - \lambda_1 \frac{l}{2}\cos\varphi + \lambda_2 \frac{l}{2}\sin\varphi = 0 \tag{7}$$

将式(5)~(7)与例5.2-1的(1)~(3)比较,可知理想约束力与拉格朗日乘子的关系为

$$\lambda_1 = -F_{NB},\quad \lambda_2 = -F_{NA}。$$

[例7.1-2] 考虑例5.2-2所示一均质圆柱在斜面上作无滑动滚动,建立其带拉格朗日乘子的动力学方程,且求拉格朗日乘子的表达式。

解: 建立如图所示在 O 处惯性基 $\vec{e}$,在圆柱质心 C 建立连体基 $\vec{e}^b$,初始时 C 与 O 重合。该圆柱关于质心 C 的转动惯量为 $J_C = mr^2/2$。考虑到圆柱在斜面上作无滑动滚动,有如下两个独立的约束方程($s=2$):



例7.1-2图

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} x - r\varphi \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

约束方程的雅可比矩阵与加速度约束方程的右项分别为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

引入两个拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \quad \lambda_2)^T$。需要注意的是圆柱无滑动滚动相当于圆柱与斜面间为齿轮与齿条的约束,理想约束力垂直于齿面的法线(参见图4-13),故可分解为图示的 $\vec{F}_N$ 与 $\vec{F}_f$,这两个力均不作功。故圆柱受到的主动力只有重力,由增广主动力阵的定义(7.1-11),如图所示,有 $\hat{F}^a = (mg\sin\theta \quad mg\cos\theta \quad 0)^T$。根据上面分析,由式(7.1-21)可得动力学方程

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta \\ mg\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

或由式(7.1-25)可得到封闭的动力学方程

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} & -r & 0 \\ 1 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta \\ mg\cos\theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

展开式(4),有

$$m\ddot{x} + \lambda_1 = mg\sin\theta \tag{5}$$

$$m\ddot{y} + \lambda_2 = mg\cos\theta \tag{6}$$

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} - \lambda_1 r = 0 \tag{7}$$

$$\ddot{x} - r\ddot{\varphi} = 0 \tag{8}$$

$$\ddot{y} = 0 \tag{9}$$

由式(6)与(9),可解得 λ_2。由式(5),(7)与(8),可解得 λ_1,即

$$\lambda_1 = (mg\cos\theta)/3, \quad \lambda_2 = mg\cos\theta \tag{10}$$

将式(5)~(7)与例5.2-2的式(5)~(7)比较,可知理想约束力与拉格朗日乘子的关系为 $\lambda_1 = F_f$, $\lambda_2 = F_N$。由式(10)可得理想约束力为

$$F_f = (mg\cos\theta)/3, \quad F_N = mg\cos\theta$$

与例5.2-2的第二种情况得到的结果一致。

7.1.2　刚体系动力学方程

对于有 N 个刚体构成的刚体系的动力学方程,同样可以由质点系虚功形式的动力学普遍方程(6.3-2)推导得到。

考虑系统中的刚体 $B_i(i=1,\cdots,N)$,由式(7.1-10)可知,该刚体上所受的主动力与惯性力作的虚功为

$$\delta W_i = \delta \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Z}_i\ddot{\boldsymbol{q}}_i + \hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{a}}) \tag{7.1-26}$$

需要指出的是这里的增广主动力阵应该计及刚体与刚体之间相互作用力所作的虚功。那么刚体系平面运动的虚功形式的动力学普遍方程为

$$\sum_{i=1}^{N}\delta \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Z}_i\ddot{\boldsymbol{q}}_i + \hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{a}}) = 0 \tag{7.1-27}$$

由式(7.1-1),定义刚体系的位形坐标阵

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad x_N \quad y_N \quad \varphi_N)^{\mathrm{T}} \tag{7.1-28}$$

它是 $3N$ 阶列阵,即 $n=3N$。这样由式(7.1-27)可得到更紧凑的形式,即

$$\delta \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}} + \hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}) = 0 \tag{7.1-29}$$

式中

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{Z}_N \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}_1^{\mathrm{a}} \\ \hat{\boldsymbol{F}}_2^{\mathrm{a}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{F}}_N^{\mathrm{a}} \end{pmatrix} \tag{7.1-30}$$

分别称为刚体系的增广质量阵与增广主动力阵，前者为 $N\times N$ 阶分块阵，后者为 $N\times 1$ 阶分块阵，式中的元素为各刚体的增广质量阵与增广主动力阵(7.1－11)，需加上相应刚体的下标。故增广质量阵为 n 阶方阵，增广力阵为 n 阶列阵。

如果刚体系为自由的，即刚体的自由度数为 n，那么刚体系位形坐标的变分相互独立，故式(7.1－29)中求和号下的每一项的括号均应为零。由此可得到系统微分形式的动力学方程，即

$$\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}} = \hat{\boldsymbol{F}}^{a} \tag{7.1－31}$$

然而，对于受约束的刚体系，其自由度数小于 $3N$，故刚体系位形坐标的变分相互不独立，得不到上述形式的方程。如果系统的约束方程有 s 个独立的约束方程，即

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t) = \boldsymbol{0} \tag{7.1－32}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_s)^{\mathrm{T}}$。相应的速度与加速度约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{\Phi}_t \tag{7.1－33}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\gamma} \tag{7.1－34}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}_q\in\mathscr{R}^{s\times n}$ 为约束方程的雅可比；加速度方程的右项

$$\boldsymbol{\gamma} = -(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}} - 2\boldsymbol{\Phi}_{qt}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\Phi}_{tt} \tag{7.1－35}$$

对约束方程(7.1－32)求等时变分，或直接由式(7.1－33)可得该等时变分为

$$\boldsymbol{\Phi}_q\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{7.1－36}$$

引入 s 个待定的拉格朗日乘子 $\lambda_i(i=1,\cdots,s)$，构成列阵

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_s)^{\mathrm{T}} \tag{7.1－37}$$

将式(7.1－36)两边转置，再将拉格朗日乘子阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 右乘两边，得

$$\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{7.1－38}$$

将方程(7.1－31)与(7.1－38)相减，得

$$\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} + \hat{\boldsymbol{F}}^{a}) = 0 \tag{7.1－39}$$

如果拉格朗日乘子选择适当，令事先指定的不独立的坐标变分前的系数为零，这样可得到 s 个方程。于是在方程(7.1－39)中只包含独立坐标变分前的 δ 个和式。既然这些坐标变分是独立的，那么这些变分前的系数也为零。这样由式(7.1－39)可得如下微分形式的方程：

$$\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{F}}^{a} \tag{7.1－40}$$

这就是带拉格朗日乘子的刚体系平面运动动力学方程。

注意方程(7.1－40)的个数为 n，但变量中除了 n 个坐标变量外还引入了 s 个未知的拉格朗日乘子，故需增加 s 个约束方程(7.1－32)。因此受约束刚体系

的动力学模型为如下的微分－代数方程组：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} &= \hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}} \\ \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t) &= \boldsymbol{0} \end{aligned}\right\} \tag{7.1-41}$$

$n+s$ 个方程解 $n+s$ 个变量方程封闭。由于求解此方程的数值方法不成熟，故通常用加速度约束方程与方程(7.1－40)联立，即

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} &= \hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}} \\ \boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{7.1-42}$$

或合并成一个矩阵式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\Phi}_q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} \tag{7.1-43}$$

[例 7.1－3]　建立例 5.2－3 所示系统的带拉格朗日乘子刚体系动力学方程。

解： 按例 5.2－3a 图所示建立惯性基 $\vec{e}$、斜面连体基 $\vec{e}^1$ 与圆柱连体基 $\vec{e}^2$。刚体系的位形坐标为

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{q}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{q}_2 = (x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$。

由例 5.2－3 的式(10)，(12)与(13)，系统的约束方程有 4 个($s=4$)，可表示为

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 - \theta \\ y_1 \\ (x_2 - x_1)\cos\varphi_1 + (y_2 - y_1)\sin\varphi_1 - r(\varphi_2 - \varphi_1) \\ (x_2 - x_1)\sin\varphi_1 - (y_2 - y_1)\cos\varphi_1 - l - r \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

考虑到式(1)，由例 5.2－3 的式(14)，(16)与(17)，该约束方程的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & -l & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & -r \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & r(\varphi_2 - \varphi_1) & \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

引入拉格朗日乘子阵 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4)^{\mathrm{T}}$。类似例 7.1－2 对圆柱与斜面间相互作用力的分析，这些约束力均为理想约束力。圆柱与斜面受到的主动力只有重力，由增广主动力阵的定义式(7.1－30)与(7.1－11)，有 $\hat{\boldsymbol{F}}_1^{\mathrm{a}} = (0 \quad -m_1 g \quad 0)^{\mathrm{T}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{F}}_2^{\mathrm{a}} = (0 \quad -m_2 g \quad 0)^{\mathrm{T}}$。根据上面分析，由式(7.1－40)可得动力学方程为

$$
\begin{pmatrix}
m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m_2 r^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_2
\end{pmatrix} +
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\
0 & 1 & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \\
1 & 0 & -l & r(\varphi_2 - \varphi_1) \\
0 & 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\
0 & 0 & \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \\
0 & 0 & -r & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4
\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix}
0 \\ -m_1 g \\ 0 \\ 0 \\ -m_2 g \\ 0
\end{pmatrix}
$$

经展开有

$$m_1 \ddot{x}_1 - \lambda_3 \cos\varphi_1 - \lambda_4 \sin\varphi_1 = 0 \tag{4}$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \sin\varphi_1 + \lambda_4 \cos\varphi_1 = -m_1 g \tag{5}$$

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + \lambda_1 - \lambda_3 l + \lambda_4 r(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \tag{6}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + \lambda_3 \cos\varphi_1 + \lambda_4 \sin\varphi_1 = 0 \tag{7}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \lambda_3 \sin\varphi_1 - \lambda_4 \cos\varphi_1 = -m_2 g \tag{8}$$

$$\frac{m_2 r^2}{2} \ddot{\varphi}_2 - \lambda_3 r = 0 \tag{9}$$

考虑到式(2)的第一式 $\varphi_1 = \theta$ 将式(4)~(9)等6个方程与例5.2-3的式(4)~(9)比较，可知乘子与理想约束力的关系为

$$\lambda_1 = -M_1, \quad \lambda_2 = F_{N1}, \quad \lambda_3 = F_{f2}, \quad \lambda_4 = -F_{N2} \tag{10}$$

请读者考虑，约束方程的雅可比是否可以根据例5.2-3的式(14)，(18)与(19)构成，即用下式代替式(3)

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\cos\varphi_1 & 0 & 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & -r \\
-\sin\varphi_1 & 0 & 0 & \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 & 0
\end{pmatrix}
$$

正如上节分析，与矢量动力学处理动力学问题的一般方法相比，受约束刚体系带拉格朗日乘子的动力学模型对解决复杂刚体系动力学问题更具有通用性与程式化的特征，故适用于计算机辅助分析。利用动力学方程(7.1-43)解决动力学问题的关键是定义刚体系的动力学模型。构成该模型有三个要素，即(1)系统

的惯量特性，表现在增广质量阵 $\boldsymbol{Z}$，它是由各刚体增广质量阵 $\boldsymbol{Z}_i$ 按式(7.1－30)组集而成。利用4.2节的概念很容易解决；(2) 系统的约束，表现在约束方程的雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 与加速度约束方程的右项 $\boldsymbol{\gamma}$。有关约束问题程式化的描述已在第3章详细介绍，可以直接引用那些结果；(3) 作用于系统的增广主动力阵 $\hat{\boldsymbol{F}}^a$ 它是由各刚体增广主动力阵 $\hat{\boldsymbol{F}}_i^a$ 按式(7.1－30)组集而成。在考虑各刚体增广主动力阵 $\hat{\boldsymbol{F}}_i^a$ 时，对于刚体系应注意不要遗漏刚体间作功的相互作用力对其贡献。下节将作详细的讨论。

7.1.3　系统的外力与力元

图7－2为一挖土机的示意图，作为刚体系的力学模型，有3个刚体，刚体 B_1 与 B_2 和 B_2 与 B_3 有铰相连。系统各刚体受到的外力为重力。图中在 O_1 与 O_2 间和 O_3 与 O_4 间有两个油压作动筒，它们提供推(或拉)力使 B_1 与 B_2 和 B_2 与 B_3 相对运动。如果不计作动筒的质量，上述的推(或拉)力是系统中刚体间的内力。同样在 O_5 与 O_6 间线弹簧力也是作用于刚体 B_1 与 B_2 内力。这些内力在刚体的运动的过程中将作功。现将这些内力称为**力元**。在工程中这种力元还有阻尼器、电动机等。显然力元还包括刚体连接铰间的非理想约束力，如铰间的摩擦等。

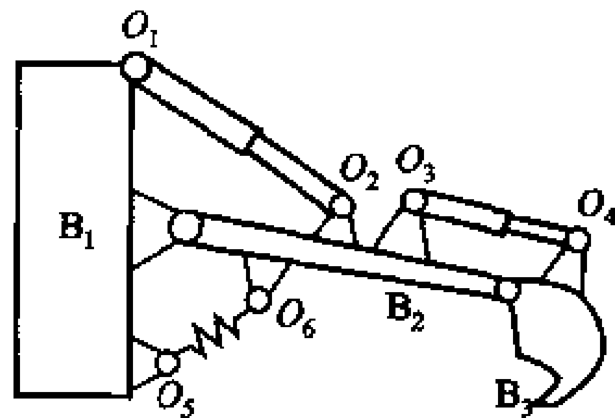


图7－2　挖土机示意图

对于刚体系中某刚体，主动力 $\hat{\boldsymbol{F}}_i^a$ 应包括与该刚体相关的外力和力元的贡献。下面分别讨论几种常见的外力与力元对主动力 $\hat{\boldsymbol{F}}_i^a$ 贡献的统一表达式。

1. 主动力(偶)

设在刚体 B_i 的点 P_k 上作用于一主动力 $\vec{F}_i^k$，它在连体基上的坐标阵为 $\boldsymbol{F}_i'^k=(F_{ix}'^k \quad F_{iy}'^k)^{\mathrm{T}}$。点 P_k 在连体基上的矢径为 $\vec{\rho}_i^k$，它在连体基上的坐标阵为 $\boldsymbol{\rho}_i'^k=(x_i'^k \quad y_i'^k)^{\mathrm{T}}$。该力对刚体质心的矩 $\vec{M}_i^k=\vec{\rho}_i^k\times\vec{F}_i^k=M_i^k\vec{z}$。由式(1.4－7)，模 M_i^k 的表达式为，

$$M_i^k=(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}_i^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i^k-(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}_i'^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i'^k=-y_i'^kF_{ix}'^k+x_i'^kF_{iy}'^k$$

这样，主动力 $\vec{F}_i^k$ 对动力学方程(7.1－43)的 $\hat{\boldsymbol{F}}^a$ 贡献为

$$\hat{\boldsymbol{F}}_i^a=((\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{F}_i'^k)^{\mathrm{T}} \quad (\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\rho}_i'^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i'^k)^{\mathrm{T}} \tag{7.1－44}$$

对于重力，通常给出的是重力加速度矢量 $\vec{g}$ 在惯性基的坐标阵 $\boldsymbol{g}=(g_x \quad g_y)^{\mathrm{T}}$，重力对质心无矩，同上面的分析，重力对动力学方程(7.1－43)中 $\hat{\boldsymbol{F}}^a$ 的贡献为

$$\hat{F}_i^a = m_i(g_x \quad g_y \quad 0)^T \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{7.1-45}$$

若在刚体 B_i 上作用于一主动力偶，记为 $\vec{M} = M\vec{z}$。该主动力矩对动力学方程(7.1－43)的 $\hat{F}^a$ 贡献为

$$\hat{F}_i^a = (0 \quad 0 \quad M)^T \tag{7.1-46}$$

2．线弹簧阻尼器与线驱动力作用器

图 7－2 所示的油压作动筒为**线驱动力作用器**的工程例子。此外线弹簧阻尼器在工程中也大量使用。这些力元的共同点是它们施加的力始终沿力元作用点的连线，故在命名上冠以“线”。

令某线弹簧阻尼器与驱动力作用器的作用点 D 与 E 分别在刚体 B_α 与 B_β 上(见图 7－3)。它们在各自刚体上的位置由各自刚体质心出发的矢径 $\vec{\rho}_\alpha^D$ 与 $\vec{\rho}_\beta^E$ 确定。两刚体质心的矢径分别为 $\vec{r}_\alpha$ 与 $\vec{r}_\beta$。定义矢量 $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$，由图 7－3 所示的矢量间的关系，可得到如下的在惯性基下的坐标式：

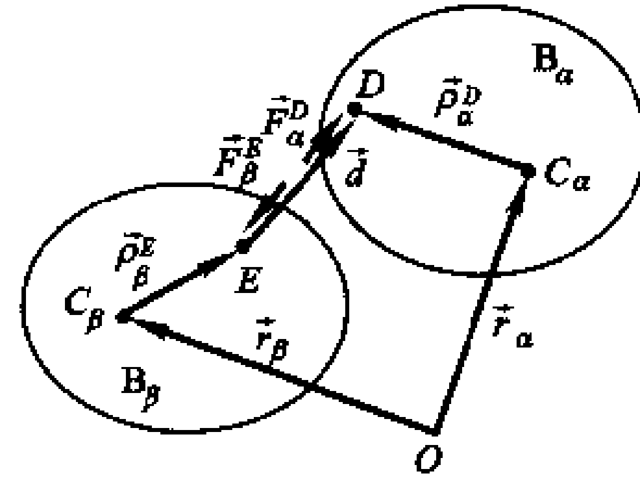


图 7－3 力元运动学

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha'^D - \boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{A}^\beta \boldsymbol{\rho}_\beta'^E \tag{7.1-47}$$

将上式对时间求导，考虑到式(1.4－11)，得到作用点 D 相对于 E 的相对速度在惯性基上的坐标式

$$\boldsymbol{v}_{ED} = \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha'^D \dot{\varphi}_\alpha + \dot{\boldsymbol{r}}_\beta - \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta \boldsymbol{\rho}_\beta'^E \dot{\varphi}_\beta \tag{7.1-48}$$

令刚体 B_β 作用于 B_α 与刚体 B_α 作用于 B_β 弹簧阻尼力与主动力的合力分别为

$$\vec{F}_\alpha^D = F\vec{d}/d, \ \vec{F}_\beta^E = -F\vec{d}/d \tag{7.1-49}$$

式中：d 为矢量 $\vec{d}$ 的模，F 为该合力的模，如果弹簧为线性弹簧，阻尼为线性粘性阻尼，则根据它们的定义，有

$$F = -k(d - d_0) - c\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{v}/d + F^D/d \tag{7.1-50}$$

式中：d_0 为弹簧的原长；k 与 c 分别为线性弹簧阻尼器刚度系数与线性阻尼系数；F^D 为 B_β 作用于 B_α 的驱动力作用器施加力的值。类似于主动力的分析，对照式(7.1－44)，该力元对动力学方程(7.1－43)的 $\hat{F}^a$ 的贡献各有两项，它们分别为

$$\hat{F}_\alpha^a = \frac{F}{d}(\boldsymbol{d}^T(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha'^D)^T\boldsymbol{d})^T \tag{7.1-51}$$

$$\hat{F}_\beta^a = -\frac{F}{d}(\boldsymbol{d}^T(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta \boldsymbol{\rho}_\beta'^E)^T d)^T \tag{7.1-52}$$

式中,$\boldsymbol{d}$ 为矢量在惯性基上的坐标阵。

3. 卷簧阻尼器与旋转驱动力作用器

卷簧阻尼器是工程上常见的力元,电动机是旋转驱动力作用器的工程背景。这两种力元通常与转动铰联系在一起。对于非理想的转动铰可理解为理想约束的转动铰与相关的旋转力元的组合。对于平面运动的刚体系,旋转铰的旋转轴垂直于运动平面,转轴的单位矢量均为 $\vec{z}$。令该旋转铰关联的刚体为 B_α 与 B_β。B_α 相对 B_β 的转角由固结在两刚体上的单位矢量 $\vec{s}_\alpha$ 与 $\vec{s}_\beta$ 的夹角 θ 描述(见图 7-4)。而这两个单位矢量在各自刚体上的方位用 θ_α 与 θ_β 表示,它们为给定的常数。故

$$\theta = \varphi_\alpha - \varphi_\beta + \theta_\alpha - \theta_\beta \quad (7.1-53)$$

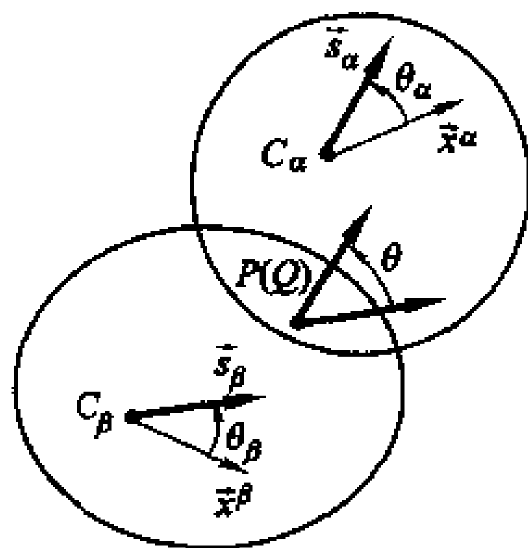


图 7-4 相对转动角的定义

B_α 相对 B_β 的角速度为

$$\omega_{\beta\alpha} = \dot{\varphi}_\alpha - \dot{\varphi}_\beta \quad (7.1-54)$$

令刚体 B_β 作用于 B_α 与刚体 B_α 作用于 B_β 弹簧阻尼力矩与驱动力矩的合力矩分别为

$$\vec{M}_\alpha = M\vec{z}, \qquad \vec{M}_\beta = -M\vec{z}$$

其模为

$$M = M^D - k(\theta - \theta_0) - c\omega_{\beta\alpha} = M^D - k(\varphi_\alpha - \varphi_\beta + \zeta) - c\omega_{\beta\alpha} \quad (7.1-55)$$

式中:θ_0 为初始相对转角;$\zeta = \theta_\alpha - \theta_\beta - \theta_0$;$k$ 与 c 分别为弹簧阻尼器的刚度系数与阻尼系数;M^D 为 B_β 作用于 B_α 旋转驱动力作用器的力矩值。类似于主动力矩的分析,对照式(7.1-46),该力元对动力学方程(7.1-43)的 $\hat{\boldsymbol{F}}^a$ 的贡献各有两项,它们分别为

$$\hat{\boldsymbol{F}}_i^a = \pm(0 \quad 0 \quad M)^T \quad (7.1-56)$$

式中:当 $i = \alpha$ 时取正;当 $i = \beta$ 时取负。

[例 7.1-4] 考虑图示一复摆,质量为 m_1,相对于质心 C 的转动惯量为 J_1。质心 C 到铰 O 的距离为 l。在铰 O 上有一卷簧,刚度系数为 k,当摆杆处于右侧水平位置时,卷簧无弹簧力矩。试建立该复摆的动力学方程。

解: 首先建立如图所示的惯性基 $\vec{e}$,在摆的质心 C 处建立连体基 $\vec{e}^1$。摆的位形坐标为 $\boldsymbol{q}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^T$。

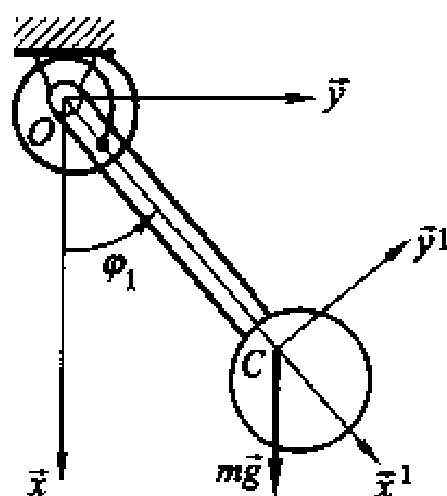
铰 O 的约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} x_1 - l\cos\varphi_1 \\ y_1 - l\sin\varphi_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{1}$$

它的雅可比矩阵与加速度约束方程的右项分别为

$$\boldsymbol{\Phi}_{q1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l\sin\varphi_1 \\ 0 & 1 & -l\cos\varphi_1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma} = -\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix}\dot{\varphi}_1^2 \tag{2}$$

独立的约束方程的个数 $s=2$，拉格朗日乘子有 2 个，令 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1 \quad \lambda_2)^{\mathrm{T}}$。



例 7.1－4 图

由图示，系统受到的外力为重力，重力加速度矢量 $\vec{g}$ 在惯性基下的坐标阵为 $\boldsymbol{g}=(g \quad 0)^{\mathrm{T}}$。由式(7.1－45)，它对增广主动力阵的贡献为

$$\hat{\boldsymbol{F}}_1^{a} = m(g \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

对于卷簧力元，其关联的刚体为惯性基与摆，令 $\alpha=1,\beta=0$（惯性基）。定义 $\vec{s}_0=\vec{x}$，$\vec{s}_1=\vec{x}^1$，故 $\theta_1=\theta_0=0$。由已知条件，卷簧无弹簧力矩时，摆与惯性基的相对初始转角 $\theta_0=\pi/2$，故 $\zeta=-\theta_0=-\pi/2$。由式(7.1－53)与(7.1－55)，有 $M=-k(\varphi_1-\pi/2)$。故由式(7.1－56)，该力元对增广主动力阵的贡献为

$$\hat{\boldsymbol{F}}_2^{a} = (0 \quad 0 \quad -k(\varphi_1-\pi/2))^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

这样增广主动力阵 $\hat{\boldsymbol{F}}_1^{a}=\hat{\boldsymbol{F}}_1^{a}+\hat{\boldsymbol{F}}_2^{a}$，考虑到式(2)，由式(7.1－40)可得如下复摆带拉格朗日乘子的动力学方程：

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l\sin\varphi_1 & -l\cos\varphi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ -k(\varphi_1-\pi/2) \end{pmatrix} \tag{5}$$

由式(7.1－43)构成封闭的动力学方程的形式，即

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & J & l\sin\varphi_1 & -l\cos\varphi_1 \\ 1 & 0 & l\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l\cos\varphi_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ -k(\varphi_1-\pi/2) \\ -l\varphi_1^2\cos\varphi_1 \\ -l\varphi_1^2\sin\varphi_1 \end{pmatrix}$$

7.1.4 计算方法

由以上推导，已经得到刚体系通用的动力学模型(7.1－43)，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\Phi}_q & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}^{a} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} \tag{7.1－57}$$

当该方程的初始条件给定，即当 $t = t_0$ 时，

$$q(t_0) = q_0, \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0 \tag{7.1-58}$$

求解位形坐标阵 $q(t)$ 与 $\lambda(t)(t_0 \leqslant t \leqslant t_{\text{end}})$ 的问题称为**动力学仿真**计算。下面将要讨论动力学仿真的计算方法。

需要指出的是动力学模型式(7.1-57)的不是典型的常微分方程组，故动力学仿真计算不是一般的常微分方程组初值问题(见附录2.3)。为此定义变量阵

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{R}^{n \times 1} \tag{7.1-59}$$

将方程(7.1-57)改写为

$$Ax = b \tag{7.1-60}$$

式中，

$$A = \begin{pmatrix} Z & \Phi_q^{\mathrm{T}} \\ \Phi_q & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{R}^{n \times n}, b = \begin{pmatrix} \hat{F}^a \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{R}^{n \times 1} \tag{7.1-61}$$

通常 A 为位形坐标阵 q 函数，b 为位形坐标阵 q、速度阵 $\dot{q}$ 与时间 t 的函数。在某瞬时 t，如果 $q(t)$ 与 $\dot{q}(t)$ 为已知，由代数方程(7.1-60)可解得

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = \lambda = x_2(t) \tag{7.1-62}$$

再令一新的变量阵

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \in \mathscr{R}^{2n \times 1} \tag{7.1-63}$$

由式(7.1-59)，可得到如下的常微分方程组：

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ x_1(t) \end{pmatrix} \tag{7.1-64}$$

由式(7.1-58)与(7.1-63)，该方程的初值为

$$y_1(t_0) = q_0, \; y_2(t_0) = \dot{q}_0$$

综上所述，经过上述变换，动力学仿真计算归结为对典型的常微分方程组(7.1-64)的**初值问题**。

由附录B.3知，在对上述初值问题进行数值积分的过程中，需用到方程(7.1-64)右函数的值。一般的初值问题右函数的计算比较简单。而这里的方程(7.1-64)之右函数中的 $x_1(t)$ 值不能直接得到，需通过解代数方程(7.1-60)得到式(7.1-62)。此时拉格朗日乘子的值也同时得到。由此可知，在解上述的初值问题时，除了应用常微分方程初值问题的数值积分外，还将用到求解线性代数方程组的数值方法(见附录B.1)。

将数值积分方法选用欧拉方法，见附录B.3可知，欧拉方法是一种单步法，对于常微分方程

$$\dot{y} = f(y,t)$$

通过化导数为差商可得如下递推的计算公式

$$y^{i+1} = y^i + hf(y^i, t^i) \qquad (7.1-65)$$

式中，h 为积分的时间步长。上式给出了已知第 i 步（$t = t^i$）的积分值 y^i，计算第 $i+1$ 步（$t = t^{i+1} = t^i + h$）的积分值 y^{i+1} 的算式。根据此式与式(7.1-64)可得到仿真计算的递推式，即

$$y^{i+1} = \begin{Bmatrix} y_1^{i+1} \\ y_2^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1^i + hy_2^i \\ y_2^i + hx_1(t^i) \end{Bmatrix} \qquad (7.1-66)$$

下面具体说明以式(7.1-66)进行仿真计算的步骤：

(1) 将时间区间$[t_0 \quad t_{end}]$离散，以步长 h 分为若干时间点，$t^0, t^1, t^2, \cdots, t^n$，其中 $t^n = t_{end}, t^{i+1} = t^i + h$。

(2) 计数器 $i = 0$，$y_1(t^i) = \boldsymbol{q}_0$，$y_2(t^i) = \dot{\boldsymbol{q}}_0$，

(3) 对于时间 t^i，

(a) 根据式(7.1-61)计算 $\boldsymbol{A}[y_1(t^i)]$，$\boldsymbol{b}[y_1(t^i), y_2(t^i), t^i]$

(b) 利用高斯消元法解代数方程，得 $x_1 = x_1(t^i)$，$x_2 = x_2(t^i)$

(c) 利用式(7.1-66)得 $y_1(t^{i+1})$，$y_2(t^{i+1})$

(d) 输出 $y_1(t^{i+1})$，$y_2(t^{i+1})$ 与 $x_2 = x_2(t^i)$

(4) 计数器 $i = i + 1$，判断 $t^i < t^n + h$，如果是则返回(3)否则计算结束。

上述过程多算一个步长是因为在(3/d)中输出的是 $x_2 = x_2(t^i)$ 而不是 $x_2 = x_2(t^{i-1})$，即得到的是前一步 $t = t^i$ 的拉格朗日乘子的值。

7.2 动力学逆问题与理想约束力

在刚体系动力学分析中，已知外力求系统各运动学量称之为动力学正问题，反之称为动力学逆问题。逆动力学分析在机械系统动力学与控制中占有很重要的地位，如对于操作机械臂，逆动力学分析的任务就是确定产生一定运动效果的驱动力(矩)。然而，对于一般受控的刚体系，通常只有部分连接铰运动规律为已知，系统的仿真问题成为已知外力与部分铰受控的情况下，研究系统的运动规律与驱动铰控制力(矩)。这类问题称为动力学正逆混合问题。

在刚体系的动力学模型中，铰的力控制表现为力元，时间历程的控制表现为驱动约束。驱动铰作为一种约束它减少了系统的自由度，故为理想约束力(矩)，它与拉格朗日乘子有关。因此无论是动力学的逆问题还是正逆混合问题，只要求得拉格朗日乘子，即可解得铰的理想约束力(矩)，包括实现铰驱动规律的力(矩)。本节将导出理想约束力与拉格朗日乘子之间的一般关系式。

7.2.1 动力学逆问题

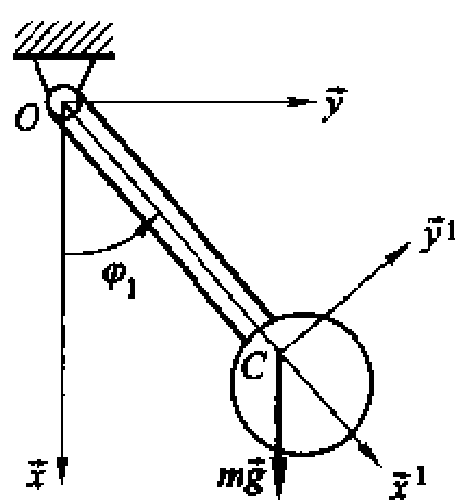
动力学逆问题是这样一种特殊情况，即系统的主约束方程加上驱动约束方程的个数与系统的位形坐标数相等，自由度数为零。系统的位置、速度与加速度可通过运动学分析完全确定，即系统的位形坐标 $\boldsymbol{q}$、速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 与加速度 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 均为已知，将它们代入动力学方程(7.1－26)，有

$$\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{Z}\ddot{\boldsymbol{q}} + \hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{A}} \qquad (7.2-1)$$

这是一个以拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 为变量的线性代数方程组。解出 $\boldsymbol{\lambda}$，利用下节将要推导的拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 与理想约束力的关系，即可得到系统的约束反力(矩)与驱动铰控制力(矩)的值。

[例 7.2－1]　对于例 7.1－4 的复摆，如果此摆铰 O 上的旋转弹簧改为一驱动铰。其他参数相同，求解在如下驱动规律下的动力学逆问题。

$$\Phi^{\mathrm{D}} = \varphi_1 - \sin \pi t = 0$$



例 7.2－1 图

解：将摆的主约束方程例 7.1－4 中式(1)，加上驱动约束，系统的约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} x_1 - l\cos\varphi_1 \\ y_1 - l\sin\varphi_1 \\ \varphi_1 - \sin\pi t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

显然，约束方程的个数与坐标数均为 3，系统的自由度数为零。约束方程的雅可比为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l\sin\varphi_1 \\ 0 & 1 & -l\cos\varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

由式(7.1－26)可得复摆带拉格朗日乘子的动力学方程为

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l\sin\varphi_1 & -l\cos\varphi_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

方程(3)可变换成如下拉格朗日乘子的代数方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l\sin\varphi_1 & -l\cos\varphi_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3')$$

由约束方程(1)及其速度与加速度约束方程可解得各瞬时的复摆的位形坐标、速

度与加速度，故代入上式可解出拉格朗日乘子在各瞬时的值。

由于本例比较简单，由约束方程(1)可得如下的加速度约束方程：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & l\sin\varphi_1 \\ 0 & 1 & -l\cos\varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1 \\ -l\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 \\ \pi^2\sin\pi t \end{pmatrix}$$

由此解出 $\ddot{\boldsymbol{q}}_1$，代入动力学方程(3′)，可解出拉格朗日乘子的表达式，即

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg + ml\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1 + ml\pi^2\sin\varphi_1\sin\pi t \\ ml\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 - ml\pi^2\cos\varphi_1\sin\pi t \\ -mlg\cos\varphi_1 - \pi^2(J + ml^2\sin\varphi_1)\sin\pi t \end{pmatrix} \tag{4}$$

7.2.2 理想约束力与拉格朗日乘子的关系

考虑刚体系中的刚体 $B_i(i = 1,2,\cdots,N)$，过定点 O 建立惯性基 $\vec{e}$，过质心 C_i 建立连体基 $\vec{e}^i$。质心 C_i 关于 O 的矢径为 $\vec{r}_i$。$\vec{e}^i$ 相对于 $\vec{e}$ 的方向余弦阵为 $\boldsymbol{A}^i$。考虑铰 H_k，其在刚体 B_i 上的铰点为 P_k。铰点 P_k 关于 O 和 C 的矢径分别为 $\vec{r}_i^k$ 与 $\vec{\rho}_i^k$（见图7-5）。这些矢径有如下关系：

$$\boldsymbol{r}_i^k = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\rho}_i^k = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\rho}_i^{\prime k} \tag{7.2-2}$$

对时间求导，点 P_k 速度坐标阵的表达式为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i^k = \dot{\boldsymbol{r}}_i + \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\rho}_i^{\prime k}\dot{\varphi}_i \tag{7.2-3}$$

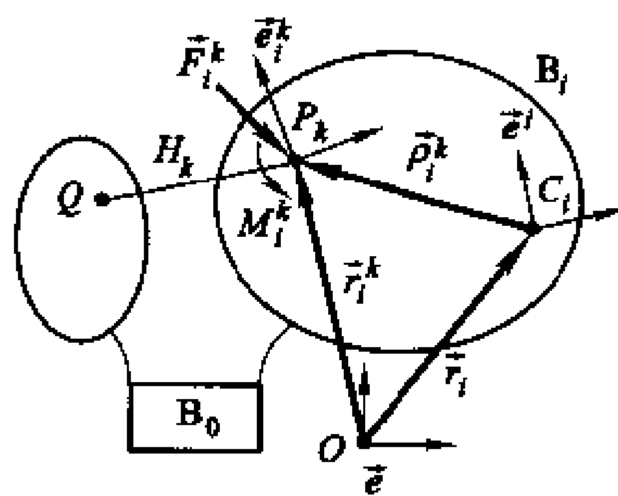


图 7-5 切断铰约束反力

在铰点 P_k 上建立固结于刚体的铰坐标系 $\vec{e}_i^k$，此基与连体基 $\vec{e}^i$ 的方向余弦阵为常值阵，记为 $\boldsymbol{C}_i^k$。由式(2.2-3)知，基 $\vec{e}^i$ 与 $\vec{e}_i^k$ 的位形坐标阵分别为

$$\boldsymbol{q}_i = (\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}} \quad \varphi_i)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{q}_i^k = (\boldsymbol{r}_i^{k\mathrm{T}} \quad \varphi_i + \theta)^{\mathrm{T}} \tag{7.2-4}$$

式中，θ 为常数。位形速度阵分别为

$$\dot{\boldsymbol{q}}_i = (\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}} \quad \dot{\varphi}_i)^{\mathrm{T}}, \quad \dot{\boldsymbol{q}}_i^k = (\dot{\boldsymbol{r}}_i^{k\mathrm{T}} \quad \dot{\varphi}_i)^{\mathrm{T}} \tag{7.2-5}$$

考虑到式(7.2-3)，由上式可得到两速度阵的关系为

$$\dot{\boldsymbol{q}}_i = \boldsymbol{K}_i^k\dot{\boldsymbol{q}}_i^k \tag{7.2-6}$$

式中，

$$\boldsymbol{K}_i^k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & -\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\rho}_i^{\prime k} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \tag{7.2-7}$$

由式(7.2－6),可得到两位形坐标变分之间的关系为

$$\delta \boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{K}_i^k \delta \boldsymbol{q}_i^k \tag{7.2-8}$$

如果将 H_k 铰切断,从动力学等效的角度,刚体 B_i 与其邻接刚体上需引入理想约束力(矩)作为外力(矩),将作用在刚体 B_i 上的约束力的主矢记为 $\vec{F}_i^k$,约束力的主矩记为 $\vec{M}_i^k$(见图7－5)。将它们表为增广外力的形式,即

$$\hat{\vec{\boldsymbol{F}}}_i^k = (\vec{F}_i^k \quad \vec{M}_i^k)^{\mathrm{T}} \tag{7.2-9}$$

称为切断铰 P_k 增广力。它在铰坐标系 $\vec{e}_i^k$ 与惯性基的坐标阵分别为

$$\hat{\boldsymbol{F}}_i^{\prime k} = (\hat{\boldsymbol{F}}_i^{\prime k\mathrm{T}} \quad M_i^{\prime k})^{\mathrm{T}},\ \hat{\boldsymbol{F}}_i^k = ((\boldsymbol{A}^i \boldsymbol{C}_i^k \boldsymbol{F}_i^{\prime k})^{\mathrm{T}} \quad M_i^{\prime k})^{\mathrm{T}} \tag{7.2-10}$$

在此增广力的作用下,刚体 B_i 的动力学性态不变,即动力学方程(7.1－40)依然成立。

如果系统有铰 h 个,每个铰的约束方程为 $s_k(k=1,2,\cdots,h)$,系统的约束方程为 $s=\sum_{k=1}^{h} s_k$。现将系统约束方程(7.1－32)改为以各铰点的约束方程分块排列,即

$$\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi}^{1\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\Phi}^{2\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Phi}^{h\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{7.2-11}$$

式中,元素 $\boldsymbol{\Phi}^k \in \mathscr{R}^{s_k \times 1}$。这样,该约束方程的雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 表示为块矩阵形式,有

$$\boldsymbol{\Phi}_q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{q_1}^1 & \boldsymbol{\Phi}_{q_2}^1 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{q_N}^1 \\ \boldsymbol{\Phi}_{2q_1}^2 & \boldsymbol{\Phi}_{2q_2}^2 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{2q_N}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{q_1}^h & \boldsymbol{\Phi}_{q_2}^h & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{q_N}^h \end{bmatrix} \tag{7.2-12}$$

式中,元素

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_i}^k = (\boldsymbol{\Phi}_{r_i}^k \quad \boldsymbol{\Phi}_{\varphi_i}^k) \in \mathscr{R}^{s_k \times 3} \tag{7.2-13}$$

再将 s 个拉格朗日乘子阵 $\boldsymbol{\lambda}^k \in \mathscr{R}^{s_k \times 1}(k=1,2,\cdots,h)$ 对应式(7.2－11)分块排列,即

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}^{1\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\lambda}^{2\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\lambda}^{h\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{7.2-14}$$

考虑到式(7.2－11)～(7.2－14),展开系统动力学方程(7.1－26)有

$$\boldsymbol{Z}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i + \sum_{j=1,\neq k}^{h} \boldsymbol{\Phi}_{q_i}^{j\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k = -\boldsymbol{\Phi}_{q_i}^{k\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k + \hat{\boldsymbol{F}}_i^{\mathrm{a}} (i=1,2,\cdots,N) \tag{7.2-15}$$

方程(7.2－15)是刚体 B_i 的动力学方程,方程中的 $-\boldsymbol{\Phi}_{q_i}^{k\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k$ 相当于切断铰的铰点 P_k 的增广约束力向连体基点 C 简化的主矢与主矩的增广力。故增广力 $-\boldsymbol{\Phi}_{q_i}^{k\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k$ 关于基点 C 所作的虚功等于切断铰 P_k 的增广力 $\hat{\boldsymbol{F}}_i^k$ 在铰点 P_k 所作的虚功,即有

$$\delta \boldsymbol{q}_i^{k\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{F}}_i^k = -\delta \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}_{q_i}^{k\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k$$

将式(7.2-8)代入上式有

$$\delta \boldsymbol{q}_i^{k\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{F}}_i^k = -\delta \boldsymbol{q}_i^{k\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_i^{k\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}_{q_i}^{k\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k$$

比较两边，且考虑到式(7.2-7)与(7.2-13)，有

$$\hat{\boldsymbol{F}}_i^k = -(\boldsymbol{\Phi}_{q_i}^k \boldsymbol{K}_i^k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k = -(\boldsymbol{\Phi}_{r_i}^k - \boldsymbol{\Phi}_{r_i}^k \tilde{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{\rho}_i'^k + \boldsymbol{\Phi}_{\varphi_i}^k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k \tag{7.2-16}$$

再将此式与(7.2-10)的第二式比较，得到切断铰的约束力的主矢与主矩在该铰基系上的坐标阵，即

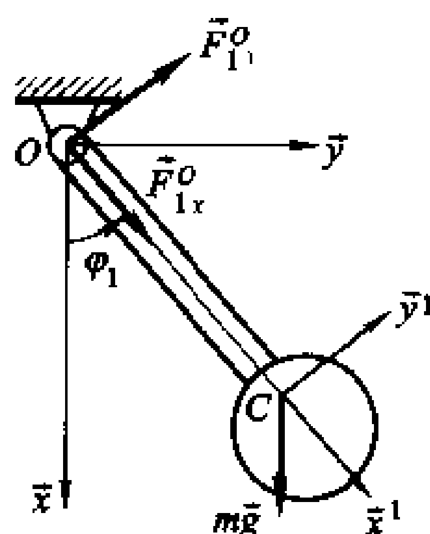
$$\boldsymbol{F}_i'^k = -(\boldsymbol{\Phi}_{r_i}^k \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{C}_i^k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k \quad (i = 1,2,\cdots,N; k = 1,2,\cdots,h) \tag{7.2-17}$$

$$M_i'^k = (\boldsymbol{\Phi}_{r_i}^k \tilde{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{\rho}_i'^k - \boldsymbol{\Phi}_{\varphi_i}^k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}^k \quad (i = 1,2,\cdots,N; k = 1,2,\cdots,h) \tag{7.2-18}$$

[例 7.2-2] 计算例 7.2-1 中铰 O 的约束力与驱动力矩。

解： 按图所示，连体基 $\vec{e}^1$ 关于惯性基的方向余弦阵为

$$\boldsymbol{A}^1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$



例 7.2-2 图

在摆杆的铰 O 上建立铰坐标系 $\vec{e}^O$ 与连体基平行(见图)，故 C_1^O 为单位阵。铰 O 在连体基的坐标阵为 $\boldsymbol{\rho}_1'^O = (-l \quad 0)^{\mathrm{T}}$。由约束方程的雅可比，即例 7.2-1 中式(2)，可得

$$\boldsymbol{\Phi}_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} l\sin\varphi_1 \\ -l\cos\varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将上述各表达式代入式(7.2-17)与(7.2-18)，经整理，再将拉格朗日乘子的表达式例 7.2-1 中式(4)代入，得到作用在摆杆上的理想约束力与驱动力矩分别为

$$\boldsymbol{F}_1'^O = \begin{pmatrix} F_{1x}'^O \\ F_{1y}'^O \end{pmatrix} = -\boldsymbol{A}^{1\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ml\dot{\varphi}_1^2 + mg\sin\varphi_1 \\ mg\cos\varphi_1 + ml\pi^2 \sin\pi t \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$M_1'^O = -\lambda_3 = mlg\cos\varphi_1 + (J + ml^2\pi^2\sin\varphi_1)\sin\pi t \tag{2}$$

[例 7.2-3] 计算例 7.1-3 各约束的理想约束力与拉格朗日乘子的关系。

解： 按例 5.2-3 图 a 所示建立惯性基 $\vec{e}$、斜面连体基 $\vec{e}^1$ 与圆柱连体基 $\vec{e}^2$。刚体系的位形坐标为

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{q}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{q}_2 = (x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2)^{\mathrm{T}}$。

系统的约束有两个($h=2$)，一个是斜面与地面的约束，记为 H_1。约束方程的个数为 $s_1=2$；另一个为圆柱与斜面的无滑动滚动的约束(齿轮与齿条约束)，记为 H_2。约束方程的个数为 $s_2=2$。根据式(7.2－11)的定义，由例 7.1－3 中式(2)，系统的约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi}^{1\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\Phi}^{2\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

式中

$$\boldsymbol{\Phi}^1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 - \theta \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}^2 = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)\cos\varphi_1 + (y_2 - y_1)\sin\varphi_1 - r(\varphi_2 - \varphi_1) \\ (x_2 - x_1)\sin\varphi_1 - (y_2 - y_1)\cos\varphi_1 - l - r \end{pmatrix} \tag{3}$$

对应于两约束的定义，系统的拉格朗日乘子阵为 $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}^{1\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\lambda}^{2\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，其中

$$\boldsymbol{\lambda}^1 = (\lambda_1 \quad \lambda_2)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\lambda}^2 = (\lambda_3 \quad \lambda_4)^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

由式(1)与(3)的排列，按式(7.2－12)的定义，由例 7.1－3 中式(3)，约束方程的雅可比可分别表示为

$$\boldsymbol{\Phi}_{q_1}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_{q_2}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

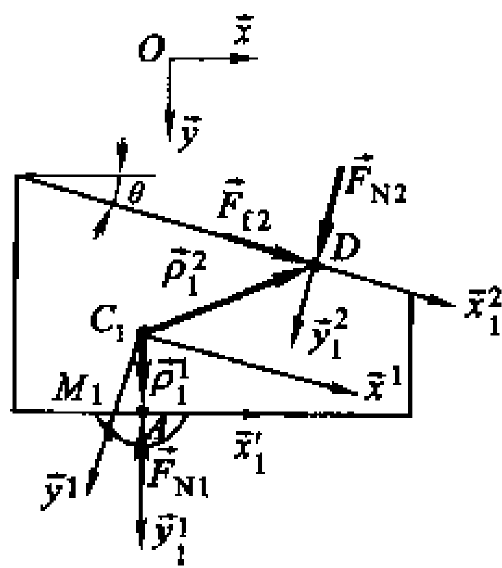
$$\boldsymbol{\Phi}_{q_1}^2 = \begin{pmatrix} -\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & -l \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & r(\varphi_2 - \varphi_1) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_{q_2}^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & -r \\ \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

现考虑斜面滑块。由上式(3)，由图 1 所示可知斜面连体基 $\vec{e}^1$ 相对于惯性基的方向余弦阵为

$$\boldsymbol{A}^1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{7}$$

斜面斜面滑块上涉及两个约束 H_1 与 H_2。

首先考虑约束 H_1。该铰的铰点为 A，它的矢径为 $\vec{\rho}_1^1$，在该铰点上建立铰基 $\vec{e}_1^1$ 如图 1 所示。$\vec{\rho}_1^1$ 在连体基 $\vec{e}^1$ 上的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}_1'^1$ 与铰基 $\vec{e}_1^1$ 相对于 $\vec{e}^1$ 的方向余弦阵 $\boldsymbol{C}_1^1$ 分别为



例 7.2－3 图 1

$$\boldsymbol{\rho}_1'^1 = l_1 \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_1^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{8}$$

其中 l_1 为点 C_1 到点 A 的距离。考虑到式(4)，(5)，(7)与(8)，由式(7.2－17)

与(7.2-18),有

$$\boldsymbol{F}'^{1}_{1} = -\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\\lambda_2\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$M'^{1}_{1} = \left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}l_A - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = -\lambda_1 \tag{10}$$

由图1所示 $\boldsymbol{F}'^{1}_{1}=(0 \quad -F_{N1})^{\mathrm{T}}, M'^{1}_{1}=M_1$。与以上两式比较,有

$$\lambda_2 = F_{N1}, \quad \lambda_1 = -M_1 \tag{11}$$

此结果与例7.1-3中式(10)的一致。

再考虑约束 H_2。该铰的铰点为 D,它的矢径为 $\vec{\rho}^{2}_{1}$,在该铰点上建立铰基 $\vec{e}^{2}_{1}$ 如图1所示。考虑到例5.2-3中式(3),$\vec{\rho}^{2}_{1}$ 在连体基 $\vec{e}^{1}$ 上的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}'^{2}_{1}$ 与铰基 $\vec{e}^{2}_{1}$ 相对于 $\vec{e}^{1}$ 的方向余弦阵 $\boldsymbol{C}^{2}_{1}$ 分别为

$$\boldsymbol{\rho}'^{2}_{1} = \begin{pmatrix}x'^{D}_{1}\\y'^{D}_{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r(\varphi_2-\varphi_1)\\-l\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^{2}_{1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \tag{12}$$

考虑到(4),(6),(7)与(12),由式(7.2-17)与(7.2-18),有

$$\boldsymbol{F}'^{2}_{1} = -\left(\begin{bmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_3\\-\lambda_4\end{pmatrix}$$

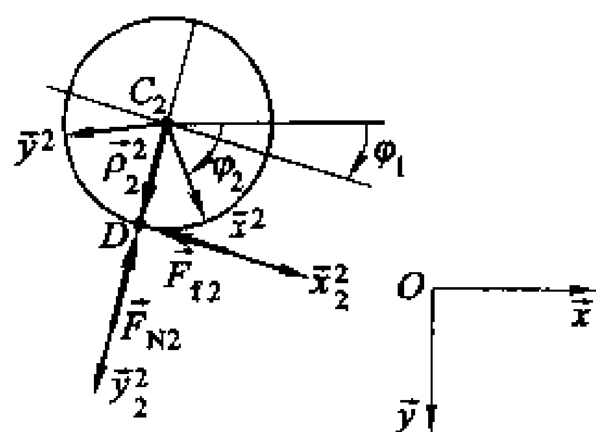
$$M'^{2}_{1} = \left(\begin{bmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}r(\varphi_2-\varphi_1)\\-l\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-l\\r(\varphi_2-\varphi_1)\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = 0$$

该铰无理想约束力矩。由图1所示 $\boldsymbol{F}'^{2}_{1} = (F'_{t2} \quad F'_{N2})^{\mathrm{T}}$ 比较以上两式,有

$$\lambda_3 = F'_{t2}, \ \lambda_4 = -F'_{N2} \tag{13}$$

现考虑圆柱。由图2所示可知圆柱连体基 $\vec{e}^{2}$ 相对于惯性基的方向余弦阵为

$$\boldsymbol{A}^{2} = \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix} \tag{14}$$



例7.2-3图2

圆柱上只涉及约束 H_2。该铰的铰点为 D,它的矢径为 $\vec{\rho}^{2}_{2}$,在该铰点上建立铰基 $\vec{e}^{2}_{2}$ 如图2所示。$\vec{\rho}^{2}_{2}$ 在连体基 $\vec{e}^{2}$ 上的坐标阵 $\boldsymbol{\rho}'^{2}_{2}$ 与铰基 $\vec{e}^{2}_{1}$ 相对于 $\vec{e}^{2}$ 的方向余弦阵 $\boldsymbol{C}^{2}_{2}$ 分别为

$$\boldsymbol{\rho}'^2_2 = \begin{pmatrix} r\sin(\varphi_2-\varphi_1) \\ r\cos(\varphi_2-\varphi_1) \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^2_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2-\varphi_1) & \sin(\varphi_2-\varphi_1) \\ -\sin(\varphi_2-\varphi_1) & \cos(\varphi_2-\varphi_1) \end{pmatrix} \tag{15}$$

考虑到(4),(6),(14)与(15),由式(7.2-17)与(7.2-18),有

$$F'^2_2 = -\left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\varphi_2-\varphi_1) & \sin(\varphi_2-\varphi_1) \\ -\sin(\varphi_2-\varphi_1) & \cos(\varphi_2-\varphi_1) \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$M'^2_2 = \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} r\sin(\varphi_2-\varphi_1) \\ r\cos(\varphi_2-\varphi_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

该铰无理想约束力矩。由图2所示 $\boldsymbol{F}'^2_2 = (-F_{t2} \quad -F_{N2})^{\mathrm{T}}$。比较以上两式,有

$$\lambda_3 = F_{t2},\quad \lambda_4 = -F_{N2} \tag{16}$$

式(13)与(16)印证了作用于邻接刚体上铰理想约束力大小相等,方向相反。此结果也与例7.1-3中式(10)的一致。

根据邻接刚体上铰理想约束力大小相等,方向相反的原理,对于系统中的每个刚体不需要对所有铰都求约束力(矩)与拉格朗日乘子的关系,这样会产生重复计算。对于每个铰只要找到其邻接刚体,选取其中之一,根据此铰对应的拉格朗日乘子可计算得到此铰在该刚体上理想约束力(矩)。至于此铰在另一刚体上理想约束力(矩),根据大小相等,方向相反的原理即可得到。如上例中,对于铰 H_2,其邻接刚体为 B_1 与 B_2,根据乘子 $\boldsymbol{\lambda}^2 = (\lambda_3 \quad \lambda_4)^{\mathrm{T}}$,只要选 B_1 或 B_2 计算理想约束力(矩)即可。

7.3　刚体系静平衡分析

工程中存在着大量静平衡分析的问题。它包括静平衡位形的确定与平衡状态的主动力与理想约束力的关系。对于静平衡位形的确定在工程中有重要意义。如在汽车设计中,当各部件(包括各弹性与阻尼器件)确定,将它们安装起来后,其整车的位形是一项很重要的数据。此时整车处在一个静平衡状态。此外在讨论一个动力学系统的性态时,通常也首先讨论系统的平衡位置,通过在该位置的摄动,得到系统的扰动方程来讨论该平衡位置的稳定性。

确定刚体系静平衡位形的方法有多种,可直接由动力学方程出发,也可利用

势能极小原理(见 6.1.3)。本节主要介绍前一种方法。

当系统处于静平衡时,系统位形坐标阵 $\boldsymbol{q}$ 的一阶与二阶导数恒为零,即 $\dot{\boldsymbol{q}}=\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$。代入动力学方程(7.1-40)有

$$\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}} \tag{7.3-1}$$

此方程称为**静平衡方程**。式(7.3-1)在形式上似乎是动力学逆问题式(7.2-1)的特殊情况,然而两者有本质的差异。在式(7.3-1)中,方程的系数矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}$ 与右项 $\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}}$ 隐含变量位形坐标 $\boldsymbol{q}$,而它们是未知的。故静平衡方程是变量 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{\lambda}$ 的非线性代数方程组。由式(7.1-28)与(7.1-37)的定义,$\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{\lambda}$ 分别为 n 与 s 阶列阵。因方程(7.1-40)的个数为 n,故还需与如下 s 个约束方程一起求解,

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0} \tag{7.3-2}$$

与通常的完整约束方程(7.1-32)比较,对于静力分析问题约束方程定为定常的。方程(7.3-1)与(7.3-2)是封闭的非线性代数方程组,对于复杂问题,理论上可利用牛顿-拉费森方法进行数值迭代求解。然而,由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的迭代初值很难估计,直接利用方程(7.3-1)与(7.3-2)是不可行的。为此,需对方程(7.3-1)进行变换。

由于系统的自由度数为 $\delta=n-s$,在 3.2 节已经介绍位形坐标 $\boldsymbol{q}$ 可分为独立变量阵 $\boldsymbol{w}$ 与非独立变量阵 $\boldsymbol{u}$,分别为 δ 与 s 阶列阵。约束方程的雅可比为

$$\boldsymbol{\Phi}_q = (\boldsymbol{\Phi}_u \quad \boldsymbol{\Phi}_w) \tag{7.3-3}$$

由于约束方程组是相互独立的,矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_q$ 的秩为 s,$\boldsymbol{\Phi}_u$ 是满秩的 $s\times s$ 阶方阵,$\boldsymbol{\Phi}_w$ 是 $s\times\delta$ 阶矩阵。令

$$\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{a}} = (\hat{\boldsymbol{F}}_u^{\mathrm{aT}} \quad \hat{\boldsymbol{F}}_w^{\mathrm{aT}})^{\mathrm{T}} \tag{7.3-4}$$

式中:$\hat{\boldsymbol{F}}_u^{\mathrm{a}}\in\mathscr{R}^{s\times 1}$;$\hat{\boldsymbol{F}}_w^{\mathrm{a}}\in\mathscr{R}^{\delta\times 1}$。将式(7.3-3)代入(7.3-1),考虑到上式,有

$$\boldsymbol{\Phi}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{F}}_u^{\mathrm{a}} \tag{7.3-5}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_w^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{F}}_w^{\mathrm{a}} \tag{7.3-6}$$

考虑到 $\boldsymbol{\Phi}_u$ 是满秩的 s 阶方阵,考虑到式(1.1-27),由式(7.3-5)可得

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\Phi}_u^{-1})^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{F}}_u^{\mathrm{a}} \tag{7.3-7}$$

将其代入式(7.3-6),有

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{F}}_u^{\mathrm{a}} - \hat{\boldsymbol{F}}_w^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{0} \tag{7.3-8}$$

式中

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\Phi}_u^{-1}\boldsymbol{\Phi}_w \in \mathscr{R}^{s\times\delta} \tag{7.3-9}$$

为**影响系数**。方程(7.3-8)为以位形坐标 $\boldsymbol{q}$ 为变量的 δ 个代数方程,此方程与式(7.3-1)等价,但消去了拉格朗日乘子。这样方程(7.3-9)与约束方程(7.3-2)构成了无拉格朗日乘子的 n 个封闭的非线性代数方程组。

式(7.3-7)给出了拉格朗日乘子的表达式,利用7.2.2的公式可得到静平衡的状态下铰的理想约束力。

[例7.3-1]　讨论例7.1-4单摆的静平衡位置,试求在该平衡位置的理想约束力。

解: 将 $\dot{q}=\ddot{q}=0$ 代入动力学方程[例7.1-4之中式(5)],得到静平衡方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l\sin\varphi_1 & -l\cos\varphi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ -k(\varphi_1-\pi/2)\end{pmatrix} \tag{1}$$

取 φ_1 为独立坐标,即位形坐标 $\boldsymbol{q}$ 分解为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}_1=(x_1\quad y_1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{w}=(\varphi_1)$。将约束方程的雅可比 $\boldsymbol{\Phi}_q$[例7.1-4中式(2)]进行分解,有

$$\boldsymbol{\Phi}_u=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Phi}_w=\begin{pmatrix} l\sin\varphi_1 \\ -l\cos\varphi_1\end{pmatrix} \tag{2}$$

代入式(7.3-9),得到影响函数

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\Phi}_u^{-1}\boldsymbol{\Phi}_w=\begin{pmatrix}-l\sin\varphi_1\\ l\cos\varphi_1\end{pmatrix} \tag{3}$$

由式(7.3-4),静平衡方程(1)的右项分解为

$$\hat{\boldsymbol{F}}_u=(mg\quad 0)^{\mathrm{T}},\ \hat{\boldsymbol{F}}_w=-k(\varphi_1-\pi/2) \tag{4}$$

将式(3)与(4)代入式(7.3-8)得到消去拉格朗日乘子的平衡方程

$$-mgl\cos\varphi_1+k(\varphi_1-\pi/2)=0 \tag{5}$$

此式的物理意义是明确的,即重力对铰 O 的矩与旋转弹簧力矩平衡。由于系统只有一个自由度故直接由此式可解出静平衡位置角 φ_1。

此外,将式(2)与(4)代入式(7.3-7)可得处于静平衡时的拉格朗日乘子为

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}mg\\ 0\end{pmatrix} \tag{6}$$

再类似与例7.2-2(注意此例中无旋转弹簧,有驱动)的讨论,可得到类似例7.2-2之式(1),即

$$\boldsymbol{F}_1'^{O}=\begin{pmatrix}F_{1x}'^{O}\\ F_{1y}'^{O}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{1\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}mg\\ 0\end{pmatrix}=mg\begin{pmatrix}-\cos\varphi_1\\ \sin\varphi_1\end{pmatrix}$$

7.4　平面机械系统刚体系动(静)力学模型的定义

由于拉格朗日第一类方程的通用性与程式化的特征,加上这类方程可用于复杂系统的静力学分析(见7.3节),故已成为复杂系统动(静)力学计算机辅助

分析的理论基础。

由于动力学计算机辅助分析归结为对动力学模型

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\Phi}_q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{F}} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} \tag{7.4-1}$$

进行数值积分,可以由计算机自动完成(见 7.1.4 节)。所以在对复杂机械系统进行动力学正问题、逆问题、正逆混合问题与静力学问题的计算机辅助分析时,主要工作是根据工程实际问题的物理模型与所要求解决问题的目的定义该系统等效的刚体系动(静)力学模型。

由于机械系统动(静)力学分析与运动学分析的目的不同,数学模型也不同,因此对刚体系动(静)力学模型与刚体系运动学模型(见 3.5 节)的定义会有不同。机械系统刚体系动(静)力学模型应该包括刚体、铰、外力与力元四个要素的定义。下面分别进行介绍。

1. 刚体

为了减小数学模型(7.4-1)的求解规模,如同运动学模型定义一样,对机械系统中那些质量比较小、对其位形不关心的构件不作刚体定义,而以铰处理。然后对每个刚体进行标号。与运动学模型不同,刚体连体基基点必须定义在刚体的质心,连体基基矢量以取刚体的惯量主轴为佳,这样每个刚体的增广质量阵 $\boldsymbol{Z}_i$ 将为对角阵。

2. 铰

如同运动学模型对铰的定义。合理定义组合铰将会减小数学模型的求解规模(见第 3 章)。

3. 外力

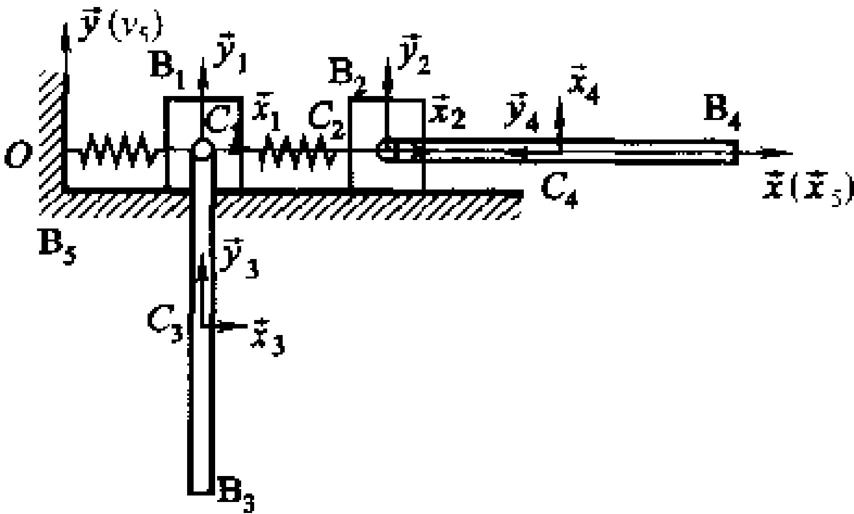
外力通常包括重力、集中力、分布力、力偶等。根据 7.1.3 节的介绍,这些力均应给出作用刚体的标号、这些力的作用的方向(通常给出它们在连体基上的坐标阵)、作用点的位置矢量在连体基的坐标(对于力偶,此参数并不一定给出)等。对于分布力需给出分布集度。

4. 力元

根据 7.1.3 节的介绍,力元包括线(卷)弹簧阻尼器与驱动力作用器。首先给出力元相关联的两刚体的下标,对于线弹簧阻尼器与驱动力作用器,需给出作用点的位置矢径在各自连体基的坐标阵、刚度与阻尼系数、弹簧的原长、驱动作用力等。对于卷弹簧阻尼器与驱动力作用器,需给出两刚体相对转动定位单位矢量的转角、刚度与阻尼系数、旋转弹簧无力矩状态时的初始相对转角、驱动作用力矩等。

下面通过几个算例说明上述刚体系模型定义的方法与仿真计算的过程。

[例7.4-1]　图1所示一五刚体系统，B_1 与 B_2 为滑块，B_3 与 B_4 为均质杆，分别绕 B_1 与 B_2 的质心 C_1 与 C_2 摆动。B_5 为机座。滑块 B_1 与 B_2 的质量分别为 5 kg 与 10 kg，绕质心的转动惯量分别为 10 kg·m^2 与 20 kg·m^2。均质杆 B_3 与 B_4 的杆长为 2 m、质量为 1 kg 与绕质心的转动惯量为 1 kg·m^2。B_1 与 B_5 和 B_1 与 B_2 间分别有两个线弹簧挂在各自的质心。弹簧刚度系数与原长分别为 100 N/m 与 1 m。试分析系统在如图所示的初始位形下开始的运动与约束力。



例7.4-1图1

解：如图建立惯性基与连体基。将已知的刚体参数列于表1。

系统中有两个旋转铰（B_1 与 B_3 的 H_1 与 B_2 与 B_4 的 H_2）。两个滑移铰（B_1 与 B_5 的 H_3 与 B_2 与 B_5 的 H_4）。B_5 关于惯性基的3个绝对约束（H_5 ~ H_7）。铰的参数如表2所列。

外力只有重力。参数为重力加速度在惯性基上的坐标阵，如表3所列。

力元为两线弹簧。定义 B_1 与 B_5 间的为力元1，B_1 与 B_2 间的为力元2。如果线弹簧均挂在刚体的质心与惯性基的原点上，它们的参数如表4所列。

至此图示系统的力学模型定义完毕。

在正式仿真计算前还需给出刚体的初始位形与初始速度。如果系统的初始位形如图所示，B_1 与 B_5 和 B_1 与 B_2 的间距均为 1 m。各刚体初始为静止。这些参数列于表1中。

例7.4-1表1　刚体的参数

刚体号	质量	转动惯量	质心初始位置		初始姿态
i	M/kg	J/kg·m^2	x/m	y/m	φ/(°)
1	5	10	1	0	0
2	10	20	2	0	0
3	1	1	1	−1	0
4	1	1	3	0	90
5			0	0	0

例 7.4－1 表 2 铰的参数

H_i		B_α			B_β			
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}_\alpha^{PT}$	d_α^{PT}	β	$\boldsymbol{\rho}_\beta^{PT}$	d_β^{PT}	c
1	(r)	3	0 1		1	0 0		
2	(r)	4	0 1		2	0 0		
3	(t)	1	0 0	1 0	5	1 0	1 0	
4	(t)	2	0 0	1 0	5	2 0	1 0	
5	(ax)	5	0 0					0
6	(ay)	5	0 0					0
7	(aφ)	5						0

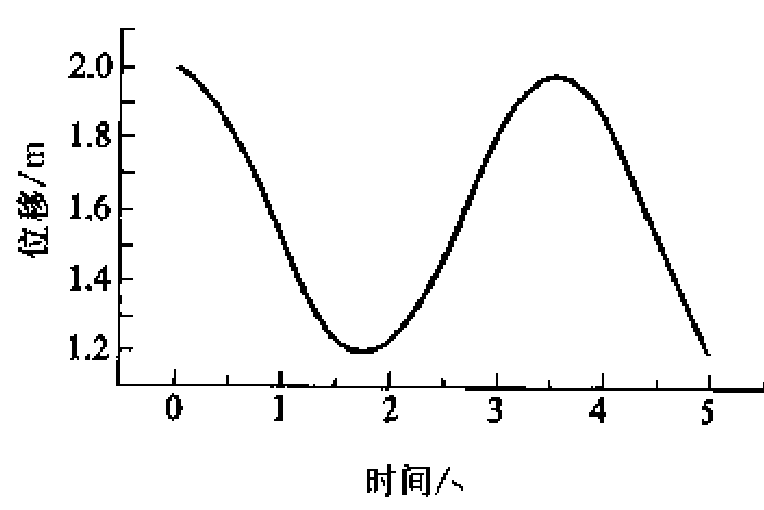
例 7.4－1 表 3 重力加速度参数

x	y
0	1

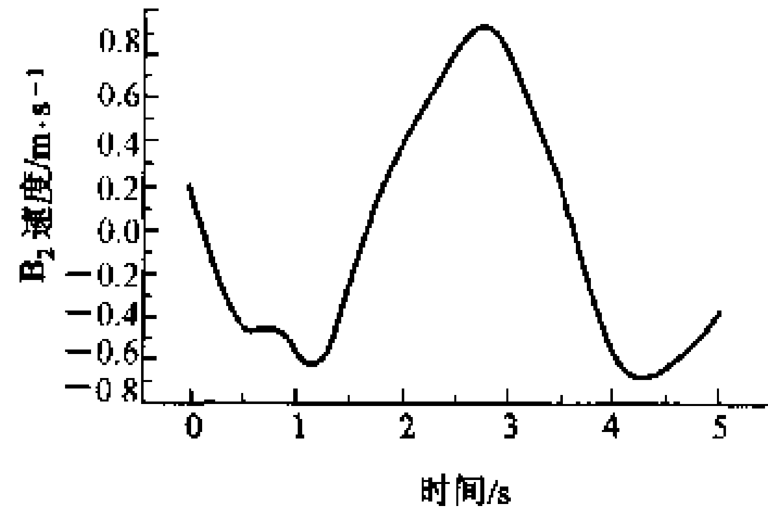
例 7.4－1 表 4 弹簧参数

弹簧号	B_α			B_β				
	α	$\rho_{\alpha x}^P$	$\rho_{\alpha y}^P$	β	$\rho_{\beta x}^Q$	$\rho_{\beta y}^Q$	k/N·m^{-1}	d_0/m
1	1	0.000	0.000	5	0.000	0.000	100	0.80
2	2	0.000	0.000	1	0.000	0.000	100	0.80

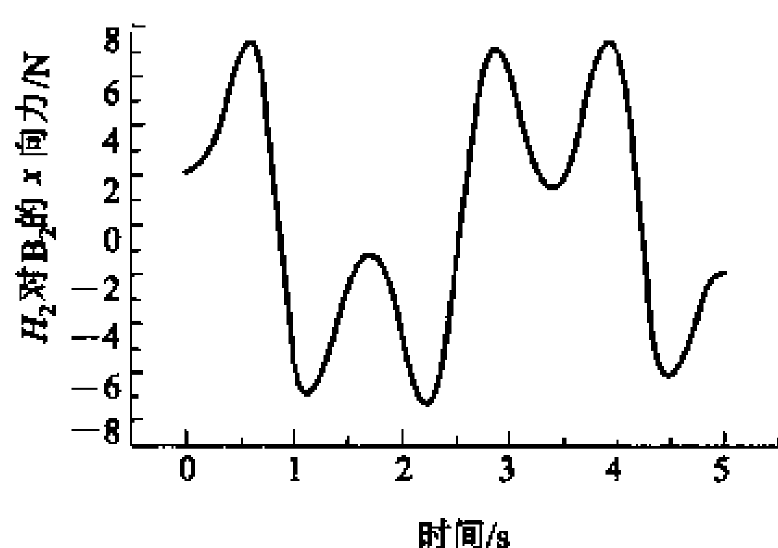
将上述参数输入《理论力学问题求解器》(见附录 C)。软件首先进行自由度分析，得到回答为 4。然后将初始条件输入，计算机按数学模型进行仿真计算。用户可通过后处理以数表或曲线的形式观察系统各变量的时间响应，也可以动画的形式观察整个系统的运动情况。图 2 与图 3 为滑块 2 的位移与速度的时间历程。图 4 与图 5 为铰 2 对滑块 2 的约束力的时间历程。



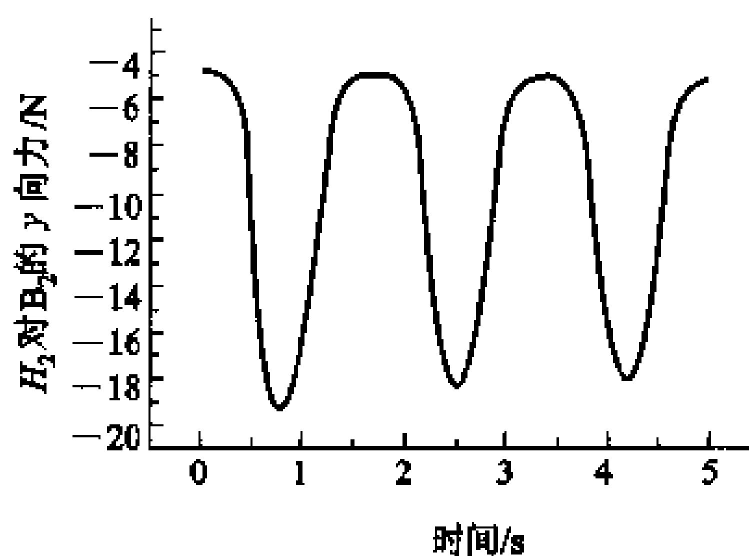
例 7.4－1 图 2



例 7.4－1 图 3



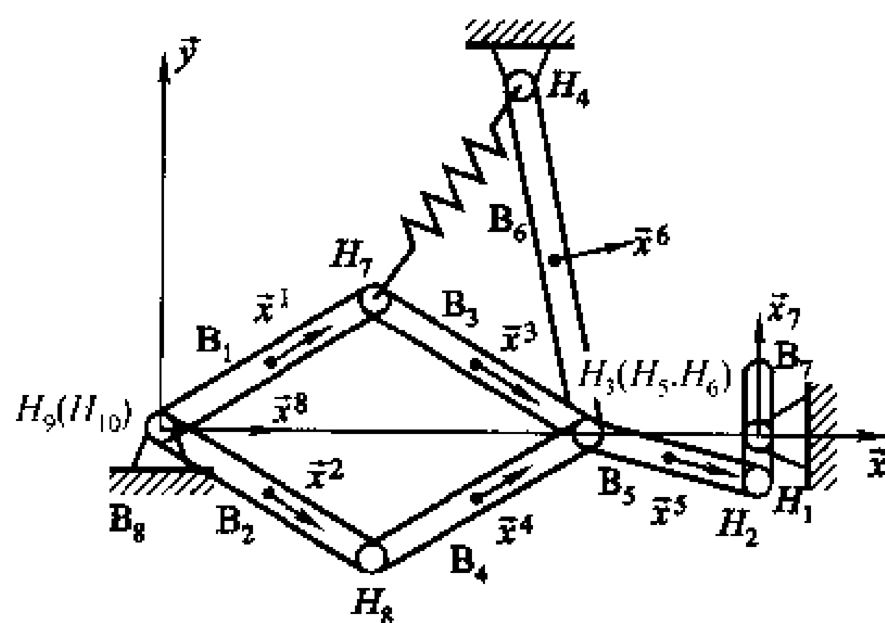
例 7.4－1 图 4



例 7.4－1 图 5

［例 7.4－2］　一平面七连杆机构如图 1 所示，它由 8 个刚体组成，7 根均质杆件的编号依次为 $B_1\sim B_7$，将机座定义为 B_8。杆件 $B_1\sim B_4$ 长均为 1.4 m，质量均为 2 kg，绕质心的转动惯量均为 0.1 kg·m²。杆件 B_5，B_6 与 B_7 的长度分别为 1 m，2 m 与 0.4 m，质量分别为 1 kg，3 kg 与 1 kg，绕质心的转动惯量分别为 0.1 kg·m²，0.45 kg·m² 与 1 kg·m²。如图建立惯性基 $\vec{e}$。支座 H_4 的坐标为 $x=2$ m，$y=2$ m　支座 H_1 的坐标为 $x=3.2$ m，$y=0$ m。构件和机架间均以旋转铰相连。在刚体 B_7 上有一驱动电机，驱动力矩为常数 $M_1=15$ N·m。在铰 H_7 与 H_4 之间连接有一线弹簧，其刚度系数为 $k=100$ N/m，原长为 $d_0=0.5$ m。

初始时刻系统静止，杆 B_7 如图所示处于垂直位置。分析系统的运动与受力情况。



例 7.4－2 图 1

解：在各杆件的质心如图建立连体基 $\vec{e}^i$（为了简洁，图中只给出 $\vec{x}^i$ 的正

向)。根据机构的几何尺寸,计算各杆件的初始位置与初始姿态,与刚体的惯量参数一起作为刚体参数列于表 1。定义各铰的标号如图所示。由已知条件可得到铰的参数列于表 2。外力矩参数与线弹簧参数分别列于表 3 表 4。

例 7.4-2 表 1 刚 体 参 数

刚体号	质量	转动惯量	初始位置		初始姿态
i	m/kg	J/kgm^2	x/m	y/m	φ/(°)
1	2	0.1	0.553 3	0.428 6	37.77
2	2	0.1	0.553 3	−0.431 6	−37.77
3	2	0.1	1.664 7	0.434 9	37.72
4	2	0.1	1.669 5	−0.416 3	37.77
5	1	0.1	2.711 4	−0.093 7	−12.26
6	3	0.45	2.111 3	1.006 2	6.38
7	1	1	3.20	0.00	90.00
8			0.00	0.00	0.00

例 7.4-2 表 2 铰 参 数

H_i		B_α			B_β		
i	类	α	$\rho_{\alpha x}^{P}$	$\rho_{\alpha y}^{P}$	β	$\rho_{\beta x}^{Q}$	$\rho_{\beta y}^{Q}$
1	(r)	7	0.000	0.000	8	3.200	0.000
2	(r)	5	0.500	0.000	7	−0.200	0.000
3	(r)	5	−0.500	0.000	6	0.000	−1.000
4	(r)	6	0.000	1.000	8	2.000	2.000
5	(r)	3	0.700	0.000	5	−0.500	0.000
6	(r)	4	0.700	0.000	5	−0.500	0.000
7	(r)	1	0.700	0.000	3	−0.700	0.000
8	(r)	2	0.700	0.000	4	−0.700	0.000
9	(r)	8	0.000	0.000	1	−0.700	0.000
10	(r)	2	−0.700	0.000	8	0.000	0.000

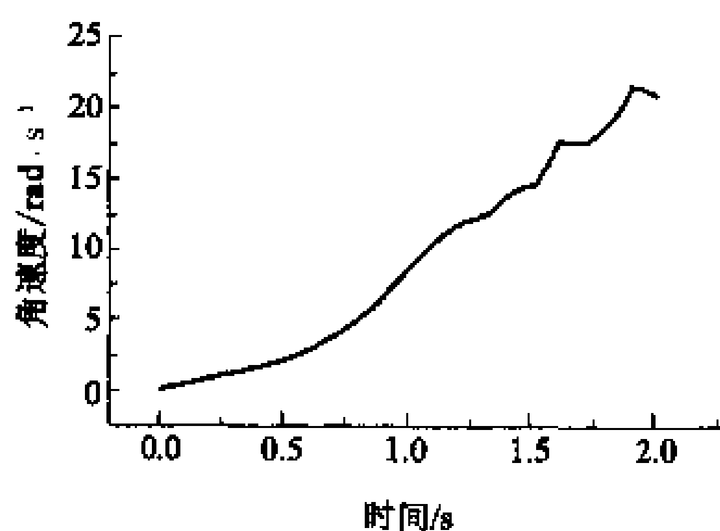
例 7.4-2 表 3 外力矩参数

力矩号	力矩作用的刚体号	力矩的大小
	i	M/N·m
1	7	15.0

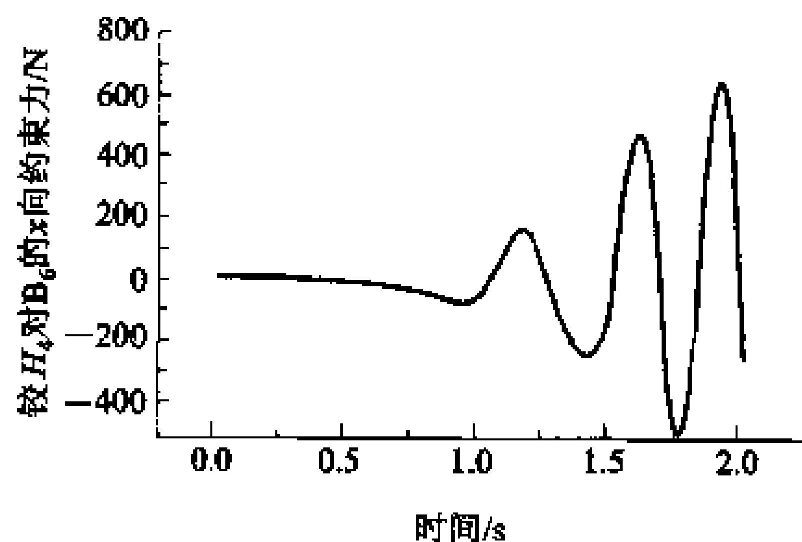
例 7.4-2 表 4 弹 簧 参 数

弹簧号	B_α			B_β				
	α	$\rho_{\alpha x}^{P}$	$P_{\alpha y}^{P}$	β	$\rho_{\beta x}^{Q}$	$\rho_{\beta y}^{Q}$	k/N·m^{-1}	d_0/m
1	8	2.000	2.000	3	−0.7	0	100	0.5

将以上参数输入《理论力学问题求解器》(见附录C)。软件首先进行自由度分析，得到回答为1。然后将初始条件输入，即B_7的姿态角$\varphi_7=\pi/2$，角速度$\omega_7=0$。计算机按数学模型进行仿真计算。用户可通过后处理以数表或曲线的形式观察系统各变量的时间响应，也可以动画的形式观察整个系统的运动情况。图2所示的是构件B_7的角速度曲线，图3所示的是铰H_4点作用在B_6构件上x方向的约束力曲线。

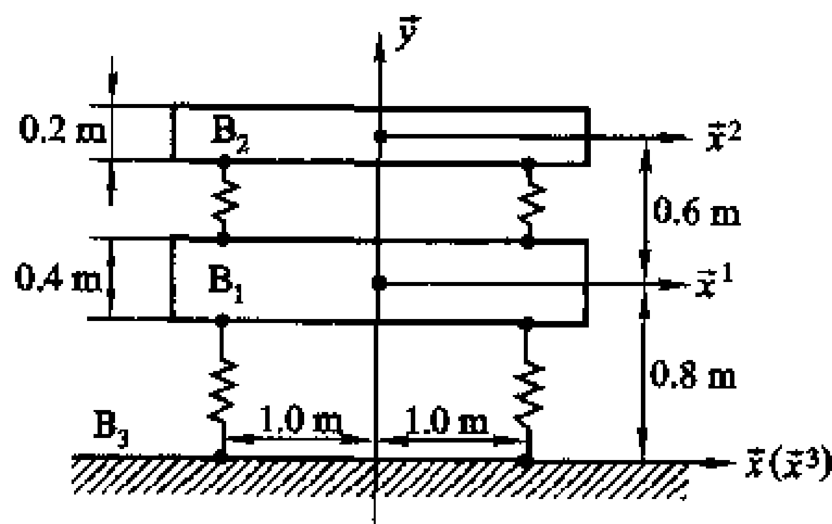


例7.4-2图2



例7.4-2图3

[例7.4-3]　图示为一汽车的示意图，B_1为汽车的底盘，B_2为车身。弹簧k_1与k_2为车轮的模型，它们的原长均为0.6 m，刚度系数分别为4 000 N/m与8 000 N/m。其中k_3与k_4为底盘与车身间的减振弹簧。它们的原长分别0.5 m与0.6 m，刚度分别为2 000 N/m与1 000 N/m。B_1与B_2质量分别为50 kg与10 kg，绕质心的转动惯量均为10 kg·m²。



例7.4-2图1

系统初始的几何尺寸如图所示。求平衡位形。

解：在各杆件的质心如图建立连体基$\vec{e}^i$(为了简洁，图中只给出$\bar{x}^i$的正

向)。根据机构的几何尺寸,计算两刚体的初始位置与初始姿态,与刚体的惯量参数一起作为刚体参数列于表 1。定义各铰的标号如图所示。由已知条件可得到铰的参数列于表 2。线弹簧参数分别列于表 2。

例 7.4-3 表 1 刚 体 参 数

刚体号	质量	转动惯量	初始位置		初始姿态
i	m/kg	J/kg·m^2	x/m	y/m	φ/(°)
1	50	10	0.000	0.800	0.0
2	10	10	0.000	1.400	0.0

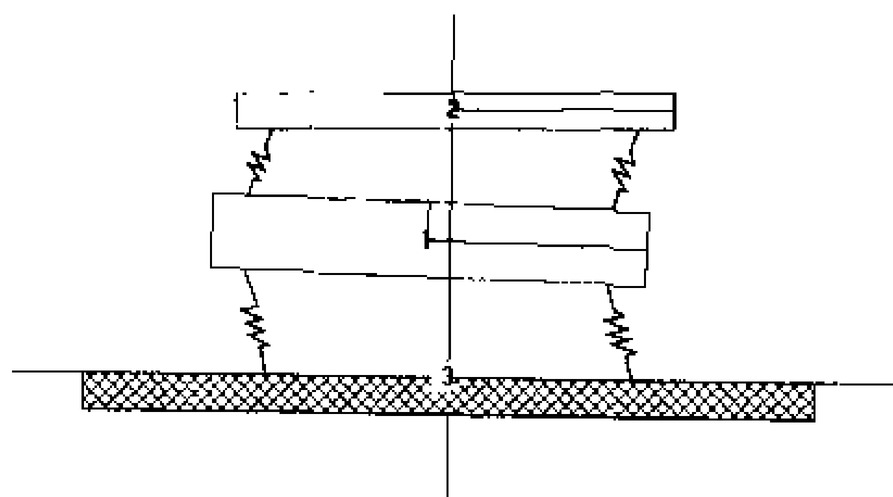
例 7.4-3 表 2 弹 簧 参 数

弹簧号	B_α			B_β				
	α	$\rho^P_{\alpha x}$	$\rho^P_{\alpha y}$	β	$\rho^Q_{\beta x}$	$\rho^Q_{\beta y}$	k/N·m^{-1}	d_0/m
1	3	1.000	0.000	1	1.000	−0.200	4 000	0.600
2	3	1.000	0.000	1	−1.000	−0.200	8 000	0.600
3	1	1.000	0.200	2	1.000	−0.100	2 000	0.500
4	1	−1.000	0.200	2	−1.000	−0.100	1 000	0.400

将以上参数输入《理论力学问题求解器》(见附录 C)。软件首先进行自由度分析,得到回答为 6。然后将初始条件输入,即 B_1 与 B_2 的初始位形。计算机按数学模型进行仿真计算。得到系统平衡位形如图 2 所示。用户可通过点击屏幕上各刚体,可得到它们的位形坐标,现列于表 3。

例 7.4-3 表 3 平衡位置数据

刚体 B_i	质心平衡位置		平衡姿态
i	x/m	y/m	φ/(°)
1	0.124 5	0.759 8	−1.640
2	0.012 1	1.460 8	0.800

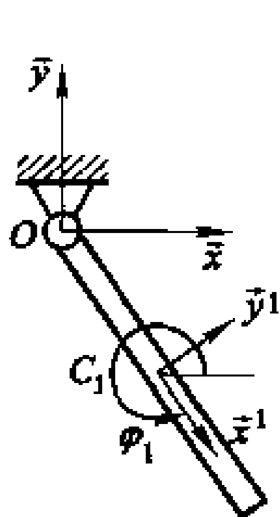


例 7.4-2 图 2

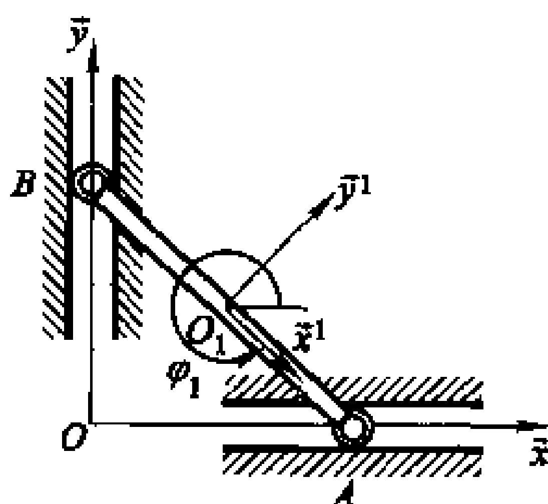
习　题

7-1　题图中的摆杆是质量为 m 的均质杆，杆长为 $2l$。摆杆的铰 O 上有一绝对驱动约束，驱动规律为 $\varphi_1 = \theta - \omega t$，试写出形如式(7.1-43)的动力学方程，且解出拉格朗日乘子。

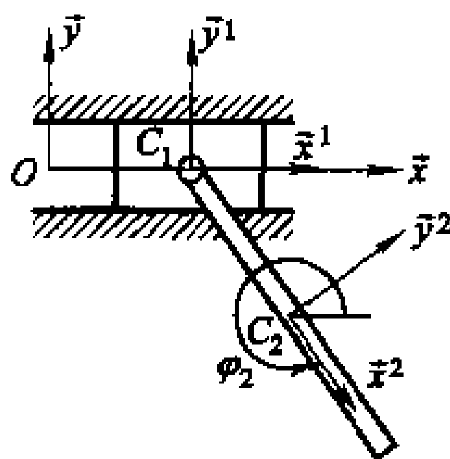
7-2　对于题图的机构，均质杆长为 $2l$，质量为 m，杆上有一绝对驱动约束，驱动规律为 $\varphi_1 = \theta + \omega t$。试写出形如式(7.1-43)的动力学方程，且解出拉格朗日乘子。



题7-1图



题7-2图



题7-3图

7-3　对于题3-11图中的机构，为了进行动力学分析，把 B_2 的连体基移到摆的质心处，如本题图所示。滑块与摆的质量分别为 m_1 与 m_2，绕质心的转动惯量分别为 J_1 与 J_2。摆长为 $2l$。定义滑块水平方向的绝对驱动约束为 $x_1 - vt - \frac{1}{2}at^2 = 0$ 与摆相对滑块的驱动约束为 $\varphi_2 - \varphi_1 - \theta - \omega t = 0$。试写出形如式(7.1-43)的动力学方程，且解出拉格朗日乘子。

7-4　建立合理的铰坐标系，继续完成习题7-1，求出理想约束力(矩)与驱动力(矩)，且利用达朗贝尔原理验证计算结果。

7-5　建立合理的铰坐标系，继续完成习题7-2，求出理想约束力(矩)与驱动力(矩)，且利用达朗贝尔原理验证计算结果。

7-6　建立合理的铰坐标系，继续完成习题7-3，求出理想约束力(矩)与驱动力(矩)，且利用达朗贝尔原理验证计算结果。

7-7　用拉格朗日乘子形式，为下列运动副推导出理想约束力(矩)的表达式，且解释拉格朗日乘子的物理意义。

(1) 相对距离约束；

(2) 滑移-旋转约束；

(3) 相对转动驱动约束。

7-8　完成题3-12切板机的动力学分析，设惯量数据如题表所列。曲柄 AB 上施加转矩 2 N·m。请对系统建立等效的动力学模型，写出刚体、铰、外力和力元的参数表。根据上述模型，利用《理论力学问题求解器》进行仿真计算，令 $t \in [0,1]$ s。(注意，在进行动力学分析

时需要重新定义固定在构件上的坐标系。)

题 7－8 的构件参数表

构件	质量/kg	转动惯量/kg·m²	质心位置
1	0.1	0.001 5	AB 中点
2	1.0	0.03	C 点
3	2.0	0.04	在习题 3－11 中连体基的坐标为(0.14 m　0.07 m)
4	1.0	1.0	A 点

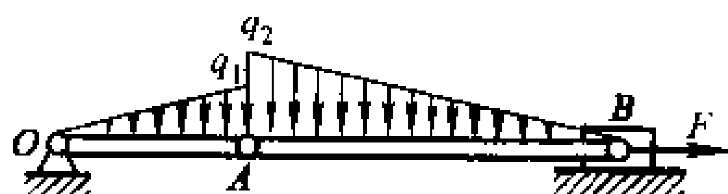
7－9　完成习题 3－13 中齿轮－齿条机构的动力学分析，设齿轮、齿条和曲柄的质量分别是 0.05 kg,0.1 kg 和 0.05 kg。请对系统建立等效的动力学模型，写出刚体、铰、外力和力元的参数表。根据上述模型，在曲柄上施加转矩 0.4 N·m。利用《理论力学问题求解器》进行仿真计算，令 $t \in [0,1]$ s。(注意，在进行动力学分析时需要重新定义固定在构件上的坐标系。)

7－10　完成题 3－14 中胶片随动机构的动力学分析，设惯量数据如题表所列。曲柄 AB 上施加转矩 0.1 N·m。请对系统建立等效的动力学模型，写出刚体、铰、外力和力元的参数表。根据上述模型，利用《理论力学问题求解器》进行仿真计算，令 $t \in [0,1]$ s。(注意，在进行动力学分析时需要重新定义固定在构件上的坐标系。)

题 7－10 的构件参数表

构件	质量/kg	转动惯量/kg·m²	质心位置
1	0.001 2	2.25×10^{-8}	AB 中点
2	0.1	9.2×10^{-8}	距离点 B 0.05 m
3	0.002 5	4.5×10^{-8}	CD 中点
4	1.0	1.0	A 点

7－11　一机构杆 1 与杆 2 的长分别为 0.25 m 与 0.5 m。杆 OA，杆 AB 与滑块 B 的质量分别为 10 kg,20 kg 与 10 kg。滑块上受一水平力 $F=400$ N，杆上受均布力如图所示其中载荷集度分别为 $q_1=1$ N/m 与 $q_2=2$ N/m。利用《理论力学问题求解器》计算铰 A 下垂多少米，铰 O 与滑移铰的理想约束力。如果限制铰 A 下垂小于 0.014 m，请问水平力 F 应为多大?



题 7－11 图

附录 A　简单均质几何体的重心和转动惯量

物体	简图	重心 C 的位置	转动惯量（m 为质量）
细直杆		位于杆的中点	$J_{Cx}=0$ $J_{Cy}=J_{Cz}=\frac{1}{12}ml^2$
矩形薄板		位于板对角线的交点	$J_{Cx}=\frac{1}{12}mb^2$ $J_{Cy}=\frac{1}{12}ma^2$ $J_{Cz}=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$
三角形薄板		位于底边中线的1/3处	$J_{Cx}=\frac{1}{18}mh^2$ $J_{Cy}=\frac{1}{12}m(a^2+b^2-ab)$ $J_{Cz}=\frac{1}{12}m(a^2+b^2+h^2-ab)$
圆形薄板		位于圆心	$J_{Cx}=J_{Cy}=\frac{1}{4}mr^2$ $J_{Cz}=\frac{1}{2}ml^2$

续表

物体	简图	重心 C 的位置	转动惯量(m 为质量)
椭圆形薄板		位于椭圆中心	$J_{Cx}=\frac{1}{4}mb^2$ $J_{Cy}=\frac{1}{4}ma^2$ $J_{Cz}=\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$
圆环		位于圆环中心线的圆心	$J_{Cx}=J_{Cy}=\frac{1}{4}m(R^2+\frac{5}{4}r^2)$ $J_{Cz}=m(R^2+\frac{3}{4}r^2)$
球体		位于球心	$J_{Cx}=J_{Cy}=J_{Cz}=\frac{2}{5}mr^2$
椭球体		位于椭球中心	$J_{Cx}=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$ $J_{Cy}=\frac{1}{4}m(c^2+a^2)$ $J_{Cz}=\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$
圆柱体		位于上下底圆圆心连线的中点	$J_{Cx}=J_{Cy}=\frac{1}{4}m(r^2+\frac{5}{4}h^2)$ $J_{Cz}=\frac{1}{2}mr^2$

续表

物体	简图	重心 C 的位置	转动惯量（m 为质量）
长方体		位于对角线的交点	$J_{Cx}=\frac{1}{5}m(b^2+h^2)$ $J_{Cy}=\frac{1}{4}m(h^2+a^2)$ $J_{Cz}=\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$
圆锥体		位于 z 轴上 $a=\frac{1}{4}h$	$J_{Cx}=J_{Cy}=\frac{3}{5}m(\frac{1}{4}r^2+h^2)$ $J_{Cz}=\frac{1}{2}mr^2$

附录 B　数值方法

B.1　解线性代数方程组的高斯消元法

由于运动学分析的数学模型是线性代数方程和非线性代数方程，故运动学分析将归结为求线性代数方程与非线性代数方程的数值解问题。在处理非线性代数方程时，要通过对一系列的线性方程迭代求解，因此线性代数方程的数值解法也是非线性代数方程求解的基础。

考虑一个含 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，由 n 个线性代数方程构成的实常系数方程组，

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \tag{B.1-1}$$

令变量阵 $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$，上式可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{B.1-2}$$

式中系数阵与右项分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

当右项 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，方程(B.1-2)称为是**齐次方程**，否则称为**非齐次方程**。非齐次方程存在唯一解的充要条件为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩。

在求解方程(B.1-2)的许多方法中。克莱姆(Cramer)法则是众所周知的。即当系数矩阵的行列式 $\Delta = \det \boldsymbol{A}$ 不为零时，方程(B.1-2)的解有如下形式，

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{B.1-3}$$

式中，Δ_i 为行列式中第 i 列由右项 $\boldsymbol{b}$ 替代得到的新行列式。对于高阶方程求解行列式的工作量非常庞大，故由(B.1-3)求解是效率很低的方法。

高斯消去法是求解线性代数方程较为有效的方法之一。**高斯消去法**有两个主要步骤，**消元和回代**。

消元

首先，将(B.1－1)的第一个方程的系数除以 a_{11} 使 x_1 的系数 1(假设 a_{11} 不为零，如果为零，可通过交换方程或变量的次序，达到此目的)。然后将第一个方程的系数乘 $-a_{j1}$ 加到第 j 个方程系数上，从第 $j(j=2,\cdots,n)$ 个方程消去变量 x_1，得到

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-12}^{(1)} & a_{n-13}^{(1)} & \cdots & a_{n-1n}^{(1)} \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(1)} \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} \tag{B.1－4}$$

然后，将第二个方程系数除以 $a_{22}^{(1)}$ 使 x_2 的系数为 1(假定此时 $a_{22}^{(1)}$ 不为零)，然后把第二个方程乘以 $-a_{j2}$ 加到第 $j(j=3,4,\cdots,n)$ 个方程，得到

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-13}^{(2)} & \cdots & a_{n-1n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(2)} \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} \tag{B.1－5}$$

依此类推，算法的 $n-1$ 步后，将第 n 个方程除以 $a_{nn}^{(n-1)}$，只要系数矩阵满秩，此条件满足。这样得到消元步骤的最终结果为

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & \cdots & a_{1n}^{(n)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(n)} & \cdots & a_{2n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(n)} \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix} \tag{B.1－6}$$

此时系数矩阵变为对角元素为 1 的上三角阵。

回代

由(B.1－6)的最后一式，得到 x_n 的解

$$x_n = b_n^{(n)}$$

将上式回代到倒数第二式，可得 x_{n-1} 的解

$$x_{n-1} = b_{n-1}^{(n)} - a_{n-1n}^{(n)} x_n$$

依此类推，回代到第 k 步，可得 x_{n-k+1} 的解

$$x_{n-k+1}=b_{n-k+1}^{(n)}-\sum_{j=n-k+2}^{n}a_{n-k+1j}^{(n)}x_j$$

这样，通过 n 步的回代得到方程(B.1－2)的解。

上述方法是一种比较有效的求解代数方程(B.1－2)的数值方法。但是，在消元的过程中每次均要除一个系数，第 k 步为 $a_{kk}^{(k-1)}$，这个系数称为第 k 步的**主元**。如果该系数比较小，数值的除法将会带来较大的舍入误差，甚至导致错误的计算结果。为此在每进行消元步时，如果通过交换方程或变量的次序，寻找一个较大的系数作为除数，这样可把整个数值计算的误差降到最低。这种修正方法称为选主元高斯消去法。选主元高斯消去法可分为**高斯全主元消去法**与**高斯部分主元消去法**。前者是这样选主元，当消元过程进行到第 k 步，在系数矩阵的 $a_{kk}^{(k-1)}$ 的右下角的系数，即在 $a_{ij}^{(k-1)}(k\leqslant i\leqslant n,k\leqslant j\leqslant n)$ 中选择绝对值最大者作为主元 $a_{kk}^{(k-1)}$。而部分主元高斯消去法的选元范围在 $a_{kj}^{(k-1)}(k\leqslant j\leqslant n)$ 或在 $a_{ik}^{(k-1)}(k\leqslant i\leqslant n)$ 中进行。即前者在第 k 行的第 k 列至第 n 列的 $(n-i+1)$ 个系数中选择，称为按列部分主元高斯消去法。后者在第 k 列的第 k 行至第 n 行的 $(n-i+1)$ 个系数中选择，称为按行部分主元高斯消去法。为了将选中的主元变换到 $a_{kk}^{(k-1)}$ 的位置，通过改变方程的次序交换行(表现为系数阵 $\boldsymbol{A}$ 行序与右阵 $\boldsymbol{b}$ 元素位置的改变)，通过交换变量的位置交换列(表现为系数阵 $\boldsymbol{A}$ 列序与变量阵 $\boldsymbol{x}$ 元素位置的改变)，这种变换历史应该记录。比较两类选主元高斯消去法，全主元消去方法精度高效率低，而部分主元消去法则相反。

对高斯消去法稍作变化，可省略回代过程。在消元的第二步完成后，(B.1－5)，接着将式(B.1－5)的第一行减去第二行乘 $a_{12}^{(2)}$，式(B.1－5)变为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a_{13}^{\prime(2)} & \cdots & a_{1n}^{\prime(2)}\\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & a_{n-13}^{(2)} & \cdots & a_{n-1n}^{(2)}\\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1^{\prime(2)}\\ b_2^{(2)}\\ \vdots\\ b_{n-1}^{(2)}\\ b_n^{(2)}\end{pmatrix}$$

在第三步消元完成后，接着按类似的方法将 $a_{13}^{\prime(2)}$ 与 $a_{23}^{(2)}$ 的系数变为零。依此类推，n 步消元结束，系数阵为一单位阵。这样可直接得到方程的解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{\prime(n)}$。这种算法称为**高斯－若尔当(Jordan)消元法**。

[**例 1**] 用主元高斯－若尔当消元法求解方程(B.1－2)。方程的系数阵与右项为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

解：为了书写方便，将两矩阵合并为 $\boldsymbol{C}$

$$C = (A \quad b) = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 & 2.5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.5 & 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

第一步消元见图 1，图中的(1　2　3)表示变量阵中各变量的排序。操作(1)在 $\boldsymbol{A}$ 的 9 个系数中找主元，可知主元为 a_{12}。操作(2)将 1,2 行对调，操作(3)第 1 行除以 2，操作(4)消元。

$$\xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 & 2.5 \\ \underline{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.5 & 1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} \underline{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.5 & 2.5 & 2.5 \\ 1 & 0.5 & 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$
$$(1 \quad 2 \quad 3) \qquad\qquad\qquad (1 \quad 2 \quad 3)$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1.5 & 2.5 & 2.5 \\ 1 & 0.5 & 1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$(1 \quad 2 \quad 3) \qquad\qquad\qquad (1 \quad 2 \quad 3)$$

图 1　第一步消元

第二步消元见(图 2)，操作(5)在 $\boldsymbol{A}$ 的 a_{22} 右下的 4 个系数中找主元，可知主元为 a_{23}。操作(6)将 2,3 列对调，注意变量元素的次序作相应的变化，操作(7)第 2 行除以 2，操作(8)消元，操作(9)消去第 1 行第 2 列的系数。

$$\xrightarrow{(5)} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & \underline{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(6)} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$(1 \quad 2 \quad 3) \qquad\qquad\qquad (1 \quad 3 \quad 2)$$

$$\xrightarrow{(7)} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(8)} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$(1 \quad 3 \quad 2) \qquad\qquad\qquad (1 \quad 3 \quad 2)$$

$$\xrightarrow{(9)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$(1 \quad 3 \quad 2)$$

图 2　第二步消元

第三步消元见图3,操作(10)第3行除以 −0.5,操作(11)消去第1,2行第3列的系数。得到解为 $x_1=0.5$, $x_2=-2$, $x_3=2$ 或表为

$$\boldsymbol{x}=(0.5\quad -2\quad 2)^{\mathrm{T}}$$

$$\xrightarrow{(10)}\begin{bmatrix}1&0&0.25&0\\0&1&0.5&1\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(11)}\begin{bmatrix}1&0&0&0.5\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

$$(1\quad 3\quad 2)\qquad\qquad (1\quad 3\quad 2)$$

图3 第三步消元

现在讨论一般形式的线性代数方程组,令该方程组的变量个数为 n,方程个数为 m。此时方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{B.1-7}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与右项 $\boldsymbol{b}$ 分别为 $m\times n$ 矩阵与 m 阶列阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix} \tag{B.1-8}$$

将两阵组合,称以下矩阵为方程(B.1-7)的增广阵。

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix} \tag{B.1-9}$$

令矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的秩分别记为 r_A 与 r_C,方程(B.1-7)的解有如下几种情况:

(1) 当 $m=n$ 且 $r_A=r_C=n$ 时,如前所示,方程(B.1-7)有唯一解。

(2) 当 $r_A=r_C=r<n$ 时,方程(B.1-7)有无穷多组解。

此时,方程可找到 $\delta=n-r$ 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}^{(k)}(k=1,2,\cdots,\delta)$,称它们为方程(B.1-7)的基础解系。方程的任一非零解 $\boldsymbol{x}$ 均可表为它们的线性组合,即存在非零的系数阵 $\boldsymbol{d}=(d_1\quad d_2\quad \cdots\quad d_\delta)^{\mathrm{T}}$,有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{d} \tag{B.1-10}$$

式中

$$\boldsymbol{X}=(x^{(1)}\quad x^{(2)}\quad \cdots\quad x^{(\delta)}) \tag{B.1-11}$$

是由 δ 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 构成的 $n\times\delta$ 阶矩阵,称为基础解阵。需要指出的是基础解系是不唯一的。

[例2] 求解方程(B.1-7),其系数阵与右项为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix} \tag{1}$$

解: 方程个数 $m=3$,变量个数 $n=4$。利用一般的高斯－若尔当消元法,对 $\boldsymbol{C}$ 有

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

可见变换后的方程系数矩阵与右项分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

由式(2)可见 $r_A = r_C = 2 < 4$。存在 $\delta=2$ 个基础解。对于以式(3)为系数矩阵与右项的方程(B.1－7),分别令 $x_3^{(1)}=1$, $x_4^{(1)}=0$ 与 $x_3^{(2)}=0$, $x_4^{(2)}=1$,可分别解出相应的 $x_1^{(1)}=3$, $x_2^{(1)}=1$ 与 $x_1^{(2)}=1$, $x_2^{(2)}=2$,即找到基础解为

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = (3 \quad 1 \quad 1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)} = (1 \quad 2 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$$

方程(B.1－7)的任意解为(B.1－10),其中基础解阵为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

这个例子的结果具有如下普遍意义。对于 $r<m<n$ 的情况,经变换,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 均会得到如图 B－1 所示的情况,即得到 $r\times(n+1)$ 的梯形矩阵,记为 $\boldsymbol{C}'=(\boldsymbol{A}_r \quad \boldsymbol{b}_r)$,其中 $\boldsymbol{A}_r$ 为 $r\times n$ 阶梯形阵,$\boldsymbol{b}_r$ 为 r 阶的列阵。说明按变换后方程的次序排列,原 m 个方程中前 r 个方程相互独立,后 $m-r$ 个为相容但非独立的方程。这样原方程(B.1－7)与如下的方程等价

$$\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_r \tag{B.1－12}$$

对于这 r 个方程相互独立的方程,令

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{A}_r = (\boldsymbol{A}_u \quad \boldsymbol{A}_w) \tag{B.1－13}$$

这样(B.1－12)变为

$$\boldsymbol{A}_u\boldsymbol{u} + \boldsymbol{A}_w\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}_r \tag{B.1－14}$$

显然方程中有 δ 个多余变量 $\boldsymbol{w}$,在变量 $\boldsymbol{x}$ 中这些变量可任意设定,称为**独立变量**。而变量 $\boldsymbol{u}$ 则由方程(B.1－12)决定,称为**非独立变量**。考虑到 $\boldsymbol{A}_u=\boldsymbol{I}_r$,有

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\hspace{4em}}^{n} \\
\underbrace{\hspace{2em}}_{r}\ \underbrace{\hspace{2em}}_{\delta}
\end{array}
$$

$$
m\left\{
\begin{array}{l}
r\left\{
\begin{matrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\
0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & *
\end{matrix}\right. \\
\begin{matrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{0} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{0} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{0}
\end{matrix}
\end{array}\right.
$$

图 B－1 方程(B 1－7)的解的第(2)种情况

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}_r - \boldsymbol{A}_{uw}\boldsymbol{w} \tag{B.1－15}$$

如果令$(\boldsymbol{w}^{(1)} \cdots \ \boldsymbol{w}^{(\delta)}) = \boldsymbol{I}_\delta$，代入(B.1－15)，这样可得到的 δ 个非独立变量解$(\boldsymbol{u}^{(1)} \ \cdots \ \boldsymbol{u}^{(\delta)})$。它们组成原方程(B.1－7)的线性无关基本解，基本解阵为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(1)} & \cdots & \boldsymbol{u}^{(\delta)} \\ \boldsymbol{w}^{(1)} & \cdots & \boldsymbol{w}^{(\delta)} \end{pmatrix} \tag{B.1－16}$$

(3) 当 $r_A < r_C$ 时，方程(B.1－7)无解。称方程(B.1－7)为矛盾方程。

事实上，由于 $r_A < r_C$，在图 B－1 中有下横线的部分至少有一个非零。相应的方程即为矛盾方程。如上例中式(1)中的右项的第三个元素不是 16 而是 17，则通过高斯消去法，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 最后变换成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可见，$r_A = 2$，$r_C = 3$，第三个方程为矛盾方程。

由以上三种情况，不难推得

(4) 当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 时，方程(B.1－7)为齐次方程，其存在非零解的充要条件为 $r_A < m$。

B.2 解非线性代数方程组的牛顿－拉费森方法

在运动学分析中经常遇到如下的非线性方程组

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{B.2－1}$$

式中，共有 n 个方程，$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1 \ \cdots \ \Phi_n)^{\mathrm{T}}$，变量阵 $\boldsymbol{x}$ 为 n 阶列阵。通常无法求

得方程(B.2－1)的精确解。通过估计一个初值 $x^{(0)}$，利用数值迭代方法寻找 x 的近似解是常用的方法。这些迭代方法中最著名的是牛顿－拉费森方法(N－R方法)。下面先以一个变量的一个非线性方程的简单情况介绍这种方法的实质。

考虑未知变量为 x 的一个非线性方程

$$\Phi(x)=0 \tag{B.2-2}$$

令 $x=x^*$ 为(B.2－2)的解。记 $x^{(i)}$ 为 x^* 的近似。$\Phi(x)$ 在 $x=x^{(i)}$ 的泰勒展开为

$$\Phi(x)=\Phi(x^{(i)})+\Phi_x(x^{(i)})(x-x^{(i)})+\text{高阶项} \tag{B.2-3}$$

式中，$\Phi_x=\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ 为 $\Phi(x)$ 的雅可比。令 $x=x^{(i+1)}$ 为对 $x^{(i)}$ 的改进，如果 $(x^{(i+1)}-x^{(i)})$ 为小量，上式高阶项忽略，近似有

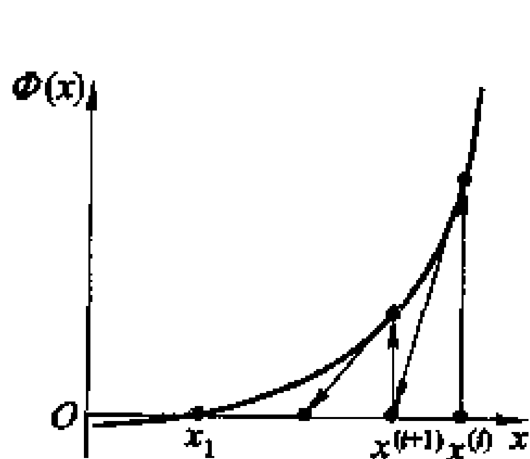
$$\Phi(x^{(i+1)})\approx\Phi(x^{(i)})+\Phi_x(x^{(i)})(x^{(i+1)}-x^{(i)})=0 \tag{B.2-4}$$

如果 $\Phi_x(x^{(i)})\neq 0$，由式(B.2－4)可得

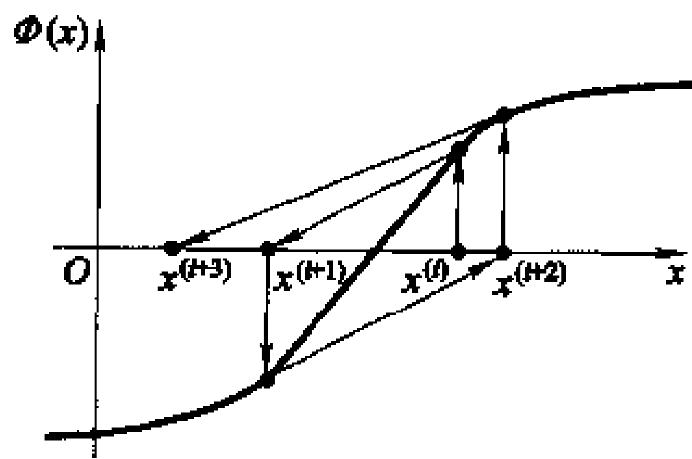
$$x^{(i+1)}=\frac{x^{(i)}-\Phi(x^{(i)})}{\Phi_x(x^{(i)})} \tag{B.2-5}$$

式(B.2－5)定义了一变量方程(B.2－2)的牛顿－拉费森(N－R)算法。利用该算法，首先给出(B.2－2)解的初估值 $x^{(0)}$ 为迭代起点。在迭代 $i=1,2,\cdots$ 中，计算 $\Phi(x^{(i)})$ 与 $\Phi_x(x^{(i)})$。如果 $|\Phi(x^{(i)})|<\varepsilon_\varepsilon$(其中 ε_ε 是方程的容许误差)与 $|x^{(i)}-x^{(i-1)}|<\varepsilon_s$(其中 ε_s 是解的容许误差)，则迭代终止。这样产生方程(B.2－2)的近似解列。如果 $\Phi_x(x^{(i)})=0$，$\Phi(x^{(i)})\neq 0$，则返回第一步从新估计新的迭代初值。

N－R算法的几何意义如图B－2所示，它是一种收敛的情况，由 $x^{(i)}$ 迭代收敛于解 x_1。图B－3所显示的是解为一个拐点的情况，方法可能发散。图B－4所示多解的情况，x_1 与 x_2 均为方程解，至于收敛到哪个解与解的初始估值有关。如果初始估值靠近局部的极小或极大值，算法将发散，不会收敛到期望



图B－2 牛顿－拉费森迭代



图B－3 解在拐点，迭代发散的情况

的解 x_1，如图 B-5 所示。由上述的几种情况说明，N-R 算法的关键是如何选取适当的初值。

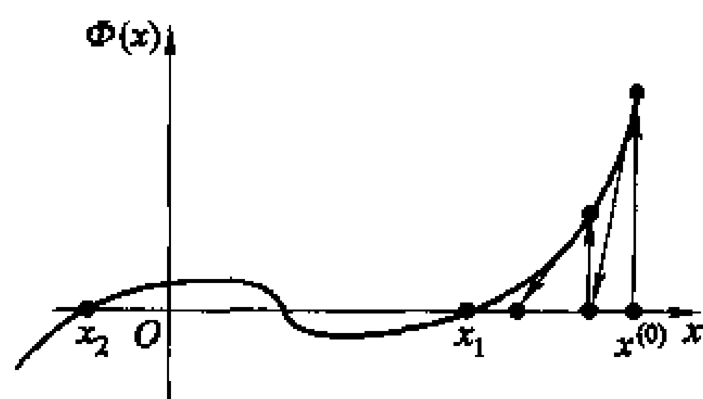


图 B-4 多解的情况

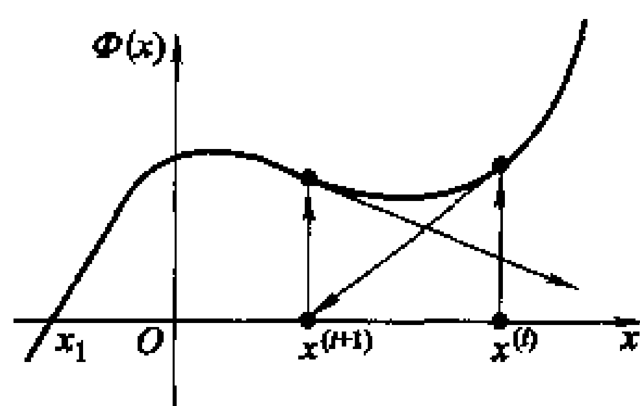


图 B-5 初值近极小，迭代发散的情况

下面讨论 n 个变量，n 个方程(B.2-1)为一般情况的 N-R 方法。

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 为(B.2-1)的解。记 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ 为 $\boldsymbol{x}^*$ 的近似。$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(i)}$的一阶泰勒展开为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(i)}) + \boldsymbol{\Phi}_x(\boldsymbol{x}^{(i)})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(i)}) + \text{高阶项} \qquad (B.2-6)$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}_x=\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{x}}$为$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$的雅可比(定义见 1.1-39)。令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(i+1)}$为对 $\boldsymbol{x}^{(i)}$的改进，如果$(\boldsymbol{x}^{(i+1)}-\boldsymbol{x}^{(i)})$为小量，有

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(i+1)}) \approx \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(i)}) + \boldsymbol{\Phi}_x(\boldsymbol{x}^{(i)})(\boldsymbol{x}^{(i+1)} - \boldsymbol{x}^{(i)}) = 0 \qquad (B.2-7)$$

令 $\Delta\boldsymbol{x}^{(i)}=\boldsymbol{x}^{(i+1)}-\boldsymbol{x}^{(i)}$，上式可写成关于 $\Delta\boldsymbol{x}^{(i)}$的线性代数方程组，即

$$\boldsymbol{\Phi}_x(\boldsymbol{x}^{(i)})\Delta\boldsymbol{x}^{(i)} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(i)}) \qquad (B.2-8)$$

如果雅可比$\boldsymbol{\Phi}_x(\boldsymbol{x}^{(i)})$为非奇异，则有唯一解 $\Delta\boldsymbol{x}^{(i)}$，由此可得

$$\boldsymbol{x}^{(i+1)} = \boldsymbol{x}^{(i)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(i)} \qquad (B.2-9)$$

根据以上叙述可列出如下 N-R 算法：

(1) 设定方程(B.2-1)的解的初始估计值 $\boldsymbol{x}^{(0)}$。

(2) 在迭代 $i=1,2,\cdots$中计算 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(i)})$与$\boldsymbol{\Phi}_x(\boldsymbol{x}^{(i)})$。如果对于 $k=1,2,\cdots,n$，下列所有的误差的值与近似解的变化满足：

$$|\boldsymbol{\Phi}_k(x^{(i)})| < \varepsilon_e$$
$$|\boldsymbol{x}_k^{(i)} - \boldsymbol{x}_k^{(i-1)}| < \varepsilon_s$$

则迭代终止。如果雅可比$\boldsymbol{\Phi}_x(x^{(i)})$奇异，$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(i)})\neq\boldsymbol{0}$，返回第一步，重新估值开始。否则到第 3 步。这里 ε_e 是方程的容许误差，ε_s 是解的容许误差。

(3) 调用解线性代数方程组的数值方法求解(B.2-8)，然后计算(B.2-9)，并返回第 2 步，将 $i+1$ 代替 i。

由此可见解非线性方程组(B.2-1)的问题在数值上转化为解若干次线性代数方程组(B.2-8)的问题。

B.3　解常微分方程组的龙格－库塔法

令 n 维变量 $\boldsymbol{x}=(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\mathrm{T}}$，求 n 维一阶常微分方程组

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) & t_0<t\leqslant t_e\\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0 & t=t_0\end{cases} \tag{B.3-1}$$

在 $t_0<t\leqslant t_e$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 的问题称为常微分方程组方程(B.3－1)的**初值问题**。系统动力学方程均可变换成上述形式。仿真计算的直接数值方法将归结为这样的初值问题。通常(B.3－1)的右函数是关于变量 $\boldsymbol{x}$ 与时间 t 的非线性函数，精确求解方程(B.3－1)是不可能的。只能求助数值方法寻找方程精确解 $\boldsymbol{x}(t)$　($t_0<t\leqslant t_e$)的近似解。

为了比较简捷地介绍初值问题(B.3－1)数值解的一些基本概念，暂且将微分方程约定为一维，即

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,t) & t_0<t\leqslant t_e\\ x=x_0 & t=t_0\end{cases} \tag{B.3-2}$$

初值问题(B.3－2)的数值解就是在时间区间$[t_0,t_e]$的若干个离散点 $t_0,t_1,t_2,\cdots,t_e$ 处计算 $x(t)$ 的近似值 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_e$。时间间隔 $h_n=t_{n+1}-t_n$ 称为**步长**，一般取等步长，记为 h，这种方法称为初值问题的**差分方法**或**离散变量法**。

差分方法提供一个利用 k 个先前的值 $x_n,x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_{n-k+1}$，计算 x_{n+1} 的公式，故又称为 k 步法。若 $k=1$ 称为**单步法**，$k>1$ 称为**多步法**。计算公式可以通过化导数为差商，泰勒展开或数值积分方法等方法取得。

下面以**欧拉(L. Euler)方法为例**。欧拉方法是一种单步法，通过化导数为差商的方法可得如下的计算公式

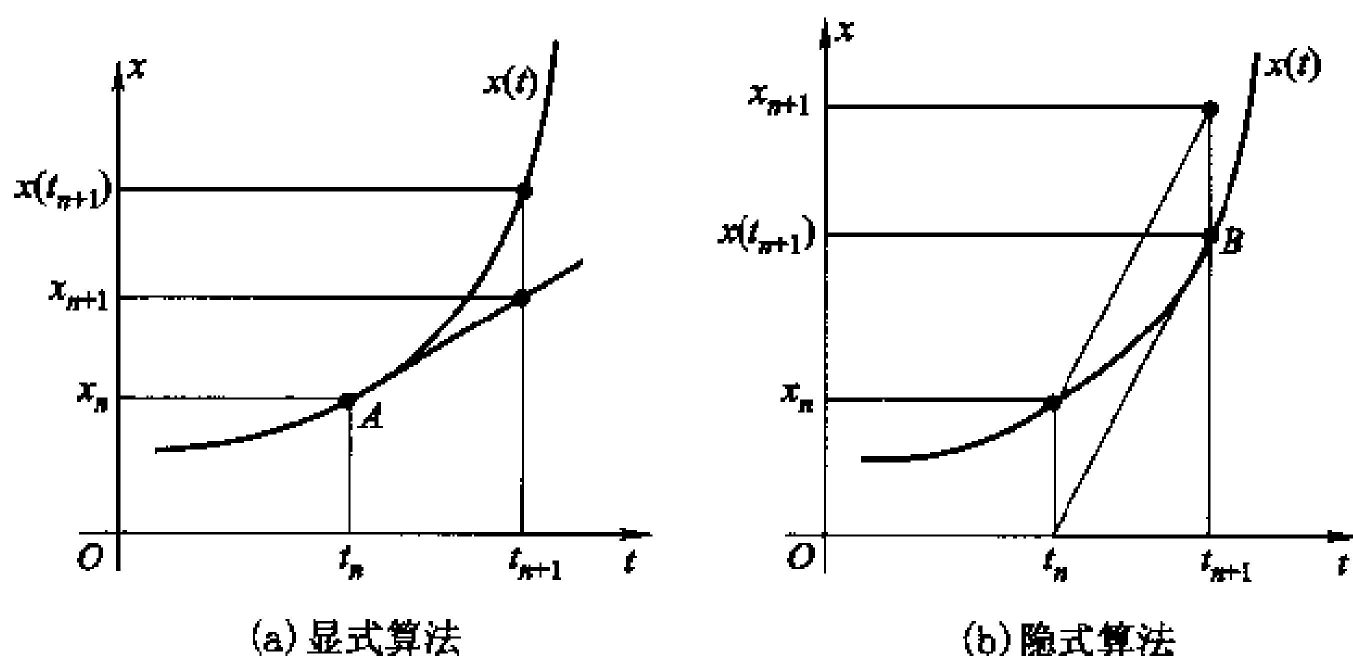
$$x_{n+1}=x_n+hf(x_n,t_n) \tag{B.3-3}$$

也可通过数值积分方法得到如下的计算公式：

$$x_{n+1}=x_n+hf(x_{n+1},t_{n+1}) \tag{B.3-4}$$

式(B.3－3)与(B.3－4)的几何意义由图B－6可清楚见到。两者的区别在于前者利用的是点 $A(x_n,t_n)$ 的切线(见图B－6a)，后者用的是点 $B(x_{n+1},t_{n+1})$ 的切线(见图B－6b)。两种公式均存在数值解 x_{n+1} 与精确解 $x(t_{n+1})$ 间的误差。需要注意的式(B.3－3)是显式的欧拉公式。在计算 x_{n+1} 可以用 x_n 与 t_n 求得的 $f(x_n,t_n)$ 来表示。而(B.3－4)是隐式的欧拉公式，又称为后退欧拉公式，因为计算 x_{n+1} 的公式中其本身也包含在 $f(x_{n+1},t_{n+1})$ 中，当 $f(x,t)$ 为 $x(t)$ 的非线性函数时，一般来讲是不可能将 x_{n+1} 表示成 x_n 的函数。故使用隐式公式时

需由其它方法提供一个初次逼近值 $x_{n+1}^{(0)}$，然后再通过适当的迭代过程解非线性代数方程(B.3－2)，求得 x_{n+1} 的修正值。



(a) 显式算法　　(b) 隐式算法

图 B－6　欧拉方法

经典的四阶定步长**龙格**(J. Runge)－**库塔**(W. Kutta)**法**是一种常用的求 n 维一阶常微分方程组(B.3－1)的数值积分方法，其计算公式为

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \qquad \text{(B.3－5)}$$

式中

$$k_0 = hf(x_n, t_n)$$

$$k_1 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}k_0, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = hf(x_n + k_2, t_n + h)$$

从上式可知，龙格－库塔法的特点是只需知道一阶导数值而不需要其它阶导数。一阶导数值的近似值可由方程(B.3－1)的右函数求得。对于上述四阶龙格－库塔法必须求右函数值 f 四次。龙格－库塔法的另一个特点是只要知道一个 $(t_n, \boldsymbol{x}_n)$ 就可计算得到 $\boldsymbol{x}_{n+1}$。因此这种方法可以由初值 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 自动起步进行积分。步长 h 在每一步中可以改变。缺点是每积分一步要四次求右函数值 $\boldsymbol{f}$，而在下一步中这些值又不能借用，因此如果右函数形式相当复杂，计算工作量也相当大。

随着数值方法不断改进，现在已经有高阶的、变步长的与变阶变步长的各种类型的龙格－库塔法。读者可参考有关计算方法的一些书籍。

附录C 《理论力学问题求解器》使用简介

C.1 求解器的基本操作

本求解器是一个利用计算机求解理论力学典型问题的软件。它包括“运动学分析”,“动力学分析”与“静力学分析”三大模块。每一模块的用户界面为一可视的图板,理论力学问题力学模型的定义是以图形的形式表现在图板上。约定图板上的横线为 x 轴,正向向右;竖线为 y 轴,正向向上。它们被视为惯性基。图板的上方为类似于WINDOWS的常规菜单条与某些常用命令的工具条。

求解器主菜单为“文件”、“图形操作”、“系统参数”、“仿真计算”与“帮助”等。各项命令下的子命令及其功能与操作现简要介绍如下:

C.1.1 文件

求解器三大模块中,理论力学问题的运动学、动力学与静力学力学模型的定义与运算结果是以文件的形式储存与调用。每个模块的文件的扩展名作了不同的约定。它们分别为(*.xyy),(*.xh)与(*.hxh)。

文件命令下有“新建”、“打开”、“保存”与“另存为”等子命令。

1. 新建

建立一个新的模型定义文件。

2. 打开

打开一个已有的模型定义文件。

3. 保存或另存为

将当前的模型定义文件数据保存为原文件名或另存为一个新文件名。

C.1.2 图形操作

图形操作命令下有“图形单位”、“图幅定义”、“原点定义”、“图形放大”、“图形缩小”与“大小还原”等子命令。

1. 图形单位:可以选择千米,米,分米,厘米(默认),毫米。

2. 图幅定义:设置整个绘图区域的大小(图幅宽度,图幅长度)。默认值为1600×1600。

3. 原点定义:定义惯性基基点(原点)在绘图区域的坐标(a,b)。注意,绘图区域的原点在屏幕的左上角,向右为 a 正值,向下为 b 正值。

4. 图形放大,缩小或还原:控制图形大小,以获得最佳视觉效果。

C.1.3 系统参数

系统参数命令下有"物体"、"铰"、"力元"、"外载"与"铰参数修改"等子命令。

1. 物体

点击系统参数菜单中物体子菜单内的基点/构件/支座,再点击绘图板区域,将弹出对话框,即可分别定义基点/构件/支座。

这里的"基点"即惯性基的坐标原点,在弹出的基点对话框后,如同二中的2与3的操作,可定义基点坐标(a,b)和整个绘图区域的大小(图幅宽度,图幅长度)。

这里的"构件"是指系统中的物体(不包括与惯性基固结的物体)。在弹出的构件对话框后,要求输入:(1)外形参数:包括长度参数(a_1,a_2)和高度参数(b_1,b_2);(2)构件连体基的基点在惯性基上的坐标(x,y)和连体基的姿态角φ。字母含义参考对话框中的示意图。定义结束,软件为该物体依次编号。

这里的"支座"是指系统中与惯性基固结的物体。约定其质量为1 kg,转动惯量为1 $kg \cdot m^2$。在弹出的支座对话框后,要求输入的内容与"构件"的一致。软件会自动的将该支座定义为系统最后一个编号。

需要指出的是,用户可以在惯性基的不同位置多次定义支座,构成系统运动的环境。软件会自动的将这些支座定义为同一个编号。但是支座连体基基点在惯性基的位置以第一次定义为准。且该连体基的姿态角只能为0。

构件或支座定义之后,它们的位形将出现在绘图板相应的位置上,物体上的蓝线表示连体基x轴,红线表示连体基y轴。双击绘图板中的物体或支座,在弹出的对话框中可对数据进行修改。

2. 铰

本软件当前的版本提供的铰有四种,即滑移铰、旋转铰、齿轮副和齿轮-齿条副。

点击系统参数菜单中铰子菜单内的上述一种约束,再点击绘图板区域中该铰所在的物体,将弹出对话框,即可定义铰。

滑移铰要求输入的参数有:铰号,铰参考点在该物体连体基上的坐标(a,b),和滑移铰相对于x轴方向角θ,字母含义请参考对话框中的示意图。对滑移铰约束的两个邻接物体,先定义的为内接物体B_β[①],后定义的为外接物体B_α。

旋转铰要求输入的参数有:铰号和铰参考点在该物体连体基上的坐标(a,b),字母含义请参考对话框中的示意图。

① 内接物体即铰参考物体,即本书正文3.3中的B_β,外接物体即B_α。

齿轮副要求输入的参数有：铰号，内接物体号 β，内接节圆半径 R_β，内接物体 x 轴到连心线的转角 ψ_β（逆时针方向），内接物体转轴在该物体连体基上的坐标（a_Q，b_Q）；外接物体号 α，外接节圆半径 R_α，外接物体 x 轴到连心线的转角 ψ_α（逆时针方向），外接物体转轴位置（a_P，b_P）。软件的当前版本仅提供的齿轮类型为外接齿轮。

齿轮－齿条副要求输入的参数有：铰号，齿条是否作用在基座的选择，齿轮所附的物体号 α，齿轮半径 R_α，参考线转角（逆时针方向），齿轮轴位置（a_P，b_P）；齿条所附物体号 β，齿条方向角 ψ_β（逆时针方向），啮合点位置（a_Q，b_Q）。

对于连接支座的齿轮副和齿轮－齿条副，在定义时应通过点击系统参数菜单中的齿轮副和齿轮－齿条副参数项，再点击绘图板区域中的支座，然后在弹出的对话框中的步骤来定义。

在定义完铰后，直接用鼠标双击绘图板区域中的铰，可以在弹出的铰参数修改对话框中进行修改参数。

3. 力元（“运动学分析”中无此项）

本软件当前的版本提供的力元只有弹簧。

点击系统参数菜单中的力元项内的弹簧，再点击绘图板区域中与弹簧关联的物体，将弹出弹簧参数对话框，即可定义弹簧。

弹簧所需的参数有内接物体号 β（程序默认所点击绘图板区域中的物体为内接物体），外接物体号，在内接物体上的位置（a_Q，b_Q），在外接物体上的位置（a_P，b_P），弹簧原长，弹簧特性 $F=k_1x+k_2x^2+k_3x^3$ 中的参数 k_1，k_2 与 k_3。按鼠标右键点击绘图板中的弹簧，在弹出菜单中选择删除命令，可删除所点击的弹簧。

4. 外载（“运动学分析”中无此项）

本软件当前的版本提供的外载有四种，即重力、集中力、分布力与力偶。

点击系统参数菜单中的外载项，在弹出的子菜单中点击四种外载之一，再点击绘图板区域中该外载施加的物体，将弹出参数对话框，即可定义各种力元。

定义重力需输入的参数：重力加速度的数值大小与方向。

定义集中力需输入的参数：受力物体号（程序默认所点击的物体），力的作用点在该物体连体基的坐标（a，b）、力的大小，力的方向与 x 轴的夹角 α 以及该轴所属的参考系（惯性系或连体基）。

定义分布力需输入的参数：受力物体号（程序默认是所点击的物体），力的作用区域（a_1，a_2），两端载荷集度。

定义力偶需输入的参数：受力物体号（程序默认是所点击的物体），大小。

对于上述1至4项，按鼠标右键点击绘图板中相应的目标，将弹出一命令菜

单,其中点删除命令可删除所点击的目标;点参数定义命令将弹出相应的对话框,可对显示的参数作修改;点隐藏命令可将图板中的对象暂时隐去,如要再显可通过在图板上点击鼠标右键在弹出的命令菜单中点击显示。

5. 铰参数修改

点击系统参数菜单中铰参数修改项,再点击绘图板区域中的物体,将依次弹出该物体上所有的铰参数对话框,即可修改铰参数。

C.1.4 仿真计算

仿真计算的命令分计算过程和结果输出两个层次。对于"运动学分析"."动力学分析"与"静力学分析"三大模块两个层次子命令各不相同。下面分别给予介绍。

1. "运动学分析"模块

(1) 计算过程层次有"参数设定"、"自由度分析"、"构形数据恢复"与"计算"等子命令。

① 参数设定

点击仿真计算菜单中的参数设定项,将弹出计算参数对话框。在计算参数对话框中需要输入计算精度,计算步长,计算起始时刻与计算终止时刻。

② 自由度分析

这是在正式计算之前必不可少的一步,它将分析整个系统的自由度。点击仿真计算菜单中的自由度分析项,将弹出消息框告知系统自由度,点击确认按钮后将弹出初始条件对话框。这时需要输入的参数有驱动铰号或物体号,初始角速度,初始角加速度。驱动铰有绝对驱动铰和相对驱动铰之分。对于绝对驱动铰而言,各项参数实际是针对物体而言,例如:角速度为2.0 rad/s,其实就是指该物体的角速度;而对于相对驱动铰而言,各项参数是外接物体相对内接物体(内外接物体的号以对话框中提示为准)的值,例如:角度为3.14 rad,其实就是指外接物体的角度减去内接物体的角度。另外,输入驱动铰约束的参数时,要注意单位,这里请务必仔细查看程序中的示意图及文字说明。

③ 构形数据的恢复

当初始条件输入约束,系统自动进行构形。如果发现图板中新的构形有问题,可利用本命令对系统原构形数据进行恢复。如果没有问题可跳过此命令。

④ 计算

点击此命令,软件自动进行运动学分析计算。

(2) 结果输出层次有"动画仿真"、"运动数据表格"与"运动数据曲线"等子命令。

① 动画仿真

在动画仿真窗口中有"动画速度"、"动画图形"、"图形平移","控制选项",

"任意点轨迹"等菜单项。

在动画速度的下拉菜单中有"快速"、"正常"、"慢速"三个菜单命令可控制演示动画的速度。

在图形平移的下拉菜单中有"放大"、"缩小"、"还原"三个菜单命令可控制显示物体的大小。

控制选项的弹出对话框中有"循环演示动画"和"显示齿轮[齿条]"两个复选框。

任意点轨迹的弹出对话框中可选择物体下拉框及需演示轨迹的点在此物体连体基的坐标(a,b)。当点击确定按钮后,动画窗口中会显示输入点的运动轨迹。

在动画仿真窗口的标题栏中有当前仿真时间的指示。

动画图形也可使用键盘实现上述一些功能。如使用键盘上的方向光标键可控制动画的平移;"Home"键使图形恢复初始位置;"+"、"-"可控制动画的放大与缩小(有弹簧时此功能不能用);"End"使动画恢复缺省大小;"PgUp"与"PgDn"键控制动画速度;"Pause"键使动画暂停。

② 运动数据输出或运动曲线输出

两子命令将指定物体的运动学计算结果分别以二维网格形式或时间历程的曲线形式输出。

2."动力学分析"模块

(1) 计算过程层次有"参数设定"、"自由度分析"、"构形数据恢复"与"计算"等子命令。

① 参数设定

同(1.1.1)。

② 自由度分析

这是在正式计算之前必不可少的一步,它将分析整个系统的自由度。点击仿真计算菜单中的自由度分析项,将弹出消息框告知系统自由度,点击确认按钮后将弹出初始条件对话框。需要输入的参数有物体号,坐标选择,初始位置及速度输入。

③ 构形数据的恢复

当初始条件输入结束,系统自动进行构形。如果发现图板中的新的构形有问题,可利用本命令对系统原构形数据进行恢复。如果没有问题可跳过此命令。

④ 计算

点击计算命令,软件自动进行动力学分析计算。

(2) 结果输出层次有"动画仿真"、"运动数据表格"、"运动数据曲线"、"理想约束力数据表格"与"理想约束力数据曲线"等子命令。

① 动画仿真,运动数据表格,运动数据曲线

同(1.2.1)与(1.2.2)。

② 理想约束力数据表格或理想约束力数据曲线

两子命令将指定物体的约束反力计算结果以二维网格形式或时间历程的曲线形式输出。

3. “静力学分析”模块

(1) 计算过程层次有“参数设定”、“自由度分析”、“构形数据恢复”与“平衡位置分析”等子命令。

① 参数设定

同(1.1.1),但只需输入计算精度的数据。

② 自由度分析

这是在正式计算之前必不可少的一步,它将分析整个系统的自由度。点击仿真计算菜单中的自由度分析项,将弹出消息框告知系统自由度,点击确认按钮后将弹出初始条件对话框。需要输入的参数有物体号,坐标选择与初始位置输入。

③ 构形数据的恢复

当初始条件输入结束,系统自动进行构形。如果发现图板中的新的构形有问题,可利用本命令对系统原构形数据进行恢复。如果没有问题可跳过此命令。

④ 平衡位置分析

点击此命令,软件自动进行平衡位置分析。

(2) 结果输出层次有“平衡位置构形”与“理想约束力数据表格”等子命令。

① 平衡位置构形

点击此命令,图板上给出系统平衡时的整体构形。可点击绘图板区域中的物体,将弹出该物体参数对话框,即可了解此时该物体的平衡位形。

② 理想约束力数据表格

将理想约束力计算结果以二维网格形式输出。

C.2 示例1曲柄滑块机构的运动学分析

图C-1为本示例的示意图。在该机构的刚体系模型中刚体个数为4,它们分别为曲柄(B_1),连杆(B_2),滑块(B_3)与支座-滑槽(B_4)。曲柄长2 m,连杆长4 m。如图建立连体基与公共基。现设该机构的初始时曲柄的转角为45°、曲柄的角速度为2π rad/s。求$t\in[0\quad 2]$s的运动过程。

如图可得到系统约束方程的参数与各刚体的初始位形如表所列:

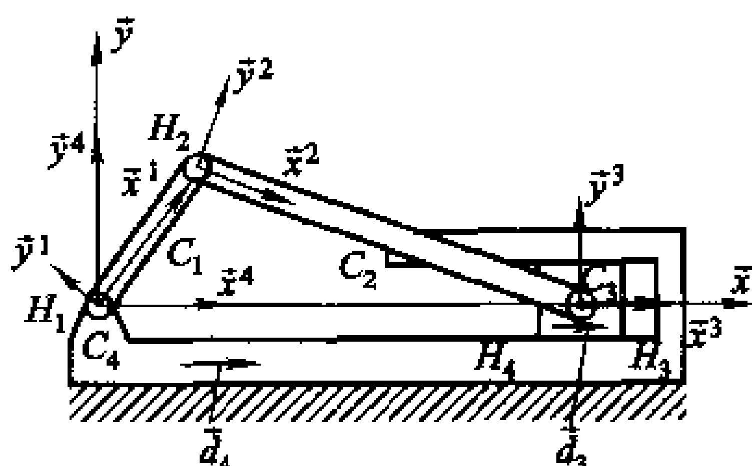


图 C－1　曲柄滑块机构

表 C2－1　各刚体的初始位形参数

B_i	x_i/m	y_i/m	φ_i/(°)
1	0	0	45
2	1.414 2	1.414 2	－20.705
3	5.155 8	0	0
4	0	0	0

表 C2－2　机构约束方程参数

H_r		B_α					B_β					
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{PT}_\alpha$		$\boldsymbol{d}'^{T}_\alpha$		β	$\boldsymbol{\rho}'^{QT}_\beta$		$\boldsymbol{d}'^{T}_\beta$		c
1	(r)	1	0	0			4	0	0			
2	(r)	2	0	0			1	2	0			
3	(r)	3	0	0			2	4	0			
4	(t)	3	0	0	1	0	4	0	0	1	0	
	(ax)	4	0	0								0
	(ay)	4	0	0								0
	(aφ)	4	0	0								0

求解过程：

第一步　定义惯性基的原点

启动“运动学分析”程序。图形操作命令下点击在弹出的“原点定义”对话框中输入原点坐标 $a=200, b=200$（这个坐标是相对于屏幕左上角而言）。

第二步　视图区的修改

点击“图形操作”菜单，可以选择图形单位，定义图幅大小，控制图形比例。这一步采用默认值即可。

第三步　定义物体与支座

参照前节的介绍，按照如下的次序定义物体与支座：

(1) 定义第一个支座（支点），其中 $a_1=a_2=b_1=b_2=20, x=y=\varphi=0$。

(2) 定义第一个物体（曲柄），其中 $a_1=0, a_2=200, b_1=b_2=10, x=y=0$，$\varphi=45$。

(3) 定义第二个物体(连杆),其中 $a_1=0, a_2=400, b_1=b_2=10, x=y=141.42, y=0, \varphi=-20.705$。

(4) 定义第三个物体(滑块),其中 $a_1=a_2=b_1=b_2=15, x=515.583, y=0, \varphi=0$。

(5) 定义另一个支座(汽缸壁),其中 $a_1=210, a_2=100, b_1=0, b_2=5, x=273, y=-15, \varphi=0$。

(6) 定义另一个支座(汽缸壁),其中 $a_1=210, a_2=100, b_1=5, b_2=0, x=273, y=15, \varphi=0$。

(7) 定义另一个支座(汽缸壁),其中 $a_1=0, a_2=5, b_1=b_2=15, x=370, y=0, \varphi=0$。

以上步骤中物体编号均采用程序默认值,即曲柄,连杆与滑块的编号分别为1,2与3。所有支座的编号为4。

第四步 定义铰

本例中有两种铰,滑移铰约束和旋转铰约束。参照前节定义铰:

(1) 定义一个旋转铰,铰号输入1。参考点在支座4上的连体基坐标 $a=0, b=0$,在物体1上的连体基坐标为 $a=0, b=0$。

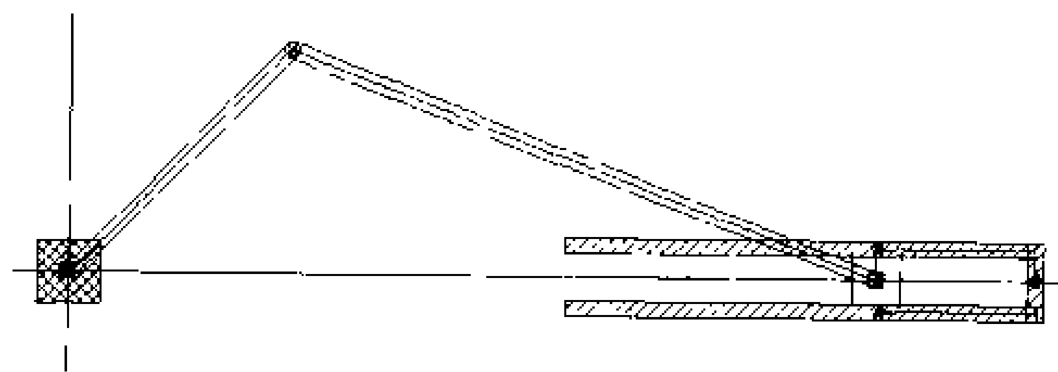
(2) 定义一个旋转铰,铰号输入2。参考点在物体1上的连体基坐标 $a=200, b=0$,在物体2上的连体基坐标为 $a=0, b=0$。

(3) 定义一个旋转铰,铰号输入3。参考点在物体2上的连体基坐标 $a=400, b=0$,在物体3上的连体基坐标为 $a=0, b=0$。

(4) 定义一个滑移铰,铰号输入4。有两个参考点,在物体3上的参考点在其连体基坐标 $a=b=0$,滑移的方向 $\theta=0$;在支座4上的参考点在其连体基坐标为 $a=0, b=0$,滑移的方向 $\theta=0$。

应注意,虽然这里有多个编号相同的支座,但在定义作用于支座上的滑移铰时,务必使鼠标点击第一个支座。

完成这一步后,图板上呈现如图C-2所示的系统构形:



图C-2 示例1模型的屏幕显示

第五步　自由度分析和初始条件输入

点击“仿真计算”菜单中的自由度分析项，将弹出消息框告知系统自由度，点击确认按钮后将弹出初始条件对话框。考虑到曲柄的驱动规律为 $2\pi t$，这时需要输入的参数为选择绝对驱动，物体号为 1 号物体，作用规律的五个参数框内依次输入 45，6.283，0，0，0。

第六步　计算

点击“仿真计算”菜单中的参数设定项，在计算的结束时间栏中输入 2，其余可采用默认值。

点击“仿真计算”菜单中的计算项，即自动进行计算。

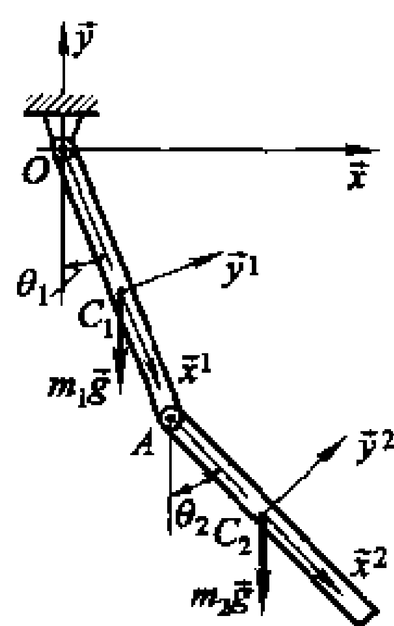
第七步　结果输出

点击“仿真计算”菜单中的动画仿真，运动数据表格或运动数据曲线等命令可以以各种形式查看计算结果。

C.3　示例 2 双摆的动力学分析

图 C－3 为本示例的示意图。在该机构的刚体系模型中刚体个数为 2，它们分别为两摆杆。杆长均为 2 m。质量 1 kg，转动惯量为 1 kg·m²。如图建立连体基与公共基。现设该机构的初始时角 $\theta_1 = 30°$，$\theta_2 = 45°$。均无角速度，在重力作用下运动。求 $t \in [0\ 2]$ s 的运动过程。

如图可得到系统约束方程的参数与各刚体的初始位形，惯量与外力(矩)的参数如表所列：



图C－3　双摆

表 C3－1　机构约束方程参数

H_i		B_α					B_β						
i	类	α	ρ'^{P}_{α}		d'^{T}_{α}		β	ρ'^{Q}_{β}		d'^{T}_{β}			c
1	(r)	1	0	0			4	0	0				
2	(r)	2	0	0			1	2	0				
3	(r)	3	0	0			2	4	0				
4	(t)	3	0	0	1	0	4	0	0	1	0		
	(ax)	4	0	0									0
	(ay)	4	0	0									0
	(aφ)	4	0	0									0

表C3-2　机构各刚体的初始位形,惯量与外力(矩)参数

B_i	m_i/kg	J_i/kg·m^2	x_i/m	y_i/m	φ_i/(°)	g/m·s^2/与x夹角
1	1	1	0.5	0.866	−60	9.8/−90°
2	1	1	1.71	−2.44	−45	
3	1(约定)	1(约定)	0	0	0	

求解过程:

第一步　定义惯性基的原点

启动"运动学分析"程序。图形操作命令下点击在弹出的"原点定义"对话框中输入原点坐标 $a=200, b=200$(这个坐标是相对于屏幕左上角而言)。

第二步　视图区的修改

点击"图形操作"菜单,可以选择图形单位,定义图幅大小,控制图形比例。这一步采用默认值即可。

第三步　定义物体与支座

参照前节的介绍,按照如下的次序定义物体与支座:

(1) 定义一个支座(支点),其中 $a_1=a_2=b_1=b_2=20, x=y=\varphi=0$。

(2) 定义第一个物体(摆杆1),其中质量为1,转动惯量为1, $a_1=a_2=100$, $b_1=b_2=10, x=50, y=-86.6, \varphi=-60$。

(3) 定义第二个物体(摆杆2),其中质量为1,转动惯量为1, $a_1=a_2=100$, $b_1=b_2=10, x=171, y=-244, \varphi=-45$。

以上步骤中物体编号均采用程序默认值,即摆杆1与摆杆2的编号分别为1与2。支座的编号为3。

第四步　定义铰

本例中有两个旋转铰约束。参照前文定义铰:

(1) 定义一个旋转铰,铰号输入1,参考点在支座3上的连体基坐标 $a=0$, $b=0$,在物体1上的连体基坐标为 $a=-100, b=0$。

(2) 定义一个旋转铰,铰号输入2,参考点在物体1上的连体基坐标 $a=100, b=0$,在物体2上的连体基坐标为 $a=-100, b=0$。

完成这一步后,图板上呈现如图C-4所示的系统构形。

第五步　定义外载

点击"系统参数"菜单中的外载项,在弹出的子菜单中点击重力,将弹出重力加速度参数对话框,重力的默认值方向为−90°,大小为9.8 m/s^2。本例中只需采用默认值即可。

第六步　自由度分析和初始条件输入

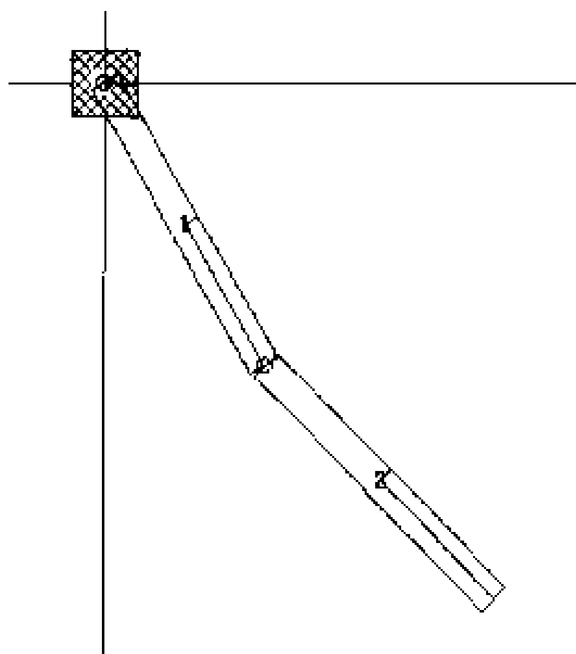
点击"仿真计算"菜单中的自由度分析项,将弹出消息框告知系统自由度为

2，点击确认按钮后将弹出初始条件对话框。考虑到系统以上述位形，从静止开始运动。这时需要输入的参数有：对于物体1，下拉框取 φ，初始角度为－60，初始角速度为0；对于物体2，下拉框取 φ，初始角度为－45，初始角速度为0。

第七步　计算

点击“仿真计算”菜单中的参数设定项，在计算的结束时间栏中输入2，其余可采用默认值。

点击“仿真计算”菜单中的计算项，即可进行计算。



图C－4　示例2模型的屏幕显示

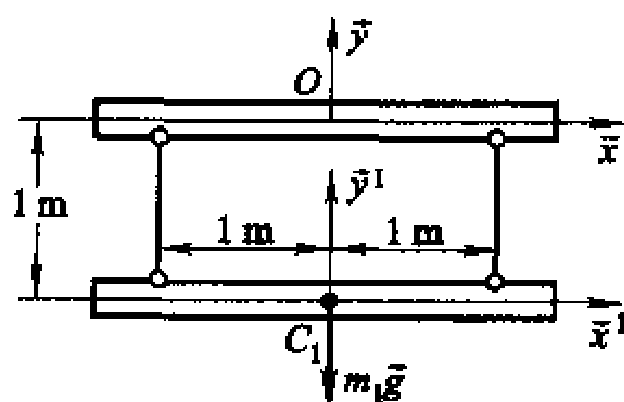
第八步　结果输出

点击“仿真计算”菜单中的动画仿真，运动数据表格或运动数据曲线等命令可以以各种形式查看计算结果。点击“仿真计算”菜单中的理想约束力数据表格或理想约束力数据曲线可以查看理想约束力的计算的结果。

C.4　示例3吊灯的静平衡分析

图C－5为本示例的示意图。吊灯的质量为10 kg，转动惯量为1 kg·m^2，由两系绳挂起，尺寸如图。考虑系绳的弹性，此处系绳作弹簧处理。令其原长均为1 m，左绳刚度为500 N/m，右绳刚度为400 N/m。如图建立连体基与公共基。现设初始位形如图，求吊灯在重力作用下的平衡位置。

如图可得各刚体的初始位形，惯量与外力参数如表所列：



图C－5　吊灯

表C4－1　各刚体的初始位形，惯量与外力参数

B_i	m_i/kg	J_i/kg·m^2	x_i/m	y_i/m	φ_i/(°)	g/m·s^2/与 x 夹角
1	10	1	0	－1	0	9.8/－90°
2	1(约定)	1(约定)	0	0	0	

求解过程：

第一步　定义惯性基的原点

启动“静力学分析”程序。图形操作命令下点击在弹出的“原点定义”对话框

中输入原点坐标 $x=200$，$y=200$（这个坐标是相对于屏幕左上角而言）。

第二步　视图区的修改

点击“图形”，采用默认值即可。

第三步　定义物体与支座

参照前节的介绍，按照如下的次序定义物体与支座：

(1) 定义一个支座（支点），其中 $a_1=a_2=100$，$b_1=b_2=20$，$x=y=\varphi=0$。

(2) 定义一个物体（吊灯），其中质量为 10，转动惯量为 1，$a_1=a_2=100$，$b_1=b_2=10$，$x=0$，$y=-100$，$\varphi=0$。

(3) 以上步骤中物体编号均采用程序默认值，即吊灯编号为 1。支座的编号为 2。

第四步　定义铰

本例没有铰，这一步可以跳过。

第五步　定义力元与外载

(1) 点击“系统参数”菜单力元中弹簧项，再点击绘图板区域中的支座，在弹出的弹簧参数对话框中输入：内接物体 2，弹簧接点在内接物体上的位置 $a=-100$，$b=0$；外接物体1 弹簧接点在外接物体上的位置 $a=-100$，$b=0$；弹簧原长为 100。弹簧特性为线弹簧，刚度系数为 500，故 $k_1=500$，$k_2=k_3=0$。

(2) 点击“系统参数”菜单中力元内的弹簧项，再点击绘图板区域中的支座，在弹出的弹簧参数对话框中输入：内接物体 2，弹簧接点在内接物体上的位置 $a=100$，$b=0$；外接物体 1，弹簧接点在外接物体上的位置 $a=100$，$b=0$；弹簧原长为 100。弹簧特性为线弹簧，刚度系数为 400，故 $k_1=400$，$k_2=k_3=0$。

(3) 点击“系统参数”菜单中的外载项，在弹出的子菜单中点击重力，重力加速度的默认值方向为 $-90°$，大小为 9.8 m/s^2。本例中只需采用默认值即可。

到这一步，图板上呈现如图 C－6 所示的系统构形。

第六步　自由度分析和初始条件输入

点击“仿真计算”菜单中的自由度分析项，将弹出消息框告知系统自由度为 3，点击确认按钮后将弹出初始条件对话框。考虑到系统以上述位形，从静止开始运动。这时对于物体 1 需要输入的参数：下拉框取 x，初始位置 $x=0$，初始 x 向速度为 0；下拉框取 y，初始位置 $y=-100$，初始 y 向速度为 0；下拉框取 φ，初始姿态 $\varphi=0$，初始角速度为 0。

第七步　计算

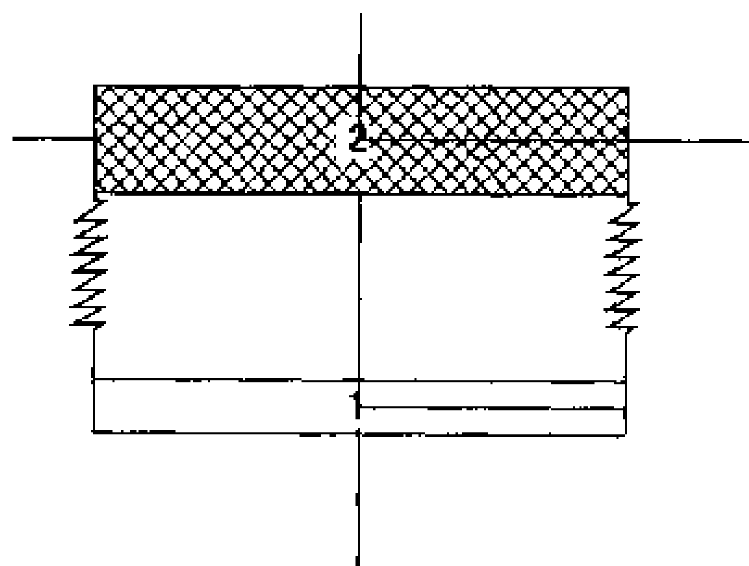
点击“仿真计算”菜单中的参数设定项，本例采用默认值。

点击“仿真计算”菜单中的平衡位置分析项，即可进行计算。

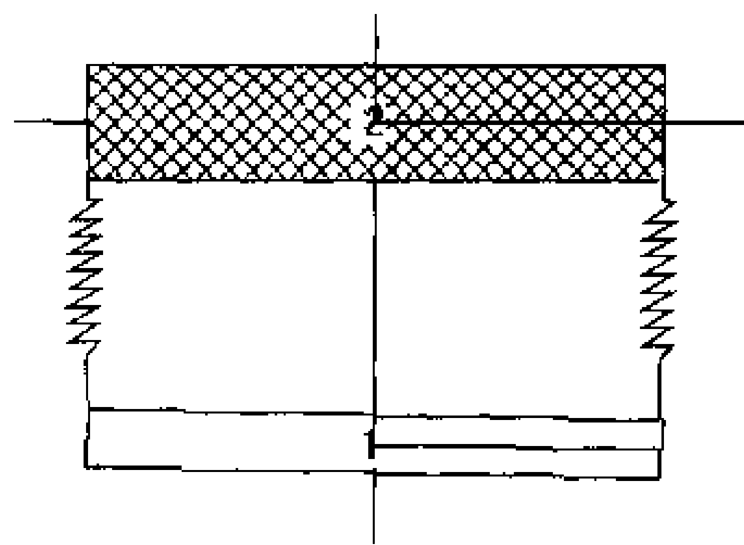
第八步　结果输出

点击“仿真计算”菜单中平衡位置构形，图板上给出系统平衡时的整体构形如图C-7所示可点击绘图板区域中的物体，将弹出该物体参数对话框，即可了解此时该物体的平衡位形。

点击“仿真计算”菜单中的理想约束力数据表格，可以查看理想约束力的结果。



图C-6 示例3模型初始构形的屏幕显示



图C-7 示例3模型的平衡构形的屏幕显示

参考文献

1 Newton I. 自然哲学的数学原理. 王克迪译. 武汉:武汉出版社,1992
2 Lagrange J L. Mécanique analytique. T. I, II, Paris, 1788
3 D'Alembert J R. Traité de dynamique. Paris, 1743
4 吴镇. 理论力学. 上海:上海交通大学出版社,1990
5 刘延柱,杨海兴. 理论力学. 北京:高等教育出版社,1991
6 洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京:高等教育出版社,1999
7 豪格 E J 著. 机械系统的计算机辅助运动学和动力学,第 1 卷基本方法. 刘兴祥等译. 北京:高等教育出版社,1996
8 周德润,张志英,傅丽华. 线性代数. 北京:北京航空航天大学出版社,1996
9 周伯壎. 高等代数基础. 第 2 版. 北京:高等教育出版社,1989
10 奚梅成. 数值分析方法. 合肥:中国科学技术大学出版社,1995
11 秦化淑等. 常微分方程初值问题的数值解法及其应用. 北京:国防工业出版社,1985
12 清华大学理论力学教研组编. 理论力学:中册. 第 4 版. 北京:高等教育出版社,1994
13 清华大学理论力学教研组编. 理论力学:下册. 第 4 版. 北京:高等教育出版社,1994
14 哈尔滨工业大学理论力学教研室编. 理论力学. 上册. 第 5 版. 北京:高等教育出版社,1997
15 哈尔滨工业大学理论力学教研室编. 理论力学. 下册. 第 5 版. 北京:高等教育出版社,1997
16 朱照宣,周起钊,殷金生. 理论力学:上册. 北京:北京大学出版社,1982
17 朱照宣,周起钊,殷金生. 理论力学:下册. 北京:北京大学出版社,1982
18 南京工学院,西安交通大学主编. 理论力学:上册. 第 2 版. 北京:高等教育出版社,1986
19 南京工学院,西安交通大学主编. 理论力学:下册. 第 2 版. 北京:高等教育出版社,1986
20 黄克累,张安厚,刘洁民. 理论力学:上册. 北京:北京航空航天大学出版社,1991
21 黄克累,张安厚,刘洁民. 理论力学:下册. 北京:北京航空航天大学出版社,1991
22 西北工业大学理论力学教研室编. 理论力学:上册. 西安:西北工业大学出版社,1993
23 西北工业大学理论力学教研室编. 理论力学:下册. 西安:西北工业大学出版社,1993

24 支希哲主编. 理论力学常见题型解析及模拟题. 西安:西北工业大学出版社,1997
25 范钦珊主编. 工程力学教程(I). 北京:高等教育出版社,1998
26 范钦珊主编. 工程力学教程(II). 北京:高等教育出版社,1998
27 范钦珊主编. 工程力学教程(III). 北京:高等教育出版社,1998
28 谢传锋编. 静力学. 北京:高等教育出版社,1999
29 谢传锋主编. 动力学(I). 北京:高等教育出版社,1999
30 谢传锋主编. 动力学(II). 北京:高等教育出版社,1999
31 陈滨. 分析动力学. 北京:北京大学出版社,1987
32 陈文良,洪嘉振,周鉴如. 分析动力学. 上海:上海交通大学出版社,1990
33 梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学. 北京:北京理工大学出版社,1991
34 刘延柱,洪嘉振,杨海兴. 多刚体系统动力学. 北京:高等教育出版社,1989
35 袁士杰,吕哲勤. 多刚体系统动力学. 北京:北京理工大学出版社,1992
36 休斯顿,刘又午. 多刚体系统动力学. 天津:天津大学出版社,1991

习 题 答 案

第1章

1-1 (1)线性无关;(2)线性无关;(3)线性相关。

1-2 (1)2;(2)1

1-3 略。

1-4 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$

1-5 $\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{pmatrix}2-3y-z-4yz & -3x+2y+z^2-4xz & -x+2yz-4xy\\ -2x+y^2-z^2 & 2xy-2+5z & 5y-2xz\end{pmatrix}$

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}=\begin{pmatrix}2\dot{x}-3\dot{x}y-3x\dot{y}+2y\dot{y}-\dot{x}z-x\dot{z}+\dot{y}z^2+2yz\dot{z}-4\dot{x}yz-4x\dot{y}z-4xy\dot{z}\\ -2x\dot{x}+\dot{x}y^2+2xy\dot{y}-2\dot{y}+5\dot{y}z+5y\dot{z}-\dot{x}z^2-2xz\dot{z}\end{pmatrix}$$

证明提示:

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}=\begin{pmatrix}(2-3y-z-4yz)\dot{x}+(-3x+2y+z^2-4xz)\dot{y}+(-x+2yz-4xy)\dot{z}\\ (-2x+y^2-z^2)\dot{x}+(2xy-2+5z)\dot{y}+(5y-2xz)\dot{z}\end{pmatrix}$$

1-6 $3,\boldsymbol{I}_3,\vec{0},\begin{bmatrix}\vec{0} & \vec{e}_3 & -\vec{e}_2\\ -\vec{e}_3 & \vec{0} & \vec{e}_1\\ \vec{e}_2 & -\vec{e}_1 & \vec{0}\end{bmatrix}$

1-7 $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\ -1,\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix}$

1-8 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},\tilde{\boldsymbol{a}}\tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c},-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}\tilde{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}\tilde{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{c}}\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$

1-9 $\boldsymbol{c}^{b\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{rb})^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}^r\boldsymbol{b}^r,(\boldsymbol{A}^{rb})^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}^r\tilde{\boldsymbol{b}}^r\boldsymbol{A}^{rb}\boldsymbol{c}^b$

$-\boldsymbol{b}^{r\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}^r\boldsymbol{A}^{rb}\tilde{\boldsymbol{c}}^b\tilde{\boldsymbol{d}}^b-\boldsymbol{c}^{b\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{rb})^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}^r\boldsymbol{A}^{rb}\tilde{\boldsymbol{d}}^b(\boldsymbol{A}^{rb})^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}^r-\boldsymbol{d}^{b\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{c}}^b(\boldsymbol{A}^{rb})^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}^r\boldsymbol{d}^r$

1-10 $\boldsymbol{A}^{03}=\begin{bmatrix}C_\beta C_\gamma & -C_\beta S_\gamma & S_\beta\\ S_\alpha S_\beta C_\gamma+C_\alpha S_\gamma & -S_\alpha S_\beta S_\gamma+C_\alpha C_\gamma & -S_\alpha C_\beta\\ -C_\alpha S_\beta C_\gamma+S_\alpha S_\gamma & C_\alpha S_\beta S_\gamma+S_\alpha S_\gamma & C_\alpha C_\beta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C_\beta C_\gamma\\ S_\alpha S_\beta C_\gamma+C_\alpha S_\gamma\\ -C_\alpha S_\beta C_\gamma+S_\alpha S_\gamma\end{bmatrix}$

式中,$C_\alpha=\cos\alpha,S_\alpha=\sin\alpha$,其余类推。

1-11 $\boldsymbol{A}^{01}=\begin{bmatrix}C_\psi C_\varphi-S_\psi C_\theta S_\varphi & -C_\psi S_\varphi-S_\psi C_\theta S_\varphi & S_\psi S_\theta\\ S_\psi C_\varphi-C_\psi C_\theta S_\varphi & -S_\psi S_\varphi-C_\psi C_\theta S_\varphi & -C_\psi S_\theta\\ S_\theta S_\varphi & S_\theta C_\varphi & C_\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C_\psi C_\varphi-S_\psi C_\theta S_\varphi\\ S_\psi C_\varphi-C_\psi C_\theta S_\varphi\\ S_\theta S_\varphi\end{bmatrix}$

式中,$C_\theta=\cos\theta,S_\theta=\sin\theta$,其余类推。

1-12 $A^{rb}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

1-13 (1) $A^{01}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$;(2) $a^0=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,$a^1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$;

(3) 验证从略。

1-14 $p^1=\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}(-1 \quad 1 \quad 1+\sqrt{2})^T$,验证从略。

第 2 章

2-1 略。

2-2 略。

2-3 略。

2-4 $\omega=\frac{R_1}{R_2}\omega_3$

2-5 (1) $v_B=2$ m/s, $\omega=1$ rad/s, $a_B=2.31$ m/s^2, $\alpha=0.58$ rad/s^2

(2) $\omega_{BC}=2$ rad/s, $\omega_{CD}=1$ rad/s, $\alpha_{BC}=-6$ rad/s^2, $\alpha_{CD}=6$ rad/s^2

(3) $v_C=r\omega, a_C=0$

(4) $\omega_{OA}=2$ rad/s, $\alpha_{OA}=-16\sqrt{3}$ rad/s^2

(5) $v=\frac{\sqrt{21}}{2}$ m/s, $a=5\sqrt{7}$ m/s^2

(6) $\omega_{AB}=\omega, \alpha_{AB}=2\omega^2$

2-6 $a_x=-2l\omega^2, a_y=-2l\omega^2$

2-7 $a_C=\frac{2\sqrt{3}v^2}{l}$

2-8 $v=v_A\sin\theta, a=\frac{v_A^2}{2r}\sqrt{1+3\sin^2\theta}$

2-9 $v=\frac{r}{2}\omega, a=0$

2-10 $v=0.35$ m/s, $a=-0.97$ m/s^2

2-11 $v=r\omega, a=\frac{\sqrt{21}}{3}r\omega^2$

第 3 章

3-1 略。

3-2 3π m, 3π m/s, 1.5π m/s^2

3-3 略。

3-4 略。

3-5 略。

3-6 0 m, 0.056 57 m/s, 0.01 m/s^2

3-7 0.115 5 m, 0.066 67 m/s, 0.552 6 m/s^2

3-8 0.2 m, −0.015 11 m/s, −0.001 142 m/s^2

3-9 −0.433 3 rad/s, −0.066 67 rad/s^2

3-10 $\boldsymbol{q}(0)=(0.100\,0 \quad 0.173\,2 \quad 5.236\,0)^{\mathrm{T}}$

$\dot{\boldsymbol{q}}(0)=(-0.036\,3 \quad -0.020\,9 \quad 0.209\,4)^{\mathrm{T}}$

$\ddot{\boldsymbol{q}}(0)=(-0.004\,4 \quad -0.007\,6 \quad 0.000\,0)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{q}(0.1)=(0.103\,6 \quad 0.171\,1 \quad 5.536\,9)^{\mathrm{T}}$

$\dot{\boldsymbol{q}}(0.1)=(-0.035\,8 \quad -0.021\,7 \quad 0.209\,4)^{\mathrm{T}}$

$\ddot{\boldsymbol{q}}(0.1)=(-0.004\,5 \quad -0.007\,5 \quad 0.000\,0)^{\mathrm{T}}$

3-11 $\boldsymbol{q}(0)=(0.000\,0 \quad 0.000\,0 \quad 0.100\,0 \quad -0.173\,2 \quad 0.523\,6)^{\mathrm{T}}$

$\dot{\boldsymbol{q}}(0)=(0.200\,0 \quad 0.000\,0 \quad 0.217\,3 \quad 0.010\,0 \quad 0.100\,0)^{\mathrm{T}}$

$\ddot{\boldsymbol{q}}(0)=(0.000\,0 \quad 0.000\,0 \quad -0.000\,5 \quad 0.001\,7 \quad 0.000\,0)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{q}(0.1)=(0.020\,0 \quad 0.000\,0 \quad 0.121\,7 \quad -0.172\,2 \quad 0.533\,6)^{\mathrm{T}}$

$\dot{\boldsymbol{q}}(0.1)=(0.200\,0 \quad 0.000\,0 \quad 0.217\,2 \quad 0.010\,2 \quad 0.100\,0)^{\mathrm{T}}$

$\ddot{\boldsymbol{q}}(0.1)=(0.000\,0 \quad 0.000\,0 \quad -0.001\,0 \quad 0.001\,7 \quad 0.000\,0)^{\mathrm{T}}$

3-12 (1) 广义坐标数为 12，约束方程数目为 11，自由度数为 1。

(2) 机构约束方程参数表与各刚体的初始位形如附表所示。利用《理论力学问题求解器》可进行仿真计算。

(3) 略。

题 3-12 各刚体的初始位形参数

B_i	x_i/mm	y_i/mm	φ_i/(°)
1	0	0	0
2	40	0	94.313
3	18.943	279.21	−52.937
4	0	0	0

题 3-12 机构约束方程参数(供参考)

H_i		B_α			B_β			
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{P\mathrm{T}}_{\alpha}$/mm		β	$\boldsymbol{\rho}'^{Q\mathrm{T}}_{\beta}$/mm		c
	(ax)	4	0	0				0
	(ay)	4	0	0				0
	(aφ)	4	0	0				0
1	(r)	1	0	0	4	0	0	
2	(r)	2	0	0	1	40	0	
3	(r)	3	0	0	2	280	0	
4	(r)	3	400	0	4	260	−40	

3-13 (1) 广义坐标数为12,约束方程数目为11,自由度数为1。

(2) 机构约束方程参数表与各刚体的初始位形如附表所示。利用《理论力学问题求解器》可进行仿真计算。

(3) 略。

题 3-13 各刚体的初始位形参数

B_i	x_i/mm	y_i/mm	φ_i/(°)
1	0	0	0
2	50	0	0
3	100	0	168.46
4	0	0	0.000

题 3-13 机构约束方程参数(供参考)

H_i		B_α				B_β				
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{PT}_{\alpha}$/mm	φ_α	R_α/mm	β	$\boldsymbol{\rho}'^{QT}_{\beta}$/mm	φ_β	$\mathbf{d}'^{T}_{\beta}$	$c(\theta)$
	(ax)	4	0 0							0
	(ay)	4	0 0							0
	($a\varphi$)	4	0 0							0
1	(r)	1	0 0			4	0 0			
2	(r)	2	0 0			1	50 0			
3	(r)	3	0 0			4	100 0			
4	(tr)	2	0 0			3	49 0		1 0	
5	(tp)	2	0 0	78.46°	10	3	49 0	0°	1 0	270°

3-14 (1) 广义坐标数为12,约束方程数目为11,自由度数为1。

(2) 机构约束方程参数表与各刚体的初始位形如附表所示。利用《理论力学问题求解器》可进行仿真计算。

(3) 略。

题 3-14 各刚体的初始位形

B_i	x_i/mm	y_i/mm	φ_i/(°)
1	0	0	0
2	150	0	-8.26
3	644.8	71.86	-130.49
4	0	0	0

题 3-14 机构约束方程参数表(供参考)

H_i		B_α		B_β		
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{PT}_{\alpha}$/mm	β	$\boldsymbol{\rho}'^{QT}_{\beta}$/mm	c
	(ax)	4	0 0			0
	(ay)	4	0 0			0
	($a\varphi$)	4	0 0			0
1	(r)	1	0 0	4	0 0	
2	(r)	2	0 0	1	15 0	
3	(r)	3	0 0	2	50 0	
4	(r)	3	30 0	4	45 -30	

第4章

4-1 (1) $F_A=\frac{F}{2}+\frac{5}{4}qa-\frac{M}{2a}$, $F_B=\frac{F}{2}-\frac{1}{4}qa+\frac{M}{2a}$

(2) $F_A=\frac{3}{2}F+\frac{3}{4}qa$, $F_B=-\frac{1}{2}F+\frac{3}{4}qa$

(3) $F_{AX}=0, F_{AY}=0, M_A=M, F_B=0$

(4) $F_A=\frac{7}{6}qa$, $M_A=2qa^2, F_B=\frac{5}{6}qa$

4-2 $F_{EB}=-2.828$ kN, $F_{EI}=2.000$ kN, $F_{ED}=-2.000$ kN

4-3 $F_{Ax}=-0.333$ kN, $F_{Ay}=1.000$ kN, $M_A=3.500$ kN·m

4-4 $F_{Ax}=14$ kN, $F_{Ay}=6$ kN, $F_{CD}=5.66$ kN

4-5 $F_{Ax}=12$ kN, $F_{Ay}=1.5$ kN, $F_B=10.5$ kN, $F_{HC}=-15$ kN

4-6 $F_{Dx}=0, F_{Dy}=-2$ kN, $F_{Ex}=0, F_{Ey}=2$ kN,

4-7 $F_{Ax}=-F, F_{Ay}=-F, F_{Bx}=-F, F_{By}=0, F_{Dx}=2F, F_{Dy}=F$

4-8 (1) $p=\frac{1}{2}(m_1+2m_2)(r_1+r_2)\omega$,方向垂直 AB

(2) $p=0$

4-9 $\begin{cases} x_C=\dfrac{(m_1+2m_2+2m_3)l\cos\omega t+2m_3 l}{2(m_1+m_2+m_3)} \\ y_C=\dfrac{m_1+2m_2}{2(m_1+m_2+m_3)}l\sin\omega t \end{cases}$ $\begin{cases} p_x=-\dfrac{m_1+2(m_2+m_3)}{2}l\omega\sin\omega t \\ p_y=\dfrac{m_1+2m_2}{2}l\omega\cos\omega t \end{cases}$

4-10 $\begin{cases} x_C=ml\cos\omega t \\ y_C=ml\sin\omega t \end{cases}$ 其中 $m=\frac{5m_1+4m_2}{2(3m_1+2m_2)}$, $p=\frac{1}{2}(5m_1+4m_2)l\omega$,方向垂直 OC

4-11 $I_x=-11$ N·s, $I_y=4$ N·s

4-12 $a_A>a_C>a_B>a_D>a_E$

4-13 $L_O=2m\omega l^2\sin\theta(-\cos\theta\vec{j}+\sin\theta\vec{k})$

$L_z=2m\omega l^2\sin^2\theta$

4-14 $J=1\ 566$ kg·m²

4-15 $J=1\ 408$ kg·m²

4-16 $\omega^2=\frac{3ag(G_1a+G_2l)}{r(G_1a^2+G_2l^2)}$

4-17 $\omega^2=\frac{6\pi gMn}{11a^2G}$

4-18 $\omega^2=\frac{3(F+m_0g)\sin\theta}{m_0b}$

4-19 $v_A=2.36$ m/s

4-20 $v=2.88$ m/s

第5章

5-1 $v=0.74$ m/s

5-2 $v=0.28$ m/s

5-3 $v=0.57$ m/s

5-4 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{3(R-r)}{2g}}$

5-5 $\ddot{\theta}+\dfrac{3\sqrt{3}}{5}\dfrac{g}{l}\sin\theta=0$

$F_A=\dfrac{9}{20}mg$, $F_B=\dfrac{11}{20}mg$, $\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{10}\dfrac{g}{l}$, $a_t=\dfrac{9}{20}g$, $a_n=0$

5-6 $t=\dfrac{2r\omega_0}{7fg}$, $v=\dfrac{2}{7}r\omega_0$

5-7 $t=\dfrac{2(v_0-r\omega_0)}{7fg}$, $v=\dfrac{1}{7}(5v_0+2r\omega_0)$

5-8 $F_A=mg\left(1-\dfrac{3}{4}\sin^2\theta\right)$, $F_B=\dfrac{3}{4}mg\sin\theta\cos\theta$

5-9 $v_B=\sqrt{lg}$, $F_{OA}=0.846mg$, $F_B=0.654mg$

5-10 $k>\dfrac{mgl}{2b^2}$

5-11 $a_{Ax}=\dfrac{37F}{20m}$, $a_{Ay}=\dfrac{9F}{20m}$

5-12 $\omega=\dfrac{3v}{2l}\sin\theta$, $I_x=\dfrac{3}{4}mv\sin\theta\cos\theta$, $I_y=\dfrac{1}{4}mv(4-3\sin^2\theta)$

5-13 $\omega=\dfrac{6v\sin\theta}{l(1+3\sin^2\theta)}$

5-14 $v\geqslant\dfrac{2r}{3r-2h}\sqrt{3gh}$

5-15 $v\geqslant0.81$ m/s

5-16 $\omega=\dfrac{3I}{5ml}$

5-17 $x=\dfrac{10}{11}l$, $I_C=\dfrac{I}{11}$

5-18 $\omega=\dfrac{2Ih}{3ml^2}$

5-19 $v_A=\dfrac{7I}{2m}$, $v_B=\dfrac{I}{m}$, $v_C=\dfrac{I}{2m}$

5-20 $\Delta T=\dfrac{4}{7}mv^2$

第 6 章

6-1 $F_A=\frac{37}{43}G$, $F_B=1\frac{6}{43}G$

6-2 $F_{BC}=\frac{\sqrt{2}}{5}G$

6-3 $\alpha_{AB}=\frac{9g}{20l}$, $a_B=\frac{18}{25}g$

6-4 $\alpha_{AB}=\frac{3g}{20l}$, $a_B=\frac{11}{150}g$

6-5 $a_B=\frac{3}{7}g$, $a_D=\frac{9}{7}g$

6-6 $F_C=\frac{4}{7}G$

6-7 $m_{AB}:m_{BC}=14:3$

6-8 $f_s \geqslant \frac{m+m_1}{3m+m_1}\tan\theta$

6-9 $a_r=\frac{2(m+m_1)\sin\theta}{3m+(1+2\sin^2\theta)m_1}g$, $a=\frac{m_1\sin 2\theta}{3m+(1+2\sin^2\theta)m_1}g$

6-10 $a_0=\frac{m_1\sin 2\varphi}{3m+2m_1\sin^2\varphi}g$

6-11 (1) $M=\sqrt{3}Fl$; (2) $M=Fl$; (3) $M=\frac{2Fr}{\tan\varphi+c\tan\theta}$

6-12 $F=0.173$ kN

6-13 $M=0.017$ kN·m，不能平衡。

6-14 $F_{Dx}=\frac{2M+3Fa}{2b}$, $F_{Dy}=\frac{3}{2}F$

6-15 $\tan\theta=\frac{2F}{5G}$

6-16 $\theta=\arctan 0.6$, $\psi=\arctan 3$

6-17 平衡位置：$\varphi=\frac{1}{2}\pi$ 稳定，$\varphi=\frac{3}{2}\pi$ 不稳定。

6-18 平衡位置：$\theta=0$ 不稳定，$\theta=53.8°$ 稳定。

6-19 $a_B=\frac{m_1\sin 2\theta}{2(m_2+m_1\sin^2\theta)}g$, $a_r=\frac{(m_1+m_2)\sin\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$

6-20 $a_B=\frac{m_1\sin 2\theta}{3(m_1+m_2)-2m\cos^2\theta}g$, $a_r=\frac{2(m_1+m_2)\sin\theta}{3(m_1+m_2)-2m_1\cos^2\theta}g$

6-21 $\alpha_{AC}=1.21\frac{g}{l}$

6-22 $\alpha_{AC}=0.68\frac{g}{l}$

6-23 (1) $T=\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; (2) $T=4\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

6-24 $\cos\varphi\,\ddot{x}+2r\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0$, $\quad 5\ddot{x}+3r(\cos\varphi\ddot{\varphi}-\sin\varphi\dot{\varphi}^2)=0$

6-25 $2\ddot{x}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ddot{s}=0$, $\quad \dfrac{3}{2}m\ddot{s}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}m\ddot{x}+ks-\dfrac{1}{2}mg=0$

6-26 $4m\ddot{x}+ml\cos\varphi\,\ddot{\varphi}-ml\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2+2kx=0$

$2l\dot{\varphi}+3\cos\varphi\,\ddot{x}+3g\sin\varphi=0$

6-27 系统具有 3 个自由度,设广义坐标为任一瞬时弹簧长度为 l,弹簧中心线与铅垂线夹角 θ,AB 杆与铅垂线夹角 φ,则

$$m\ddot{l}-ma[\ddot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)+\dot{\varphi}^2\cos(\varphi-\theta)]-ml\dot{\theta}^2+k(l-a)-mg\cos\theta=0$$

$$ml[l\ddot{\theta}+a\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)+2\dot{l}\dot{\theta}-a\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta)]+mgl\sin\theta=0$$

$$ma\left[\frac{4}{3}a\ddot{\varphi}+(2\dot{l}\dot{\theta}+l\ddot{\theta}-2\dot{l}\dot{\varphi})\cos(\varphi-\theta)+(l\dot{\theta}^2-\ddot{l})\sin(\varphi-\theta)\right]+mga\sin\varphi=0$$

6-28 (1) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_A(m_A+3m_B)}{(m_A+2m_B)k}}$; (2) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_A(m_A+3m_B)}{2(m_A+m_B)k}}$

6-29 (1) $a=\dfrac{k\delta}{m_A+3m_B}$向左; (2) $a=\dfrac{2k\delta}{m_A+3m_B}$向右

6-30 (1) $v=\delta\sqrt{\dfrac{m_Ak}{(m_A+2m_B)(m_A+3m_B)}}$; (2) $v=\delta\sqrt{\dfrac{2m_Ak}{(m_A+m_B)(m_A+3m_B)}}$

第 7 章

7-1

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 & l\sin\varphi_1 & -l\cos\varphi_1 & 1 \\ 1 & 0 & l\sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \\ -l\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1 \\ -l\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ml\omega^2\cos(\theta-\omega t) \\ ml\omega^2\sin(\theta-\omega t)-mg \\ -mgl\cos(\theta-\omega t) \end{pmatrix}$$

7-2

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 & l\sin\varphi_1 & l\cos\varphi_1 & 1 \\ 1 & 0 & l\sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \\ -l\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1 \\ l\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ml\omega^2\cos(\theta+\omega t)\\-ml\dot\varphi\omega^2\sin(\theta+\omega t)-mg\\mgl\cos(\theta+\omega t)\end{pmatrix}$$

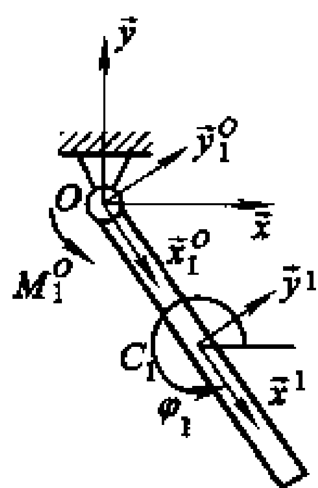
7-3

$$\begin{pmatrix}
m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 & l\sin\varphi_2 & -l\cos\varphi_2 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & l\sin\varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -l\cos\varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\ddot x_1\\\ddot y_1\\\ddot\varphi_1\\\ddot x_2\\\ddot y_2\\\ddot\varphi_2\\\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\\\lambda_5\\\lambda_6\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}0\\-m_1g\\0\\0\\-m_2g\\0\\a\\0\\0\\a-l\dot\varphi_2^2\cos\varphi_2\\-l\dot\varphi_2^2\sin\varphi_2\\0\end{pmatrix}$$

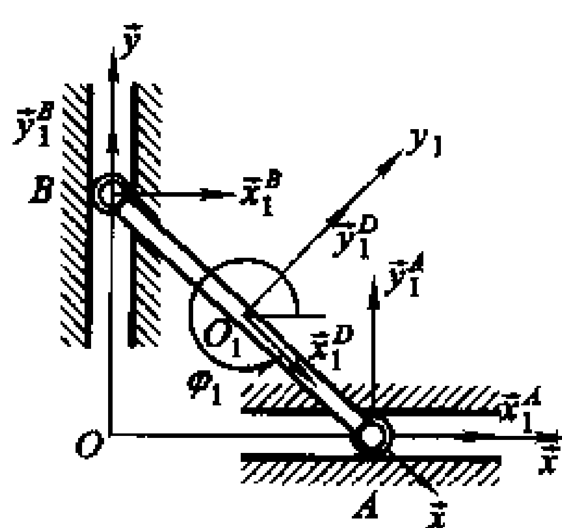
$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\\\lambda_5\\\lambda_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}lm_2\omega^2\cos\varphi_2-(m_1+m_2)\alpha\\lm_2\omega^2\sin\varphi_2-(m_1+m_2)g\\-lm_2g\cos\varphi_2+lm_2\alpha\sin\varphi_2\\lm_2\dot\varphi_2^2\cos\varphi_2-m_2\alpha\\lm_2\dot\varphi_2^2\sin\varphi_2-m_2g\\-lm_2g\cos\varphi_2+lm_2\alpha\sin\varphi_2\end{pmatrix}$$

7-4 令铰 O 为一旋转铰与绝对旋转驱动的组合铰，如图定义铰 O 在摆上的铰基 $\vec e_1^O$，该铰的理想约束力与驱动力矩分别为

$$F_1'^O=\begin{pmatrix}-ml\omega^2+mg\sin(\theta-\omega t)\\mg\cos(\theta-\omega t)\end{pmatrix},\quad M_1'^O=mgl\cos(\theta-\omega t)$$



题7-4 答案图



题7-5 答案图

7-5 如图定义铰 A 与 B 在杆上的铰基 $\vec e_1^A$ 与 $\vec e_1^B$。绝对驱动铰在杆上的铰基 $\vec e_1^D$ 定义在 O_1，

方向如图所示。

铰 A 的理想约束力(矩)为

$$F_1'^A=\begin{pmatrix}0\\ mg+ml\omega^2\sin(\theta+\omega t)\end{pmatrix},\quad M_1'^A=0$$

铰 B 的理想约束力(矩)为

$$F_1'^B=\begin{pmatrix}-ml\omega^2\cos(\theta+\omega t)\\ 0\end{pmatrix},\quad M_1'^B=0$$

驱动约束 D 的驱动力(矩)为

$$F_1'^D=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\quad M_1'^D=-mgl\cos(\theta+\omega t)$$

7-6 在滑块 B_1 上将绝对 x 位置约束与绝对方向约束作为组合铰,铰点定义在 A,铰基 $\vec{e}_1^A$ 如图所示。铰 A 的理想约束力(矩)为

$$F_1'^A=\begin{pmatrix}0\\ (m_1+m_2)g-m_2l\omega^2\sin(\theta+\omega t)\end{pmatrix}$$

$$M_1'^A=m_2gl\cos(\theta+\omega t)-m_2al\sin(\theta+\omega t)$$

将滑块 B_1 水平方向驱动约束的铰点定义在 C_1,铰基 $\vec{e}_1^D$ 与 B_1 的连体基 $\vec{e}^1$ 一致。驱动约束 D 的驱动力(矩)为

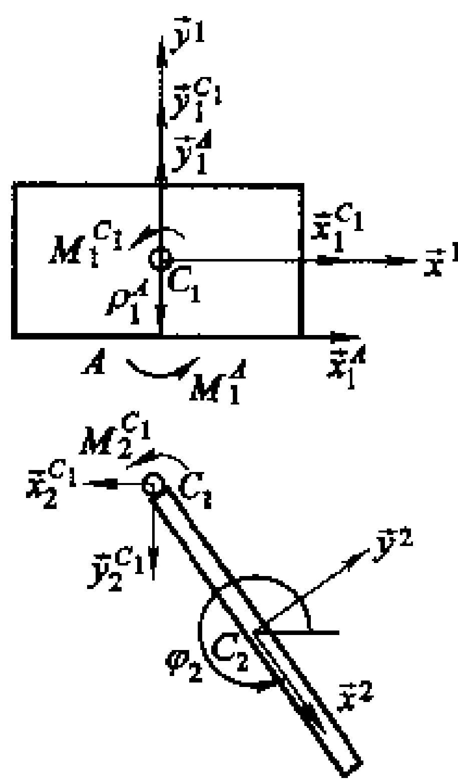
$$F_1'^D=\begin{pmatrix}(m_1+m_2)a-m_2l\omega^2\cos(\theta+\omega t)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$M_1'^D=0$$

将滑块 B_1 与摆 B_2 间的转动铰与相对驱动铰作为一组合铰。该铰在滑块 B_1 与摆 B_2 的铰基 $\vec{e}_1^{C_1}$ 与 $\vec{e}_2^{C_2}$ 如图所示,该铰的理想约束力与驱动力矩分别为

$$F_1'^{C_1}=F_2'^{C_1}=\begin{pmatrix}-m_2a+m_2l\omega^2\cos(\theta+\omega t)\\ -m_2g+m_2l\omega^2\sin(\theta+\omega t)\end{pmatrix}$$

$$M_1'^D=-M_2'^D=m_2la\sin(\theta+\omega t)-m_2gl\cos(\theta+\omega t)$$



题 7-6 答案图

7-7 (1) $\boldsymbol{F}'_\alpha=-2(\boldsymbol{h}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{C}_\alpha)^{\mathrm T}\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{M}'_\alpha=0$

$\boldsymbol{F}'_\beta=2(\boldsymbol{h}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{C}_\beta)^{\mathrm T}\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{M}'_\beta=0$

(2) $\boldsymbol{F}'_\alpha=-2[(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{d}'_\alpha)^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^\alpha\boldsymbol{C}_\alpha]^{\mathrm T}\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{M}'_\alpha=0$

$\boldsymbol{F}'_\beta=2[(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{d}'_\beta)^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^\beta\boldsymbol{C}_\beta]^{\mathrm T}\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{M}'_\beta=\boldsymbol{d}'^{\mathrm T}_\beta[-\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta+\boldsymbol{A}^{\beta\alpha}\boldsymbol{\rho}'^Q_\beta+\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta)]\boldsymbol{\lambda}$

(3) $\boldsymbol{F}'_\alpha=\boldsymbol{0},M'_\alpha=\boldsymbol{\Phi}_c\lambda$

7-8 根据已知条件,将连体基的基点固结在构件的质心。参考题 3-11,机构约束方程参数表与各刚体的初始位形等参数如附表所示。利用《理论力学问题求解器》可进行仿真计算。

题 7－8　机构约束方程参数(供参考)

H_i		B_α			B_β			
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{PT}_{\alpha}$/mm		β	$\boldsymbol{\rho}'^{QT}_{\beta}$/mm		c
	(ax)	4	0	0				0
	(ay)	4	0	0				0
	(aφ)	4	0	0				0
1	(r)	1	−20	0	4	0	0	
2	(r)	2	−280	0	1	20	0	
3	(r)	3	−140	−70	2	0	0	
4	(r)	3	260	70	4	260	−40	

题 7－8　各刚体的初始位形，惯量与外力(矩)参数

B_i	m_i/kg	J_i/kg·m^2	x_i/mm	y_i/mm	φ_i/(°)	M_i/N·m
1	0.1	0.001 5	20	0	0	2
2	1.0	0.03	18.94	279.22	94.313	
3	2.0	0.04	159.16	209.68	−52.937	
4	1.0	1.0	0	0	0	

7－9　根据已知条件，将连体基的基点固结在构件的质心。参考题 3－12，机构约束方程参数表与各刚体的初始位形等参数如附表所示。利用《理论力学问题求解器》可进行仿真计算。

题 7－9　机构约束方程参数表(供参考)参数

H_i		B_α					B_β						
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{PT}_{\alpha}$/mm		ψ_α	R_α/mm	β	$\boldsymbol{\rho}'^{QT}_{\beta}$/mm		ψ_β	$\boldsymbol{d}'^{T}_{\beta}$		$c(\theta)$
	(ax)	4	0	0									0
	(ay)	4	0	0									0
	(aφ)	4	0	0									0
1	(r)	1	−25	0			4	0	0				
2	(r)	2	0	0			1	25	0				
3	(r)	3	75	0			4	100	0				
4	(tr)	2	0	0			3	26.1	0		1	0	
5	(tp)	2	0	0	78.46°	10	3	16.1	0	0°	1	0	270°

题 7－9　各刚体的初始位形，惯量与外力(矩)参数

B_i	m_i/kg	J_i/kg·m^2	x_i/mm	y_i/mm	φ_i/(°)	M_i/N·m
1	0.5	0.000 104	25	0	0	0.3
2	0.5	0.000 025	50	0	0	
3	1.0	0.187 5	26.52	15.01	168.45	
4	1.0	1.0	0	0	0	

7－10　根据已知条件，将连体基的基点固结在构件的质心。参考题 3－13，机构约束方程参

数表与各刚体的初始位形等参数如附表所示。利用《理论力学问题求解器》可进行仿真计算。

题 7-10 机构约束方程参数(供参考)

H_i		B_α			B_β			
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}$/mm		β	$\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}$/mm		c
	(ax)	4	0	0				0
	(ay)	4	0	0				0
	(aφ)	4	0	0				0
1	(r)	1	-7.5	0	4	0	0	
2	(r)	2	-50	0	1	7.5	0	
3	(r)	3	-15	0	2	0	0	
4	(r)	3	15	0	4	45	-30	

题 7-10 各刚体的初始位形,惯量与外力(矩)参数

B_i	m_i/kg	J_i/kg·m^2	x_i/mm	y_i/mm	φ_i/(°)	M_i/N·m
1	0.001 2	2.25×10^{-8}	20	0	0	0.1
2	0.1	9.2×10^{-8}	18.94	279.22	94.313	
3	0.002 5	4.5×10^{-8}	159.16	209.68	-52.937	
4	1.0	1.0	0	0	0	

7-11 根据已知条件,将连体基的基点固结在构件的质心。机构约束方程参数表附表所示。利用《理论力学问题求解器》可进行静力学分析。所得结果为

$F'^{O}_{1x}=-400\ \text{N}, F'^{O}_{1y}=145.73\ \text{N}, M'^{O}_{1}=0\ \text{N·m}$

$F'^{B}_{3x}=0\ \text{N}, F'^{B}_{3y}=240.02\ \text{N}, M'^{B}_{3}=0\ \text{N·m}$

下垂 0.061 m,

$F>600$ N

题 7-11 机构约束方程参数(供参考)

H_i		B_α			B_β			
i	类	α	$\boldsymbol{\rho}'^{P}_{\alpha}$/mm		β	$\boldsymbol{\rho}'^{Q}_{\beta}$/mm		c
	(ax)	4	0	0				0
	(ay)	4	0	0				0
	(aφ)	4	0	0				0
1	(r)	1	-125	0	4	0	0	
2	(r)	2	-250	0	1	250	0	
3	(r)	3	0	0	2	250	0	
4	(r)	3	0	0	4	750	0	

索　引

（按汉语拼音字母顺序排列）

Synopsis

As the research achievement of "The Project Reforming Education Contents & System of Courses for Higher Education Facing to the 21 st Century" governed by the Education Ministry of China, this book is one of new textbooks facing to the 21st century and one of those for the 9th Five-Year Plan of the Education Ministry. By using this book, the author tries cultivate university students with fundamental knowledge of mechanics obtained in learning college physics to have an ability to establish correctly mechanical models of complicated engineering objects, to have an ability to perform transient analyses or time-history analyses of kinematics and dynamics for those mechanical models and to have an ability to judge if the analytical results are correct with basic concepts of theoretical mechanics. Thus, the author is meticulous in selection of traditional contents of theoretical mechanics. Especially, fundamental principles and methods to handle mechanical behaviors of engineering objects with computer procedural pattern are included in this book. It is written with fully new arrangements and great improvements on traditional contents and setup of theoretical mechanics.

Vectors and matrices are paid equal attention to express a lot of concepts in the book, by the two means those concepts are not only clear and definite in meaning of physics but also convenient to be used for numerical calculation with computer. Kinematics relationship of particles is dealt with by both vector geometry and vector algebra on the basis of kinematics of rigid bodies. The fundamental principles of dynamics, the methods of establishment of dynamic models and the transient analysis techniques for dynamic characteristics are focused on in vector dynamics and analytical mechanics. Statics is treated as a special case of dynamics. There are two chapters arranged to concentrate on fundamental principles of building models with procedural pattern for kinematics, dynamics and statics of advanced complicated mechanical systems. The relevant computer – aided teaching software named "A Solver of Problems of Theoretical Mechanics" is applied to foster university students ability to solve practical problems by means of software.

This textbook can be used for university students of various engineering specialties, such as mechanical engineering, etc. to learn theoretical mechanics. It can also be used as a reference for engineers in the fields of mechanical engineering, aeronautical and astronautical engineering as well as vehicle engineering to update knowledge.

Contents

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝面向２１世纪课程教材　理论力学
作者＝
页数＝３３８
ＳＳ号＝０
出版日期＝